S. 1142

MEMORIE

DI

MATEMATICA
E FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

TOMO V.

VERONA

PER DIONIGI RAMANZINI

M. DCC. XC.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

CATALOGO
DE' MEMBRI
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA.

PRESIDENTE

Antonmario Lorgna Cavaliere della sacra Religione de' Santi Maurizio e Lazaro, Brigadiere, e Governatore delle Scuole Militari. *Verona*.

SOCJ ATTUALI.

Giovanni Arduino Professore di Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico Sopraintendente alle cose agrarie dello Stato Veneto. *Venezia*.

Carlo Barletti delle Scuole Pie, Professore di Fisica generale nella R. I. Università di Pavia. *Pavia*.

Teodoro Bonati Professore d' Idrostatica nell' Università Pontificia di Ferrara, ed Inspettore dei fiumi del Ferrarese. *Ferrara*.

Antonio Cagnoli Astronomo, e Secretario perpetuo dell'Accademia di Agricoltura, Commercio ed Arti. *Verona*.

LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI Primario Professore ordinario di Medicina storica, e di Anatomia nell' Università di Padova. *PADOVA*.

SEBASTIANO CANTERZANI Professore di Matematica nella Pontificia Università di Bologna, e Secretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze. *BOLOGNA*.

* ANGELO ABATE DE CESARIS Astronomo nel Regio Osservatorio di Milano. *MILANO*.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

PIETRO FERRONI Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

FELICE FONTANA Cavaliere del Sacro Romano Impero, Direttore del Regio Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Professore di Matematica Superiore nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

ALBERTO ABATE FORTIS Professore di Storia Naturale. *NAPOLI*.

---

* Stava preparando questo Socio una memoria intorno all' aberrazione ed alla velocità della luce attraverso un cannocchiale di vetro lungo sei piedi pieno d'acqua. Per disavventura rimasero interrotte le di lui osservazioni a compimento della memoria, essendosegli spezzato il detto cannocchiale.

Vittorio Fossombroni Cavaliere dell' incl. Ordine Militare di Santo Stefano di Toscana. *Arezzo*.

Michele Girardi Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia naturale, e Professore della medesima, e di Anatomia. *Parma*.

- -

* Marsilio Landriani Cavaliere dell' incl. Ordine militare di Santo Stefano di Toscana, e Regio Professore di Fisica Sperimentale. *Milano*.

Vincenzo Malacarne Professore Primario di Istituzioni cerusiche, e dell' Arte Ostetricia nella R. I. Università di Pavia, e Cerusico Pensionario di S. M. Sarda. *Pavia*.

Giovanni Francesco Malfatti Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara. *Ferrara*.

Carlo Lodovico Conte Morozzo Maggiore del Reggimento di Susa di S. M. il Re di Sardegna, e Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *Torino*.

Pietro Moscati Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano. *Milano*.

Barnaba Abate Oriani Astronomo nel Reale Osservatorio di Milano. *Milano*.

* A motivo de' lunghi viaggi intrapresi per sovrane commissioni, non ha potuto questo Socio dar l' ultima mano ad una memoria da lui destinata per questo tomo.

PIETRO PAOLI Professore di Matematica nella Regia Università di Pisa. *PISA*.

ERMENEGILDO PINI Ch. Reg. B. Professore di Storia Naturale. *MILANO*.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

PIETRO ROSSI Professore di Logica nella Regia Università di Pisa, e Naturalista. *PISA*.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Professore di Astronomia nella Regia Università di Pisa. *PISA*.

LAZARO ABATE SPALLANZANI Professore di Storia Naturale nella R. I. Università di Pavia, e Sopraintendente al Pubblico Museo della medesima. *PAVIA*.

SIMONE CONTE STRATICO Professore di Matematica, e di Fisica Sperimentale nell' Università di Padova. *PADOVA*.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

GIOVANNI BATTISTA ABATE VENTURI Professore di Matematica nell' Università di Modena. *MODENA*.

ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

VERARDO ZEVIANI Medico-Fisico. *VERONA*.

SOCJ EMERITI

DOMENICO CIRILLI Professore di Medicina Teorica nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

DOMENICO COTUNIO Professore di Anatomia nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

LODOVICO DE LA GRANGE Presidente Onorario dell' Accademia delle Scienze di Torino. *PARIGI*.

GIUSEPPE ANGELO CONTE SALUZZO Gentiluomo di Camera di S. M. il Re di Sardegna. *TORINO*.

GIROLAMO SALADINI Patrizio Lucchese, Canonico nella Metropolitana di Bologna. *BOLOGNA*.

ANTONIO SCARPA Professore di Anatomia, e di operazioni Chirurgiche nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

GIUSEPPE VAIRO Professore di Chimica nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

SOCJ ONORARJ

LUIGI CACCIANEMICI PALCANI Professore Primario di Geografia, e di Nautica nell'Instituto, e di Fisica nella Pontificia Università di Bologna. *BOLOGNA*.

ANGELO MONSIGNORE FABRONI Presidente della R. Università di Pisa, e Priore nell' incl. Ordine di Santo Stefano di Toscana. *PISA*.

IPPOLITO MARCHESE PINDEMONTE Patrizio Veneto, e Cavaliere Gerosolimitano. *VENEZIA*,

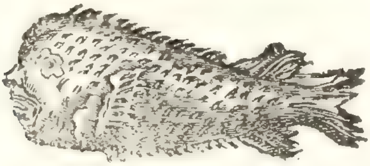
SOCJ STRANIERI.

M. ACHARD. *BERLINO*.
M. BAILLY. *PARIGI*.
M. BONNET. *GINEVRA*.
M. LE COMTE DE BORN. *VIENNA*.
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
M. CAMPER. *AMSTERDAM*.
M. CAMPOMANES. *MADRID*.
M. LE MARQUIS DE CONDORCET. *PARIGI*.
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
M. NARVOYSZ. *WILNA*.
M. PALLAS. *PIETROBURGO*.
M. PRYESTLEY. *LONDRA*.

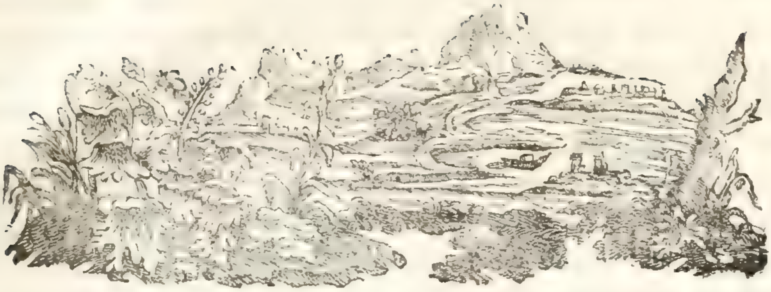
SECRETARJ

AGOSTINO ABATE VIVORIO Professore di Geografia, e Storia nelle Scuole Militari di Verona, Secretario perpetuo, e Amministratore. *VERONA*.

GIUSEPPE ABATE TOMMASELLI Vice-Secretario, e Direttore della Stampa. *VERONA*.



ELOGIO



E L O G I O

DI LEONARDO XIMENES

SCRITTO

Dal Sig. Luigi Caccianemici Palcani

SE quelle coſe medeſime, che a sè traggono l' oſſequio, e la riverenza del volgo, ſembraſſero ai filoſofi egualmente grandi e magnifiche, non potremmo incominciare l' elogio di *Leonardo Ximenes* ſenza tener lungo ragionamento della nobiltà della ſua patria, dell' antichità di ſua ſtirpe, e del nome, e della fama di quell' inclita compagnia, a cui egli con ſacri vincoli ſi legò. La Sicilia il produſſe, terra glorioſa, perchè ivi pur nacque Archimede: i ſuoi maggiori furono in Trapani chiari e pregiati: ancor fanciullo diè ſegni di ſottile intelletto, di felice memoria, di naturale attitudine alla virtù: gli parvero vaniſſimi i ſentimenti, e le ſollecitudini del ſecolo: bramò di uſcirne: lo annoverò tra' ſuoi una ſocietà religioſa, che da ſaggi ed avveduti uomini iſtituita,

già eran due secoli, protetta dai Pontefici, accolta benignamente dai Re, venerata dai popoli, dopo essersi rapidamente propagata per lo antico mondo, e pel nuovo, dopo avere conseguiti sommi onori in tutte le corti, e in tutte le università, coltivata ogni maniera di liberali discipline, preseduto alla pubblica educazione, ed essersi resa arbitra delle opinioni, e dei costumi degli uomini, potè finalmente esser spenta; ma non potrà essere obbliata giammai. Ma il volgo è uso di conoscere gli oggetti confusamente, nè ben distingue ciò che loro è proprio, da ciò che v' aggiunge egli stesso. Così aggrandisce le stelle di un chiarore, che in loro non è, ma nell' occhio, che le riguarda. E ben la fama di molti verrebbe meno, e scemerebbe, se restasse il popolo d' ingannarsi. *Leonardo Ximenes*, risoluto, com'era, di non ricevere fra' suoi pregi, se non quelli che a ragione eran suoi, sdegnerebbe una lode, di cui poscia dovesse saper grado o alla fortuna, benchè propizia, o ad un errore, quantunque comune, o alla dignità stessa, e alla grandezza d' altrui.

Firenze, che lo accolse ancor giovinetto, veggendolo indefesso nelle fatiche, ardentissimo ad investigare la verità, avido di vera gloria, concepì di lui quelle speranze, che poi si compierono largamente. In quella città nobilissima nè gli mancarono dotti maestri, che lo instruissero, nè preclari esempj, che lo stimolassero allo studio delle scienze matematiche. Non andò lungo tempo che ne divenne maestro egli stesso, e le sue cure scolastiche, e i suoi elementari insegnamenti siccome la nostra gratitudine in singolar guisa meritarono, così hanno diritto alla ricordanza de' posteri. La scienza della Geometria, che uscì dalle greche scuole schietta, e purissima, e adorna d' immutabili verità in maraviglioso ordine disposte, fu dopo molti anni da un perturbatore importuno delle migliori discipline contaminata, e corrotta. Que' nobilissimi pregi, di che l' aveva Euclide arricchita, rimutò, e

cambiò il ramo, e per evidenza, e certezza ambiguità, e dubbio rendè. L'amore di novità accecò molti. Gli *Arnaldi*, i *Lamy*, i *Malezieu*, e più altri, avvisandosi anch'essi d'ingentilire, e di riordinare le proposizioni d' *Euclide*, ne guastarono la sodezza. Moltiplicaronsi le istituzioni geometriche, e il vigore della Geometria indebolì. Gli Algebristi la vestirono di formole, e di equazioni, e liberali essendole d'estranj ornamenti le tolsero i suoi. Nel che per avventura non molto provvidero ai comodi dell' arte loro, cui niuno coltiverà degnamente, se prima non abbia avvezzo l' animo, e quasi dimesticato alla sintesi. Tanta vanità di studj, e di metodi indusse il *Volfio* a credere, che senza traviar bruttamente niuno abbandonar poteva le orme segnate per *Euclide*.

Io non dirò tanto, di *Simpson* massimamente ricordandomi: e poichè di ciò si compiacciono, e se ne vantano, concederò ai novelli geometri la gloria di condurre i loro discepoli agiatamente, e per via facile e piana, dove gli antichi non li avrebbero scorti senza fatica, ed affanno. Ma duolmi che i geometri abbiano preso a favorir la pigrizia; nè so bene, se questi giovani che ora tanto delicatamente si costumano, e quasi formansi alla mollezza, varranno poi a scorrere il difficil campo delle scienze matematiche, e a sostenere il travaglio di tanti problemi, e a comprendere, e a svolgere, e ad aggiungere tante verità, non rade volte varie e moltiplici, spesso intralciate, ed oscure, sempre lontane e recondite. Non uscirono certamente gli atleti da Seplasia, e da Capua. Una incredibile pazienza delle fatiche, e un lungo uso della lotta e del corso gli educò alle vittorie, ed alle palme. I teneri e delicati, non che le percosse degli avversarj, non avrebbero sofferto il sole, e la polvere dello stadio. Ben però fece *Ximenes*, che ritrasse i geometri verso il loro principio, e questi quasi degenerati Spartani ricondusse alla disciplina del loro Licurgo. Nè fu rigido in tal manie-

ra, che non voleſſe da niuna pena, e da niuna ſollecitudine quantunque inutile liberarli; ma tanta gliene diè ſolamente, quanta fu neceſſaria a provvedere alla ſtabilità della Geometria, e a conſervarne l' integrità. Quindi egli non la diſpoſizione dei libri, non l' ordine dei teoremi, non la ſevera forma di argomentare, che ad *Euclide* piacque, mutò; ma con opportuni proemj drizzò, e apparecchiò la via al conoſcimento di quelle mirabili dottrine, e molti luoghi per iſtrettezza, e brevità oſcuri dilatò, e fece chiari, e ciò che più valſe ad eccitare gl' ingegni ancor lenti, elegantemente e con bel modo ſpiegò quanto giovi ogni libro d' *Euclide* allo ſcoprimento delle fiſiche verità: ed ecco, egli dice, queſto teorema inſegnò alla Geografia la miſura delle terreſtri latitudini, e della terra medeſima; e queſto deſcriſſe all' Optica il viaggio della luce. ed arricchì la Meccanica delle leggi del moto rifleſſo; ſenza queſta propoſizione la militare e la civile Architettura rimarrebbero confuſe, e ſenza quella mal potrebbe l' Aſtronomia moſtrarne il cielo, e i varj cerchi, che in quello diſegna, e l' ardita Nautica ſul mare ſmarrirebbe pure il ſuo coraggio. L' aſpetto giocondiſſimo di tante utili verità fece i giovani ſolleciti, nè li laſciò annighittire, ed eſſere oziosi. Eglino s' affannarono volentieri, e tanto meno ſentirono l' aſperità dei mezzi, quanto più loro ſembrò bello e dilettevole il fine. Molte e nobiliſſime ſcuole d' Italia la nuova maniera d' interpretare gl' inſegnamenti d' *Euclide* approvarono, e ſeguirono, e *Franceſco Maria Zanotti* ſolea dire, ch' egli avea già veduta la Geometria quando ruſtica e ſelvaggia, quando ſcorretta, e licenzioſa, e ch' ora per un raro accoppiamento di due eccellenti qualità la vedea pudica inſieme, e gentile.

L' onore, che per tutta Italia ſi reſe a' ſuoi Elementi geometrici, accrebbe nel noſtro *Ximenes* vaghezza di lode. Che di vero non era egli tanto ignaro del proprio valore, che sè

nè conoſceſſe pronto ad opere vie più rare ed illuſtri, nè d'animo così abbietto, che ſoſtener non poteſſe la ſperanza di maggior gloria. Quindi tra sè rivolgendo le varie parti delle ſcienze matematiche, quantunque ciaſcuna dolcemente lo allettaſſe, pure inteſe alle miſte più che all'altre; o il traeſſe la maggiore utilità, che quelle promettono, o il maggior uopo, che hanno, di eſſere favorite, ed accreſciute. E certamenre la ſublime Geometria, e l'Algebra, e le altre facoltà occupate a inveſtigare i ſegreti del mondo intelligibile, ſono ogg'mai a tanta altezza ſalite, che non ſembrano molto lontane da quella perfezione, a cui può recarle ingegno mortale; ma quelle ſcienze, che leganſi colla Fiſica, e nel mondo reale ſtanziano, e tentano di penetrare i naſcondigli della natura, lentamente avanzano, e a ſtento aggranditcono. Del che tutta la colpa riſiede in que' principj, che ſono fondamento, e ſoſtegno di ogni geometrico magiſtero. E veramente in un problema aſtratto niuna ipoteſi s'intromette, che non ve l'abbiano eglino ſteſſi introdotta i matematici; laddove i problemi fiſici coſtretti ſono a ricevere, e a comprendere tutte quelle ſuppoſizioni, che la natura richiede, e che poi eſſa medeſima agli ſguardi dei filoſofi ſembra ſtudioſamente naſcondere. Se un meccanico ſia voglioſo di ſottoporre a calcolo il movimento di corpi, cui niun oſtacolo raffreni, ed arreſti; egli dalla impenetrabilità, e dalla inerzia loro dedurrà moltiſſimi teoremi, e belliſſimi, e ne ſpiegherà gli equilibrj, e i vicendevoli incontri, e ſegnerà il cammino, ch'eſſi fanno, altri ugualmente traendoſi, altri affoızandoſi, od impigrendo. Nè lo ſpaventeranno le ſottigliezze; poichè il *Torricelli*, e il *Carteſio*, e il *Maupertuis*, e il *Courtieron*, e più altri gli ſaranno corteſi di utiliſſime regole, che in mezzo alle difficoltà lo ſoſtengano, e lo confortino, e il *Galileo* gli porgerà il principio delle velocità virtuali, quaſi nuovo filo d'Arianna, che lo ſcorga ſicuramente per le più tortuo-

ſe, e più dubbie vie delle meccaniche ſpeculazioni. Ma la natura, che l'univerſo creando non pensò al comodo dei matematici, e alla facilità dei calcoli, e ſi propoſe altri fini altiſſimi, e più degni di sè, oppoſe molti impedimenti al moto dei corpi, nè li formò liſci, e puliti, come ſi fingono dai meccanici, ma con infiniti pori ne interruppe la teſſitura, e li fornì di cavità, e d'aſprezze, e di prominenze, e quaſi di ſquame, ſparſe per tutto, e l'una ſopra l'altra conconfuſamente accumulate. Il perchè movendoſi un corpo ſopra di un piano, o ſtrofinandoſi comunque ad altro corpo, non può innanzi procedere, ſenza che vinca queſte aſprezze, o piegandole, ſe fleſſibili ſono, o ſoverchiandole, ſe dure, o ſminuzzandole, e rompendole. Intanto quell' impeto, onde il corpo fu ſoſpinto dapprima, ſi rattiene tra via, e s'arreſta, e va ſtremandoſi a poco a poco, finchè s'annienti. Nè queſta reſiſtenza fu ignorata dal volgo, che anzi ora creſcendola ad arte, or menomandola alla propria utilità la rivolſe, ed ora il bifolco lega, e figge le ruote al ſuo carro, perchè queſto dall'erta balza non piombi, e lentamente ſtriſciando diſcenda, ed ora ſpalma il perno, e ſecondo ſuo potere l'appiana, perchè reſo il fregamento men ruvido ſia la converſion delle ruote meno impedita. I dotti uomini, che precedettero *Amontons*, non ebbero vantaggio dal volgo. Quegli prima d' ogni altro tentò di ridurre lo ſtropicciamento de' corpi a leggi perpetue, ed immutabili, e quaſi all' obbedienza della Fiſica. Lo ſeguirono *Camus*, e *Belidoro*: *Muſchembroech* gli contraſtò: s' acceſero molte conteſe. L' Accademia di Parigi eſortando i fiſici, e premj, ed onori proponendo, invogliò molti a far nuove ricerche ſopra una tanto grave queſtione, e a provvedere, quant' era in loro, al comodo dell' arti, e alla perfezione della Meccanica: ma niuno di queſti ſoddisfece interamente al deſiderio dell' Accademia, e la promeſſa corona ſtette in prima ſoſpeſa, poi diviſa a più fronti

non moſtrò che alcuno aveſſe toccato la meta, ma che molti s' erano deſtramente adoperati per arrivarla. La diligenza, che a ragione fu chiamata figlinola della fatica, e del tempo, non laſciò ſpazio al noſtro *Ximenes* di venire innanzi al coſpetto de' giudici Parigini. Si proferì la ſentenza quando ancora non erano condotte a fine le moltiplici e laborioſe eſperienze, ch' egli avea ſtudioſamente intrapreſe. Le compiè ciò non pertanto, e al pubblico giudizio le ſottopoſe. Così l' attenta cura, che gli tolſe l' onore di un cimento, lo animò poſcia ad offerirſi ad un altro, e a non temere il paragone del primo, ed egli potè riguardarſi come l' atleta di riſerbo, deſtinato a combattere coi vincitori. Non è ragione, che io l' anteponga ad ogn' altro, un' autorità uſurpando che male mi ſi avverrebbe. Appartiene agli agonoteti, e non al volgo ſpettatore il diſtribuir le corone. Pur chiederò, ſe altri mai, dal noſtro Matematico in fuori, formaſſe, e metteſſe ad opera un Tribometro tanto grande, e tanto vigoroſo, che ſoſtener poteſſe il grave peſo di cinque mila libbre, ſe più frequentemente di lui reiteraſſe le ſteſſe prove, ſe le variaſſe con maggiore ſagacità, ſe ne inferiſſe leggi o più ſtabili, e ferme, o più accomodate a dirigere le operazioni, che ſi fanno dall' arte, o a ſpiegar quelle, che ſi producono dalla natura. E queſte medeſime leggi quanto nuove ſembrarono, e maraviglioſe, e inaſpettate! Niuno ſarebbeſi dato a credere giammai, ſe moltiſſimi eſperimenti non lo aveſſero dimoſtrato, che le reſiſtenze reſpettive tanto più ſcemano, quanto è maggiore la gravezza de' corpi, che ſtrofinanſi. Niuno ſapea, che ſe le macchine ſieno aggravate in prima da piccoliſſimi peſi, indi più, e più queſti s' aumentino, le reſiſtenze ſul principio vanno oltre, e aggrandiſcono, poi ſucceſſivamente ſcadono, e declinano ſenza modo. Forſe l' ignoranza di queſte leggi difficultò già, e turbò più d' ogni altra coſa gli ſtudj e le diligenze dei mate-

matici. Ma il noſtro *Leonardo* non laſciò luogo a dubitarne; e la gradazione delle reſiſtenze, che tanto decreſcono, quanto le preſſioni ſtringono i corpi, e li gravano, per mezzo di un ramo iperbolico aſſintotico ingegnoſamente eſpreſſe, e col favore di queſta nobiliſſima curva ragion fece di tutte le reſiſtenze, che a differenti peſi riſpondono, e i tanti caſi, che non avea potuto cogli eſperimenti comprendere, coll' animo abbracciò. Nè gli fu difficile ſottomettere a' ſuoi precetti e conj, e burbere, ed argani, e taglie, e molt' altri macchinamenti e ſemplici, e compoſti, ed aſſicurare le arti nelle intrapreſe più animoſe, o voglian eſſe i porti difendere, e traſportare immenſe ſcogliere, o peſantiſſime navi lanciar nell' acqua, o imitando l' egizio luſſo, e il romano, rizzare piramidi, ed obeliſchi. Laonde il ſuo nome, per quel ch' io ſtimo, ſarà caro, ed in pregio, finchè l' uſo, e l' eſperienza ſignoreggino le arti. I matematici, che fioriranno per lo innanzi, procederanno forſe più oltre, e ſopra queſta materia belliſſime coſe, e ſino ad ora inudite per gran ventura inſegneranno; benchè il *Lambert* ne levi ancora la ſperanza, e i fiſici ſi daranno briga or d' inventare or di perdere ſiſtemi, varj così, ed inſtabili, com' è volubile, e incoſtante l' immaginazione, che li crea; ma in tanta o copia di felici invenzioni, o vicende di penſieri, e d' ipoteſi non potrà mancar di lode giammai, chi paleſò il primo una legge, o conſuetudine della natura, che tanto fu malagevole a diſcoprirſi, quanto più ne torna il conoſcerla.

Nè ſolamente la Meccanica de' corpi ſolidi ricevè da lui accreſcimento, e ſplendore, ma l' Idrometria eziandio tanto gli deve, quanto a pochiſſimi. Queſt' arte, che veggiamo ancora imperfetta oltre modo e manchevole, è per avventura tra quelle che antichiſſimamente gli uomini coltivarono. O il vantaggio della peſca, e il comodo dell' umore vicino gli invitaſſe a fondare i loro abituri lungo le ſponde di quei rivi,

vi, ch' eran opera della natura, o piaceſſe loro la ſtanza di qualche alta, e rilevata ſommità; la ſoprabbondanza delle piene, che ben ſovvente avvenivano, dovette recar loro noja, e travaglio. Eglino videro i fiumi traboccare ad ora ad ora dai loro confini, e aprendoſi nuovi ſentieri, e in più parti diramandoſi perdere, e deſolare i frutti ſperati delle coltivate campagne, intrometterſi tra caſa e caſa, e interromperne la comunicazione, e ſeparare, e dividere famiglie, che un vicendevole biſogno, od altro iſtinto avea accoſtate inſieme, e fortemente congiunte. L'induſtria innata negli uomini per lo incitamento del vicino pericolo ſi deſtò, e l'imitazione dei canali naturalmente fatti ſupplì in qualche guiſa il difetto della Fiſica, e della Geometria. Creſciuta indi la popolazione, diboſcato per ogni parte il terreno, perfezionata la ſocietà, aſſicurate le ſignorie, e i dominj, nacque l'arte delle miſure, e più regolatamente or ſi ſcavarono, or s'allargarono i letti dei fiumi, or ſe ne rialzarono le ſponde, or s'abbatterono i doſſi, che le cadenti acque ritenevano, e ſtagnavano, e s'aprì a queſte una ſtrada più breve a qualche palude, o ad altro maggior fiume, od al mare. Pervennero i regni e le repubbliche a ricchiſſimo ſtato e grandiſſimo, e maraviglioſe opere idrometriche ſi compierono, ſuperandoſi ogni difficoltà per l'immenſità dei teſori, e per la fermezza del diſpotiſmo. La rozzezza, o piuttoſto barbarie dell'età ſuſſeguenti, che ingroſsò gl'ingegni, e ſpenſe la filoſofia, ed ogni maniera di buoni ſtudj, non potè annientare quell'attitudine, che gli uomini all'eſercizio dell'arti naturalmente hanno: quindi non impedì che non ſi formaſſero talvolta utilmente, e non ſi dirigeſſero, e non s'infrenaſſero i fiumi con opportuni argomenti. Il noſtro ſecolo, che tutte le nobili facoltà non pur richiamò all'antica loro grandezza, ma le abbellì ancora, e le illuſtrò, non ſi preſe poca ſollecitudine della Idrometria; alcuni eziandio s'adope-

raiono ad accrefcerne la dignità, e s'invogliarono d'innalzarla al grado di fcienza. A' quali però, fe contefi foffero i ritrovamenti, e gli artificj di *Leonardo Ximenes*, poco rimarrebbe per avventura di che gloriarfi. E fo bene, che fe vorremo all'Algebra chiedere delle leggi, che il movimento dell' acque governano, effa ne porrà innanzi certi fuoi calcoli, quafi altrettanti enigmi, che fegretamente le racchiudono: ma dov'è un Edipo, che gl'interpreti, e li dichiari? Que' medefimi, che ben fi conofcono di equazioni, e di formole, non valfero a trarre giammai da quelle mifteriofe efpreffioni la vera legge, che la natura a' fiumi prefcriffe, e poterono folamente inferirne, ch'erano fallaci ed ingannevoli quelle molte, che già piacquero a' Geometri affai dottiffimi. e lungamente efercitarono l'ingegno dei *Caftelli*, e dei *Gulielmini*, dei *Grandi*, e dei *Bonati*. Quindi fi levò l'errore, non fi levò l'ignoranza, e la meccanica dell' acque rimafe ignuda, e sfornita di teoria. Il perchè, fe d'inveftigare ne piaccia o la velocità, o la quantità dell'acqua, che in una determinata parte di qualche fiume trafcorre; a cui avremo ricorfo fuori che ad efperimenti, ed a macchine? Tra le quali ben è la ventola, ritrovata per lo *Ximenes*, di tanto pregio, e di tanta eccellenza, ch'io non fo qual altro macchinamento doveffi a buona equità anteporle. Nè crederò che o la caraffa, o il quadrante idrometrico, o la turba moltiforme delle ritrometriche afte fia così orgogliofa, che di maggioranza contenda con effo lei. Nè il tubo pure di *Pitot*, quantunque e di eleganza fi vanti, e di utilità, può metterfi ad opera, fenza che più Matematici abbiano quiftioni coi *Michelotti*, e co' *Scarella*; nè quelle efperienze poffono interamente appagarci, che muovono tante difcordie, e altercazioni. Con quanta fottigliezza l'emisfero idraulico mifura la velocità dell'acque, e fa ragione di quell'impeto, per cui elle fpingono i corpi, che incontrano dirittamente? Ben lo

ſteſſo *Ximenes* il concedea, e quel macchinamento bellissimo altamente onorava; pur tenea che da lui aveſſe la ventola qualche vantaggio, nello eſtimare gli urti, di cui le cadenti acque percuotono gli obliqui ritegni. Nel che ſe altri crederà ch' egli andaſſe errato, e vorrà pure uguagliare l' emisfero, e la ventola, non io avrò vaghezza di contraddirli; che temerei quaſi di ſminuire la gloria del noſtro Matematico, opponendomi ad un così onorevole paragone; e ben ſarò pago, ſe alcuno riguarderà un *Lorgna*, e uno *Ximenes*, come due conſoli colleghi, che alla Repubblica idrometrica preſcrivan leggi, e divieti.

Ma non è dato entro un breve ſpazio tutte le fatiche comprendere, che il noſtro *Leonardo* in pro dell' Idrometria ſoſtenne; nè queſte ſpiegar ſi potrebbero degnamente ſenza un faſtidioſo apparecchio d' imagini topografiche, di livellazioni, e di profili: nelle quali coſe la forma del preſente ragionamento ſdegnerebbe d' eſſere avviluppata. E certo appena v' ha ſtato, o provincia d' Italia, che non gli addomandaſſe intorno a graviſſime queſtioni idrometriche avvertimenti, e conſigli. A lui commiſe il Gran-Duca di Toſcana la riduzione delle maremme Saneſi; lui intorno al regolamento della Brenta interrogarono Veneziani: a lui raccomandaronſi Luccheſi, ſtudioſi di togliere loro terre alle frequenti inondazioni del lago di Bientina; nol dimenticarono Genoveſi, ſolleciti di riparare i loro aquidotti, e i loro porti; vollero udirlo i Romani Pontefici prima che o decretaſſero l' inalveazione dell' acque Bologneſi, o col diſſeccamento delle Volſche paludi prendeſſero ad emulare, o a ſorpaſſare piuttoſto *Teodorico*, e *Cetego*. Ben poſſiamo da tante, e tanto glorioſe deſtinazioni argomentare e un raro ſapere, e un' infaticabile vigilanza, e una ſingolare integrità, e conoſciuto avendo, quant' egli foſſe onorato, conoſcere altresì, quant' egli meritò d' eſſerlo. Nè punto mi turbano le querele d' alcuni, che miſurando la

rettitudine dei configli dalla profperità del riufcimento, che ebbero, non fi chiamano contenti appieno di certi lavori idrometrici, mandati ad efecuzione pel noftro Matematico. E potrei ben' io a poche difavventurofe operazioni molte, e feliciffime contrapporre; e richiamando anzi alla memoria l'antico ftato di quelle fteffe provincie, ch'effi dicono defolate ancora, e malfane, indicar loro e meffe più copiofa, che già non era, e pefca più abbondante, e navigazione più agevole, e la ricchezza ne' privati accrefciuta, e la condizion migliorata di ville, e di caftelli. Ma una così fatta rifpofta fembrar potrebbe artificiofa, ed io per natura, e per mia profeffione fono alieniffimo da ogni artificio. Ben dirò, che fe il divifare un utile provedimento procede dall'ingegno, e dalla dottrina, il condurlo al fuo intero fine fembra il più delle volte rimeffo nell'arbitrio della fortuna; tanti, e sì varj fono gli oftacoli, che ai meglio ordinati difegni s' oppongono, e li contraftano: dirò, che niuno, quantunque afpriffimo riprenditor foffe, incolpò mai *Leonardo Ximenes* d'altro, che di errore, colpa fpeffe volte incerta, e per la fralezza delle cofe umane più di mercè degna, che di biafimo, e di rampogna: dirò, che niuna infidia mai colfe, e niuna lufinga piegò la fua fchiettezza, e lealtà, e fe le fue intraprefe furono interrotte, nol furono, come quelle di *Lucullo*, dall' incontro dell'oro, ma, come le fpedizioni di *Aleffandro*, dalla nativa loro difficoltà. E i pofteri leggendo i molti volumi, che le fue confultazioni idrometriche racchiudono, sì gli fapranno grado di tanti, e tanto fruttuofi problemi, ond' egli mirabilmente le fregiò; nè fenza lode rammenteranno le fue fpeculazioni, che la teoria degli edifizj idraulici affinano, e rifchiarano. Alcuni eziandio tra loro fi meraviglieranno della moltiplicità fteffa dei lavori, e delle offervazioni, e crederanno appena che un uomo folo baftaffe a tanto; non effendo maffimamente la pratica idrometrica un' arte agiata, e

comoda, che eſercitar ſi poſſa nel tranquillo ritiro delle ſtanze, e nell'ombra erudita delle accademie. Eſſa naturalmente irrequieta, e affannoſa move i ſuoi coltivatori a dure, e diſaſtroſe peregrinazioni, ed or li tragge per balze, e per dirupi alle prime ſorgenti dell'acque, or li sforza a correre immenſe campagne, a viſitar opere, a livellar piani, a inerpicarſi per argini, e per rialti, or li conduce a reſpirare un torbido aere, e inſalubre in mezzo a baſſi gorghi, ed a fangoſe paludi. Che ſe dopo tante noje concede loro, che ſi accolgano finalmente alle città, non pur li travaglia colla moleſtia dei calcoli, e colla difficoltà dei ſiſtemi; ma li turba, e li grava di contraſti, e di riſſe, li traſporta innanzi ai tribunali, e li coſtringe ad affrontarſi coll'ignoranza, e col pregiudizio, incontro a cui rado è che la ragione non perda ſue prove, e a combattere la privata cupidigia, che ſembra quaſi certa di prevaler ſempre alla pubblica utilità.

Leonardo Ximenes non pur valſe a ſoſtenere per ben trent' anni tanto diſagio, e a compiere tanti uffizj con maraviglioſa attività; ma eziandio inteſe all'Aſtronomia ed alle meteore per modo, che parea che ad un mortale, tanto in queſto genere adoperandoſi, non foſſe lecito d'occuparſi d'altro. Le Efemeridi dei movimenti celeſti in lunga, e penoſa opera lo tennero, e le oſſervazioni, ch'ei fece e del Sole, e delle ſtelle, e de' pianeti, e de' fenomeni dell'aere, altamente lo affaccendavano. Nè fu già di quelli, che in ciò eſercitandoſi, poco ſervonſi della ragione, nè quaſi d'altro uſano, che degli occhi; ma s'adoperò ancora per inventar nuove teorie, e per ridurre a perfezione le antiche. Un *Alone*, che egli con ſomma diligenza guardò, lo moſſe a credere, che *Ugenio* non aveſſe aſſai ragionevolmente di quelle apparenze l'origine dichiarata. A miſurare prontamente lo ſpazio, di cui le Aurore Boreali dalla terra s'allontanano, migliorò un celebre problema di *Mayer*. Riformò, ed emendò accortamen-

te gli argomenti, per cui ſolevano gli aſtronomi delle età paſſate calcolare le paralaſſi della Luna. Rivolſe l'animo alle forze della Luna, e del Sole, che la maréa commovono, e gonfiano, nè parvero affatto inutili queſte ſue cure a que' medeſimi, che pur ſi rammentavano di *Eulero*, di *Maclaurino*, e di *Bernulli*. Ma queſte induſtrioſe occupazioni, quantunque di lode non indegne, tralaſcio ben volentieri; le magnificherei con parole, quando mi foſſi propoſto di ragionare d' altr' uomo. Nei funerali di quei Conſoli, che loro ſoldateſche impiegarono nel correre i monti della Liguria, nel combattere alcuni maſnadieri, e nell' eſpugnare qualche infelice caſtello, avranno, cred' io, gli oratori minutamente annoverato ogni vinto nemico, ed ogni caſolare diſtrutto; ma ſe l' invidia non impedì che foſſe onorato con giuſta lode il ſepolcro di *Scipione*, dovette ſenza più l'oratore accennar *Zama*, ed *Annibale*, nè curar d'altro. E certo non di breve ſpazio allargò il noſtro *Leonardo* i confini dell'Aſtronomia, quando ſottilmente definì la ſecolare diminuzione di quell' angolo, che fa l'equatore coll' ecclittica. Un gnomone altiſſimo, che *Paolo Toſcanelli* ſegnò nella Metropolitana di Firenze, era non ſo come caduto dalla memoria degli uomini. Niuno ponea mente ad un marmo, che ſerbava effigiata l' imagine, in cui ſe ſteſſo ritraſſe il Sole nell' eſtivale ſolſtizio dell' anno mille cinquecento dieci. Queſto rariſſimo avanzo d' antica dottrina fuggì, non che gli ſguardi altrui, quelli del *Galileo*, cui ſembrava che l' Aſtronomia medeſima ricercaſſe, bramoſa di paleſarſi a lui, e di ſvelarli i più aſcoſi ſegreti del Sole, e delle ſtelle. Ben ſe ne avvide lo *Ximenes*, e in ardentiſſimo deſiderio ſi acceſe di reſtaurare, e d' aggrandire queſto monumento nobiliſſimo d' Aſtronomia; ma le grandi opere non vengono a fine giammai, ove non le ſoſtenga, e non le invigoriſca la protezion dei Sovrani: quindi ne parlò con *Emanuele* di *Richecourt*, che allora governava la Toſcana: ne

ſcriveſſe all' Imperadore *Franceſco*, e lo invaghiſſe di un lavoro utile ai buoni ſtudj, decoroſo a Firenze, a lui glorioſiſſimo; niuna coſa eſſere così grande, ch' egli non doveſſe promettersi dall' ottima indole di quel Principe: perciò vivrebbe mai ſempre il nome di *Richecourt* nella lunghezza del tempo avvenire: ſi rammentaſſe di *Mecenate*, e di *Colbert*. Indi comunicò il ſuo ritrovamento al *Condamine*, che viaggiava per Italia a que' dì: queſti agevolmente concorſe in una ſteſſa brama, ne tenne preſſo il Governatore lungo diſcorſo, e l'animo di lui o dubbio dell' intrapreſa raſſicurò, o lento nel compierla ſollecitò, e punſe. Fu riparato, ed amplificato l'antico gnomone; s' aperſe largo campo allo *Ximenes* di nobilitare l'Aſtronomia con pregevoliſſime oſſervazioni. Tra le quali, ſiccome dicemmo, quelle ſingolarmente ſono degne della memoria de' poſteri, che ne inſegnano la ſecolare vicenda, a cui ſoggiace l'obliquità dell' ecclittica. Niuna coſa per avventura era tanto neceſſaria a ſaperſi, quanto la variazione di un cerchio, a cui e pianeti, e comete, e ſtelle ſi riferiſcono, e niuna tanto occulta, e tanto confuſamente impacciata di ſvariate opinioni. Non pur gli antichi Aſtronomi, che voleano perſuaderne della immutabilità de' cieli, ma *Gaſſendo*, e *Riccioli*, e *Monnier*, la inclinazione dell' ecclittica all' equatore ferma credettero, e permanente. *Lovville*, *Eulero*, la *Caille*, la *Lande*, e più altri non dubitavano che quell' angolo in proceſſo di tempo non ſi cambiaſſe; ma quando poſcia ſi davano a miſurare la grandezza di una tale mutazione, mal convenivano i pareri, e naſcea grave, ed infinita diſcordia. Il noſtro Matematico dichiarò, che l' angolo dell' ecclittica per ciaſcun ſecolo di trentaquattro minuti ſecondi menomava: ebbe contraddittori; ma queſti rinnovandogli i cimenti, non altro fecero, che moltiplicargli i trionfi. E sì veramente quali erano l' arme, onde s' avviſaſſero gli Aſtronomi di tenerli fronte, e di combatterlo? Forſe le oſ-

ſervazioni loro? Ma queſte avean duopo d'eſſere afforzate da altre più antiche, delle quali eſſi erano sforniti. Niun *Paolo Toſcanelli* s'era, due ſecoli prima, adoperato a loro vantaggio. Senza che i loro ſtrumenti ſembravano grandi a chi non avea contezza del *Gnomone* Fiorentino, che i tre ampliſſimi di Parigi, di Bologna, e di Roma, quando pur inſieme s'uniſſero, ſorpaſſava d'aſſai. O dovea forſe il noſtro *Leonardo* temer quegli Aſtronomi, che null'altro gli contrapponevano, fuorchè ipoteſi, e teorie? Ma ella è proprio una ſconvenevolezza l'accomodare la natura delle coſe ai ſiſtemi: queſti da quella debbono prender forma, e qualità. Nè riputerò falſe le oſſervazioni diligentiſſime, che l'obliquità dell'ecclittica ne paleſarono, perchè forſe non ſi confanno coll'opinione, che della denſità di Venere ebbero *Eulero*, e la *Grange*. Onoro, ſiccome debbo, non che i ritrovamenti veriſſimi, le immaginazioni ingegnoſe di queſti uomini ſingolari, e degniſſime le credo di commendazione, e di plauſo; ma eglino colle ipoteſi loro ſupplir vollero alle verità, che pienamente non conoſcevano, non oſtare a quelle, che l'eſperienza aveſſe fatte paleſi. E ſo bene, che *Nevvton* bilanciò la maſſa, e calcolò la ſpeſſezza di quei pianeti, intorno a cui alcun aſtro minore ſi rivolga, e formò un ſiſtema, che parve indubitato, e perciò quaſi non ebbe ſembianza di ſiſtema. Ma ſe un pianeta ſia privo dell'onore di aver ſeguaci; è forza che gli Aſtronomi voglioſi pur di conoſcere, quanto ſia fitta la ſoſtanza di lui, inciampino, e s'avvolgano in ſuppoſizioni incerte, e fallaci. Or la Venere, che gli Aſtronomi contemplano, è ben altra da quella, che fingono i Poeti. Queſta non mai in parte alcuna ſi ſpazia, ſenza che le grazie l'accompagnino, e i Dei la ſeguano, e le facciano corteggio gli Amori; quella s'aggira pel cielo ſcompagnata, e ſola, e invano di un pianeta, che le teneſſe dietro, e inſieme ſi moveſſe con lei, ſoſpetto ebbero *Caſſini*, e gli Acca-

demici di Limoſin. Il perchè ben giuſtamente ſtringea i ſuoi avverſarj lo *Ximenes*: non ordiſſero favole, nè una fittizia denſità di Venere alle ſue oſſervazioni opponeſſero; ma più toſto da queſte argomentaſſero, quanto ſtrettamente le parti di quel pianeta ſi teneſſero inſieme. Benchè non di ciò ſolo quelle oſſervazioni ne ammaeſtrano, ma la via ne aprono a miſurare più ſquiſitamente, che prima non ſi facea, quella forza mirabile, che ſpinge la Luna a rotare intorno alla Terra, e i fondamenti aſſodano, e fiancheggiano della Neutoniana aſtronomia. Così *Leonardo Ximenes* le ſue oſſervazioni difendendo, e il pregio moſtrandone, e tutta la ſcienza del cielo, coll' ajuto loro, accreſcendo, paſsò gli eſtremi anni ſuoi, e nobiliſſimi frutti di queſte ſue meditazioni alla Società Italiana offerì, che ben era degna di un dono così preclaro. Morì nel quarto giorno di Maggio dell' anno mille ſettecento ottantaſei. Ad utilità de' Profeſſori, che l' Idraulica, e l' Aſtronomia in Firenze ſpiegaſſero, la ſua ricca biblioteca, e i ſuoi ordigni aſtronomici, e buona parte del ſuo non iſcarſo patrimonio laſciò. Viſſe anni ſeſſantanove, età, se il corſo della natura ſi riguardi, mezzanamente lunga, ſe il deſiderio de' buoni, aſſai breve, ſe le coſe fatte, lunghiſſima.

Benchè nello ſtudio delle ſcienze matematiche foſſe continuo, pur ſi compiacque d' altre nobili facoltà, e rivolſe loro non radamente parte delle ſue cure. Coltivò con gran ſenno le ſcienze ſacre, non per oſtentazione d' ingegno, ma per conforto di ſua religione; molte aſtruſità, e ſottigliezze teologiche, eccitatrici di lunghiſſime gare, inutili, o piuttoſto nocevoli al Criſtianeſimo abborrì. Prendea ſingolare diletto della storia, perchè queſta, come ſolea dire, grandi coſe grandemente raccontaſſe. Quindi tenea conto di *Livio*, e moltiſſimi luoghi della terza Decade, parola per parola, piacendogli, ridicea: que' tanti ammaſſi di nomi oſcuri, e

di fatti frivoli, e d'inezie, e di cavilli genealogici, a cui si è dato per alcuni il nome di Storia, non senza qualche asprezza condannò, chiamandoli vani trastulli d'una femminile curiosità. Non rassomigliò punto quello spiacevole Geometra che fece besse e strazio dell' Ifigenia di *Racine*, nulla di pregevole, a suo giudizio, essendo in un libro, in cui nulla era dimostrato rigorosamente; anzi ebbe un perfetto, e fino discernimento in ogni maniera di Poesia, e scrisse versi latini egli stesso, e il più delle volte con urbanità e grazia. Niuno, che abbia letto i libri di lui, gli negherà lode di eloquenza, considerando e la copia, e la chiarezza, e la bontà di stile, che gli adornano; nè i maestri stessi di Rettorica negli scritti dogmatici sogliono desiderare più oltre. Ma ne' suoi ragionamenti apparivano, quasi per poco, tutte le virtù che sono proprie degli Oratori. Il suo dire quando vezzoso e piacevole, quando veemente, e gagliardo, sempre ornato, e splendido, e sparso di sentenze grandi e luminose intratteneva soavemente, e signoreggiava gli animi degli ascoltanti. Però nelle stesse familiari adunanze, e nei conviti niuno era, che volentieri non si tacesse per udir lui; niuno, che alle sue parole porgendo orecchio non se ne tenesse per soddisfatto. Ebbe molti amici. Non li mancò il favore dei Principi, che regnarono in Toscana. L' Imperadore *Francesco* gli concesse una cattedra nella Università di Firenze, e il titolo di suo Geografo; e premj ed onori gli accrebbe *Pietro Leopoldo*, che nel dominio di quella provincia all' Augusto suo padre succedendo, rinnovò presso noi gli esempj già disusati di *Marcaurelio*, e di *Trajano*. Più, e più stranieri per dignità, e per dottrina ragguardevoli l' ebber caro, ed in pregio; e gli Accademici di Parigi, e quelli di Pietroburgo lo ascrissero nel loro numero. L' invidia non l'obbliò; nè il poteva. Quando Erse divien graziosa agli Dei, v'ha sempre un' Aglauro che se ne duole. Sen-

za che le arti, che pur vagliono alcun poco ad ammanſar quella fiera, o ad infralirne almeno la crudeltà, o il noſtro Matematico non ſeppe, o ſapendole rifiutò. L' animo di lui nè altiero, nè orgoglioſo, ma ſchietto, e nobile non poteva con accorte luſinghe, o con inganni piacevoli, o con abjezioni ſervili, quaſi con opportuno velame, temperare la grandezza della ſua luce, perchè queſta ſofferta foſſe dal livido ſguardo de' ſuoi rivali. Nè diſſimulò pure abbaſtanza il ſuo deſiderio di gloria, nè credette che queſta paſſione foſſe poi tanto rea, che doveſſe, in compagnia del vizio, nel ſilenzio naſconderſi, e nella oſcurità. Si vergognino coloro di sè medeſimi, che lodi eſigono, ed onori contro ragione, poichè non cercano di méritarli; ma qual colpa è nell' aſpirare ad un premio nobiliſſimo, quando è giuſta coſa, e ragionevole l' ottenerlo? Che altro ha in ciò, ſe non generoſità, e grandezza d' animo? La quale chi toglieſſe agli uomini, non li ſarebbe egli e molli, e miſeri di cuore, e pigri, o piuttoſto ritroſi alla virtù? La gloria oggetto di tanti voti, e di tante ſperanze, e di fatiche sì lunghe, e sì gravi, è pur l'unico riparo, e conforto di noſtra debole mortalità. Eſſa ne incende gli animi, ne infiamma le menti di penſieri altiſſimi, di oneſtiſſimi deſiderj; a lei rivolgono ogni loro cura Capitani, e Conquiſtatori, lei riguardano, lei ſeguono Legislatori, e Politici; da lei prendono conſiglio, e norma e Letterati, ed Artefici. Non più degli altri *Leonardo Ximenes* la ſoſpirò; ma non ſeppe, come tant' altri, all' anſietà di conſeguirla l' affettazione congiungere di ſprezzarla. Il che niuno certamente attribuirà a malvagità, nè a reato; alcuni eziandio vorranno aſcrivere a candidezza e verità; i più faſtidioſi chiameranno difetto, e imperfezione; ma quando fu in alcun tempo, od è per eſſere negli uomini una interiſſima, e per conſeguenza più che umana virtù? Il ſapiente degli Stoici è in così alta parte locato, che appena è con-

ceduto ai Metafiſici di vagheggiarlo. Ma nel mondo fiſico ſiccome nè robuſtezza, nè altra qualità del corpo fu mai tanto grande, che non laſciaſſe luogo al deſiderio di una maggiore, così nè pure la virtù; nè queſta ſomma, e divina perfezione credettero i Poeti veriſimile nei figliuoli medeſimi degli Dei. Tutto che ſia forte, e magnanimo, e valoroſo, e pio Enea: pur teme talvolta nei pericoli, e ſi duole, e d' amoroſa fiamma s' accende; e Achille fervido, e impetuoſo più che una ſevera Filoſofia non vorrebbe, odio prende, e ſi ſdegna.

MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA

OSSERVAZIONI METEOROLOGICHE

FATTE IN VERONA NEGLI ANNI 1788, 1789

Dal Sig. Antonio Cagnoli.

NElle Tabelle dopo il preſente breve Diſcorſo ſtan compendiate da circa 9000 oſſervazioni meteorologiche. Sono ſtate fatte regolarmente tre volte al giorno: generalmente parlando, la prima al levar del Sole, che è il momento del maggior freddo; l' altra ad una o due ore dopo il mezzodì nel punto del maggior calore; e la terza due ore avanti mezzanotte.

Il termometro di cui mi ſervo è a mercurio: lo tengo eſpoſto a tramontana in altezza di 69 piedi dal ſuolo: e l' intervallo tra il punto del ghiaccio fondenteſi e quello dell' acqua bollente, preſa mentre il barometro ſegnava pollici 28, vi è ſtato diviſo in 80 parti o gradi.

La notizia delle oſſervazioni meteorologiche appartenen-

do ad ogni persona quantunque ignara de' simboli algebraici, mi conviene avvertire che il segno —, che ho usato nelle Tabelle, significa abbassamento del mercurio sotto il punto della congelazione; e che i numeri preceduti dal segno +, o non preceduti da alcun segno, additano all' incontro i gradi d' altezza del mercurio sopra il punto della congelazione.

L' altezza media del termometro, tolta dal biennio, va a gradi $10\frac{1}{4}$; quantità che si deve creder peccante per eccesso, in grazia del lungo estivo ardore, che abbiam sofferto nel 1788. Tra l' equinozio di Autunno e quello di Primavera l' altezza media è dedotta dalle due prime osservazioni d' ogni giorno soltanto, esclusa la terza. Negli altri sei mesi, secondo accadeva ritardo nella prima osservazione per una e due ore dopo il levar del Sole, prendevo in sussidio la terza, onde avere il grado medio più esattamente.

L' altezza del mercurio nel barometro è espressa in pollici, linee, e centesime di linea del piede Parigino. Il mio barometro è a livello costante, diviso in quarti di linea, che vengono suddivisi dal nonio in venticinque parti. E' istromento di finissima costruzione del Sig. *Mégnié*: ed ha tutte le facilità per essere trasportato ed usato con ogni comodo e sicurezza.

L' altezza media del barometro data dal biennio è di 27 pollici, 9 linee, 94 centesime; che si scrive 27 9, 94. Ridotta con accurate esperienze a livello dell' Adige in acqua mezzana, diviene 27 11, 35; posta l' altezza media del termometro $10\frac{1}{4}$ giusta l' osservato finora. L' acqua mezzana nel nostro Fiume, cioè quella che meglio serve alla navigazione, batte, al dir di questi naviganti, all' incirca sul segno di piedi 4 nella pietra che vedesi a S. Salvar Corte Regia. Allora la sommità del muro di parapetto alle Beccarie d' Isolo è alta piedi parigini $10\frac{1}{2}$ sul pelo dell' acqua. Ho prescelto questo muro e questo sito, per trasportare a livello dell' Adige le osservazioni barometriche fatte nella mia Specola; posciachè il muro è solidissimo e può servir di confronto per secoli, e il sito è appresso poco nel mezzo della lunghezza del canale rinchiuso dalla Città.

Come poi l' altezza del barometro a livello del mare, adottata anche dal chiarissimo *Abate Oriani* (Tom. II. degli

Atti dell'illuſtre Società patriotica di Milano), è di 28 2, 23 ; così l' altezza del pelo dell' Adige nell' accennato ſito dal livello del mare , tenendo conto della dilatazione prodotta dal calore con le regole del Sig. *de Luc* , verrebbe a ſtare in piedi 220. Ma queſta determinazione non può eſſer molto ſicura (fatta aſtrazione dalle diſcordanze poſſibili ne' barometri), finchè non ſia ricavata da diverſi anni di oſſervazioni l' altezza media del barometro in Verona.

Debbo avvertire, che le mie oſſervazioni barometriche ſono tutte preſe , non dall' apice della colonna mercuriale , ma dagli orli della ſommità . So che molti Fiſici preſcrivono il contrario: ma come la ſuperficie del mercurio, per l' adeſione al vetro, ſi fa conveſſa quando ſi alza, e concava quando ſi abbaſſa ; così mirando a conſeguire una compenſazione mi ſono attenuto ai labbri.

Il numero delle volte che fu oſſervato ſpirare ogni vento è come ſegue.

	L.	*M.*	*S.*	*P.*	*Gr.*	*T.*	*O.*	*G.*
1788	385	334	268	262	203	168	144	135
1789	380	277	241	251	298	173	117	133

Le lettere iniziali dei venti ſignificano: *L.* Levante, *M.* Maeſtro, *S.* Scirocco, *P.* Ponente, *Gr.* Greco, *T.* Tramontana, *O.* Oſtro, *G.* Garbino.

Il numero de' giorni ſereni, varj, nuvoloſi e di pioggia fa duopo che s'intendaſi nel modo ſeguente . Tre eſſendo le oſſervazioni fatte ogni giorno, biſogna dunque il numero di tre oſſervazioni per coſtituire un giorno. Per eſempio l' eſſer notato nel mio regiſtro tre volte pioggia coſtituiſce un giorno di pioggia , ancorchè queſte tre annotazioni ſiano forſe ſtate fatte in due od in tre giorni diverſi . Però li giorni, ne' quali ha piovuto o poco o molto , ſaranno ſtati ſenza dubbio aſſai più di 60 nel corſo dell' anno 1788; ma il 60 vuol dire che ſonovi nel mio libro 180 miſure preſe di pioggia caduta. Allo ſteſſo modo s' intenda il numero de' giorni ſereni, varj e nuvoloſi : ma non così per quelli di nebbia , mentre ſono veramente 16 nel 1788, e 20 nel 1789 li giorni ne' quali v' è ſtato della nebbia.

Anche l' altezza della pioggia è eſpreſſa in pollici, linee,

e centesime di linea. Si deve però avvertire, ch' è stata raccolta in sito elevato piedi 71 dal suolo: poichè siccome le goccie in cadendo via via s' ingrossano sempre più, così la quantità della pioggia caduta sul terreno è da giudicarsi alquanto maggiore.

Si osservi che il mese d' Aprile è quello, nel quale è piovuto meno, così in un anno come nell' altro. Il mese di Luglio è stato il più abbondante di pioggia nel 1788, e quello di Ottobre nel 1789. Ciò non ostante la campagna nel primo anno ha patito molto per siccità, perchè la pioggia non fu generale ed è venuta in pochi tratti dirottamente.

Benchè il numero de' temporali del 1788 sia doppio di quello del 1789, le rovine della grandine sono state estremamente maggiori nell' ultimo. La più spaventosa nel 1788 fu quella che cadde nel dopo pranzo del dì 9 di Maggio per lo spazio di ben venti minuti: ma ancorchè folta e grossa recò pochissimi danni, perchè non accompagnata da vento, e ristretta presso che solamente dentro il circuito della Città. All' incontro nel 1789 quella dei 29 di Giugno seminò la desolazione nella massima parte del nostro Territorio.

Non essendovi stato luogo nelle Tabelle per la neve, riferisco qui, che il Novembre 1788 ha avuto 4 giorni, e 3 il Decembre, ne' quali è caduto neve abbondantemente, in altezza di pollici 15 $\frac{1}{2}$ in tutto. L' anno 1789 ebbe poi 3 giorni di neve in Gennajo in altezza di sei pollici; 3 in Marzo, ed uno in Aprile, in poca quantità.

L' anno 1788 sarà memorabile, per li contrarj eccessi del caldo e del freddo. Il suo inverno proprio è veramente stato mitissimo, non essendosi abbassato il mercurio nel termometro, se non che a gradi 4 $\frac{1}{2}$ sotto la congelazione; nè vi fu stilla di neve. Ma il caldo è poi stato insopportabile, specialmente per la sua lunga pertinacia. Il maggiore alzamento del mercurio nel termometro non passò veramente i gradi 28 $\frac{1}{2}$; però si tenne da 24 Maggio a 28 Luglio, salvo due giorni, sempre di sopra dei 20 gradi sulle due ore circa dopo il mezzodì. La lunghezza ed intensità del caldo appariscono pure dal calor medio, o sia temperato, desunto dalla somma delle osservazioni di tutto l' anno, e che oltrepassa i gradi 11. Finalmente l' anno andò a termine con acutissimo straor-

dinario freddo, che incominciò li 14 Dicembre, e durò fino ai 12 del susseguente Gennajo, essendosi abbassato il termometro nella notte penultima dell'anno fino a 12 gradi sotto la congelazione. Il Sig. *Flaugergues* di *Viviers* fa vedere (*Journal des Sçavans pour le mois de Mai de* 1789), che questo freddo sta del pari con quello degli anni 1709, 1716, almeno in Parigi. Riducendo ad uno stesso modulo li termometri antichi a spirito di vino con li moderni a mercurio, trova la scala che segue: 1709; 17°, 57: 1716; 17°, 79: 1788; 17°, 65.

Avanti il plenilunio dei 5 d'Agosto 1789 si son qui sentite due lievi scosse di terremoto: cioè il dì 3 a ore 10 della sera, e il dì 4 a ore 5; mentre il vento spirava da Scirocco-Levante, il mercurio nel barometro stava tra li 28 pollici ed una linea di sopra, nella mia Specola, il termometro segnava 19 gradi, ed il cielo era sereno. La prima scossa fece fermare il mio pendolo.

Nel mese di Ottobre 1789, che fu piovosissimo, l'Adige allagò buona parte della Città, e la massima piena ne' dì 11 e 12 superò di piedi 1 pollici 11 la sommità del muro di parapetto delle Beccarie d'Isolo, che sopra ho preso per punto di comparazione, e per conseguenza si alzò piedi 12 $\frac{1}{2}$ circa dal suo livello mezzano. La proporzione del piede di Parigi a quello di Verona è come 20 a 21 esattamente.

1788 Mesi.	Altezze del Termometro. Minima.	Media.	Massima.	Altezze del Barometro. Minima.	Media.	Massima.	Venti dominanti.
GENNAJO.	— 4 1/3	+ 2 1/5	8	27 5,11	27 10,54	28 3,42	M. L.
FEBBRAJO.	— 3 1/2	4 3/8	12	2,06	8,89	2,86	L. S. M.
MARZO.	+ 1	9 1/2	16 1/4	4,50	7,61	0,84	L.
APRILE.	1	13	24 1/3	5,37	10,92	3,01	L.
MAGGIO.	7 1/2	15 1/4	26 2/3	8,50	11,32	1,82	L.
GIUGNO.	12	18 1/5	28 1/2	7,56	9,91	0,35	M.
LUGLIO.	11 1/4	21	28 1/2	9,50	10,84	0,79	L. M. Gr.
AGOSTO.	10 1/2	18 1/3	25 1/2	7,38	10,47	1,02	Gr. L.
SETTEMBRE.	8 1/2	16 1/2	24	7,81	10,93	0,98	M. P. L.
OTTOBRE.	2 1/2	11	21	6,72	11,14	3,25	L. S.
NOVEMBRE.	— 3 1/2	3 3/4	13	8,61	11,47	4,19	M. P.
DECEMBRE.	—12	— 0 1/8	9	1,45	6,57	27 11,51	M. P.
ANNO.	—12	11 1/6	28 1/2	27 1,45	27 10,05	28 4,19	L. M.

1788 Mesi.	Giorni sereni.	Giorni varj.	Giorni nuvolosi.	Giorni di pioggia.	Giorni di nebbia.	Quantità della pioggia	Numero de' temporali.
GENNAJO.	13	4	8	4	3	POL. 3 4,46	
FEBBRAJO.	7	4	11	6	7	3 10,20	
MARZO.	7	8	12	9		2 6,26	
APRILE.	15	10	4	2		0 6,11	2
MAGGIO.	9	14	7	5		2 8,20	3
GIUGNO.	9	14	5	7		3 5,23	1
LUGLIO.	14	13	2	6		6 2,48	4
AGOSTO.	13	15	1	3		2 5,10	1
SETTEMBRE.	13	9	6	5		3 11,62	1
OTTOBRE.	15	9	4	1		0 6,50	
NOVEMBRE.	6	6	9	6	3	2 11,97	
DECEMBRE.	7	5	12	6	3	3 5,05	
ANNO.	128	111	81	60	16	35 11,18	12

1789 Mesi.	Altezze del Termometro Minima.	Media.	Massima.	Altezze del Barometro. Minima.	Media.	Massima.	Venti dominanti
GENNAJO.	$-11\frac{1}{2}$	0	$8\frac{1}{2}$	27 4,08	27 10,63	28 2,94	M. P.
FEBBRAJO.	-2	$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	26 10,07	8,58	2,25	M. S. P.
MARZO.	$-2\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$	$13\frac{1}{2}$	27 1,94	5,98	27 9,42	L.
APRILE.	-1	13	21	3,72	9,57	28 0,16	L.
MAGGIO.	$+8\frac{1}{2}$	$16\frac{2}{3}$	25	7,10	10,56	1,37	L. M. Gr.
GIUGNO.	9	$16\frac{1}{10}$	26	5,61	9,92	27 11,96	L.
LUGLIO.	$10\frac{1}{2}$	$19\frac{4}{5}$	$28\frac{1}{4}$	6,90	10,36	28 0,98	L.
AGOSTO.	8	18	28	7,42	10,63	1,42	L.
SETTEMBRE.	7	$15\frac{5}{6}$	$24\frac{1}{2}$	6,22	10,85	3,27	P.
OTTOBRE.	6	$11\frac{1}{10}$	21	3,54	9,34	2,70	M.
NOVEMBRE.	$-4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{5}$	12	2,73	8,75	2,78	L. Gr.
DECEMBRE.	-5	1	6	3,32	28 0,82	4,32	Gr. P.
ANNO.	$-11\frac{1}{2}$	$10\frac{3}{8}$	$28\frac{1}{4}$	26 10,07	27 9,83	28 4,32	L.

1789 Mesi.	Giorni sereni.	Giorni varj.	Giorni nuvolosi.	Giorni di pioggia.	Giorni di nebbia.	Quantità della pioggia.	Numero de' temporali.
GENNAJO.	5	3	13	7	11	POL. 2 3,78	
FEBBRAJO.	9	8	8	4		1 9,49	
MARZO.	3	9	15	9		2 9,01	
APRILE.	10	9	11	4		0 6,10	1
MAGGIO.	11	14	4	4		3 6,00	2
GIUGNO.	12	8	9	6		2 0,74	3
LUGLIO.	15	9	5	3		1 8,56	
AGOSTO.	10	11	9	5		2 8,40	
SETTEMBRE.	10	13	5	7		2 8,39	
OTTOBRE.	6	10	8	12	1	6 2,68	
NOVEMBRE.	10	10	8	7		3 10,54	
DECEMBRE.	14	2	6	5	8	0 10,65	
ANNO.	115	106	101	73	20	31 0,34	6

APPENDICE

ALLA MEMORIA INTORNO

LA

DOLCIFICAZIONE DELL' ACQUA DEL MARE

INSERITA NEL III. VOLUME DELLA SOCIETA' ITALIANA.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

DOpo la mia Memoria pubblicata nel III. Volume della Società Italiana del 1786 intorno all' argomento della dolcificazione dell' acqua del mare, in cui eſpoſi il metodo ſicuro di purificare e render bevibile l' acqua marina; molte coſe ſe ne ſono dette oltramonte e ſcritte, ma confuſamente, e quaſi per relazione; e come ſe in una parte dell' Europa non tanto ſconoſciuta, com' è l' Italia, non ne foſſe ſtata fatta appoſitamente ampliſſima trattazione. In vece di rifare le ſperienze, di ben intendere il ſempliciſſimo artifizio, che convien uſare perchè l' acqua nello ſgelarſi non riprenda in diſſoluzione le ſoſtanze ſaline precipitate nella congelazione, e di avvertire, che per lo più non ſi fa compiutamente la ſeparazione nè in uno, nè in due agghiacciamenti, e che biſogna tor via il primo gelo dall' acqua rimaſta liquida e carica de' ſedimenti, farlo ſgelare, e rigelare di nuovo coll' artifizio di prima, perchè precipiti altra parte di ſoſtanze straniere rimaſte nel primo gelo, e poi di bel nuovo tor via queſto ſecondo gelo dall' acqua non rappreſa, liquefarlo nuovamente e rigelarlo per la terza volta, e così fino all' intera purificazione: in vece, dico, di ſperimentare e far tutto queſto, ſi queſtiona ſe alcuni ghiacci de' mari ſettentrionali trovati dolci, ſe quei del Sud riconoſciuti pur dolci ſieno ghiacci d' acqua fluviale, o marina; mentre il problema è deciſo fin dal 1786, e baſta leggere la Memoria ſopraccitata e rifare le ſperienze per accertarſene. Almeno il Sig. *Nairne* dotto

dotto Fisico di Londra mosso da simili discorsi passò al fatto; onde vo' qui trascrivere il suo procedimento, come sta esposto nel Giornale di Parigi n.° 74 di quest'anno 1789. Avendo preso in un vase dell'acqua di mare ,, *l' exposa au grand air dans un endroit où le Thermometre de Pharenheit etoit à 15° (à peu près 7½ de Reaumur au dessous de zero). Le lendemain la plus grande partie de cette eau étoit changée en glace très dure; il posa ce glaçon à une chaleur d environ 10° de Reaumur. Au but de quelques heures le glaçon. qui etoit reduit à 3½ pouces de longueur sur deux de diametre fut lavé dans un seau d eau. et placé ensuite sur un tamis pour en separer toute l' eau dans laquelle il avoit eté lavé. Cette glace ainsi preparee fut mise ensuite dans un bassin. & exposee à une chaleur très douce; 9 beures après la glace etant toute fondue, l'eau qu' on obtint se trouva parfaitement douce.* ,,

La natura da per sè con la spontanea congelazione non può subito dolcificare l'acqua marina, perchè il primo agghiacciamento non precipita nè men due terze parti de' sali ch' ella contiene (Veggasi la mia Mem. Vol. III. della Società Italiana pag. 389 390). La onde se i lastroni, e le isole di ghiaccio natanti ne' mari settentrionali, e australi sono perfettamente e rigorosamente dolci, non appartengono certamente all' acqua marina. I primi sono verisimilmente acque fluviali congelate, e trasportate in alto mare dalle correnti; e le isole non sembrano essere che nevi sopra nevi stivate a grandi altezze, ed agghiacciate. La neve cadente si ammonticchia sopra una grande quantità di lastroni ondulanti pel mare, lega e commette i più prossimi, e fa di loro il primo strato fondamentale della fabbrica sommergendoli a poco a poco profondamente sott' acqua. E vero che anche dopo la prima congelazione, il ghiaccio dell acqua marina strutto somministra un' acqua assai limpida, e meno disgustosa che non è in istato naturale; ma non è assolutamente dolce, come parve di trovarla al Sig. *Nairne*. E bene sta, che una parte solamente dell' acqua marina da lui adoperata si agghiacciasse, sicchè potè farsi precipitazione nel rimanente dell' acqua; altrimenti se tutta si fosse gelata, e poi tutta sgelata, sarebbe tornata nello stato di prima.

Se la cosa non fosse importantissima, mi sarei contentato

di aver fatto quel paſſo, che può vederſi nella Memoria mentovata, e avrei atteſo in ſilenzio la tarda ma ſicura giuſtizia che fa il Pubblico agli uomini, che ſtudiano di meritarla. Ma non parendomi infruttuoſo il promuovere una tale ricerca anche con altri ſperimenti, onde confermare ſempre più ciò che ho detto alla pag. 385 intorno all' agghiacciarſi dell' acqua, e il detto alla pag. 386, che per vie diametralmenmente oppoſte viene a capo de' medeſimi effetti la natura, moſtrando il fatto, che la perfetta criſtallizzazione, e la tranquilla evaporazione naturale dell' acqua ſono patentemente due capitali operazioni eſtreme, le quali convengono inſieme nel diſimpegnare e liberare l' acqua da principj ſtranieri, ravvicinandola per oppoſti mezzi allo ſtato di acqua puriſſima, alle mie aggiugnerò due ſperienze fatte dal Sig. *Vincenzo Bozza* molto verſato nella Chimica, e noto pel raro muſeo d' Ictioliti ch' egli poſſiede. Prima però di eſporle ſia lecito di far paleſe il metodo ſempliciſſimo che or ſoglio tenere nelle reiterate congelazioni, perchè non cada ſotto la ſeconda che l' acqua ſola depurata ſotto la prima, e così ſucceſſivamente, gettando via di mano in mano i reſidui liquidi, ove ſono concentrate le poſature. Verſo il liquore in bocce di piccola bocca, riempiendone al più tre quarte parti della capacità. Otturo eſattamente con ſovero, od altro tale turacciolo, e ſeppelliſco la bocca, e due tre dita della boccia nella ſabbia, ſicchè reſti fuori col fondo in ſu la boccia col liquore. Se la congelazione deve farſi per freddo naturale, baſta eſporre all' aria libera la boccia in queſto ſtato; e ſe la congelazione deve eſſere artificiale, la ſabbia, e la boccia vanno meſſe in vaſe capace, ſicchè poſſa ſtivarſi intorno alla boccia ſopraſtante il ghiaccio naturale poſato ſu la ſuperficie della ſabbia. Fatto l' agghiacciamento, reſta ſempre l' acqua difeſa dalla ſabbia in iſtato di liquore, e però ſturata la boccia ſi faccia eſcire il medeſimo liquore, ritenendo la parte gelata. Queſta è la prima congelazione. Si faccia liquefare il gelo, e il nuovo liquore o nella ſteſſa, o in altra boccia ſi ſottometta alla ſeconda congelazione nel modo di prima, e così ſucceſſivamente, ſinchè l' acqua ſi purifichi perfettamente. Così deve eſſere praticato coll' acqua del mare, ſe la ſi voglia dolcificare perfettamente, e ſi troverà, che nè due, nè tre con-

gelazioni non baſtano perchè a prova di tutti i reattivi non dia ella indizio di ſoſtanza ſtraniera in diſſoluzione. Ecco ora le mie nuove oſſervazioni, le quali comprovano il potere efficaciſſimo della congelazione nel purificare l'acqua.

I. Esperimento.

Eſſendo torbidiſſimo e terroſo l' Adige nel meſe di Luglio del 1788 oltre miſura, ripoſi in due boccie di queſt' acqua fiumale, e col metodo quì ſopra deſcritto ſottopoſi alla congelazione artifiziale col ghiaccio e ſal marino una di queſte due parti d'acqua, ſerbando l'altra per confronto. Quatt'ore circa dopo, eſtratta la boccia, feci uſcire la porzion d'acqua rimaſta liquida mettendola in un ampolla, e fatto liquefare il gelo, n' ebbi un' acqua, che non aveva ſapor terroſo al guſto, e ch' era chiara e limpida come l' acqua di fonte. Quella dell' ampolla era incomparabilmente più cupa e limaccioſa dell' altra ch'era ſerbata pel confronto, e queſta medeſima era niente men torbida di prima, ſcorgendoſi appena nel fondo della boccia un principio di ſpontanea poſatura.

II. Esperimento.

Verſai da un vaſe più grande in una boccia dell'acqua minerale di Recoaro da 30. ore circa attinta alla fonte. È noto e dalle mie proprie oſſervazioni pubblicate del 1780, e dalle anteriori degl' illuſtri Signori *Beccari*, *Arduino*, ed altri dotti Fiſici, che queſt' acqua è marziale, e che contiene in oltre della ſelenite, e della magneſia vitriolata. Eſpoſi pertanto all' artificiale agghiacciamento l' acqua di Recoaro. Il primo gelo tolſe all'acqua tutto il ſapore acidulo aſtrignente di cui è dotata. Ne ſottopoſi perciò una porzione all'evaporazione, e vedendo, che laſciava un pò di ſedimento ſul piattello, tornai a far gelare il rimanente, e con la ſeconda congelazione, gettando ſempre via la parte che reſtava liquida nelle bocce, ottenni un' acqua inſipida, ſcolorata, e ſimile all' acqua naturale. E per compiere l' eſperimento ne feci in piattelli di porcellana ſvaporare al ſole, e non ne reſtò che leggermente appannato il fondo. Decomponeſi dun-

que queſt' acqua minerale con due congelazioni, e ſi ſpoglia de' ſuoi principj, riducendoſi alla condizione dell' acqua comune.

III. ESPERIMENTO.

Nel verno rigidiſſimo del 1788 - 1789 eſſendo il Mercurio 12° ſotto il gelo nel Termometro di *Reaumur*, eſpoſi una ſera all' aria aperta in vaſe di terra verniciata dell' urina umana. La mattina trovai agghiacciato il liquore, e nel muovere il vaſe accorgendomi che la parte di ſotto era rimaſta liquida, riconobbi che l' eſperimento era a dovere. In fatto praticai un foro nella laſtra ſuperiore, ch' era groſſa poco men di un pollice, e fattone uſcire il liquore ſottopoſto, l' oſſervai roſſo cupo come il mattone peſtato, e denſo aſſaiſſimo. Eſtratto il gelo, lo lavai tre volte in acqua pura. Rotto poſcia, e meſſo in vaſe di vetro lo feci liquefare, e filtrare per doppia carta non collata. Non era che acqua ſchietta e limpida ſenza odore, ſenza ſapore, e non diſtinguevaſi dall' acqua di fonte che nell' eſſere men vivace, floſcia, e non tanto ſcorrevole.

IV. ESPERIMENTO.

Ma per ottenere un effetto ancor più dimoſtrativo di queſto s' è poſſibile, mi propoſi di purificare di quel liquoraccio giallo-nericcio ch' eſce da letamaj e ſtagna in qualche buca vicina, in cui l' urina animale s' accoppia a molte altre impurità. Siccome mi parve, che doveſſe difficilmente depurarſi, ne ho diſtribuito ben dieci libbre in vaſi ſeparati, e le ho tutte poſte a congelarſi di notte ſopra una loggia, che guarda tramontana, mentre nello ſteſſo verno infieriva il freddo tra 11. e 12. gradi ſotto al zero nel predetto Termometro. Se la ſommità del gelo non aveſſe preſo una tinta più languida che non vedevaſi nel reſtante, poco mi ſarei conſolato dell' eſito della prima congelazione. Eſtratte pertanto le parti gelate, e lavate nell' acqua pura, le feci ſgelare, e le tornai a diſtribuire liquide ne' medeſimi vaſi, gettati via i reſidui. Eſpoſte al freddo della notte ſuſſequente, cominciò eſ-

ſervarſi il mattino dopo eſſere men colorato il gelo, e l'acqua poi che ne venne, men foſca, e più ſcorrevole di prima. Liquefatto di bel nuovo il gelo, l'eſpoſi per la terza volta alla congelazione. N' ebbi un gelo biancaſtro-cupo. Fattolo ſgelare, e ripoſto in due vaſi ſeparati il liquore, tornai per la quarta volta ad eſporlo ſu la loggia al freddo della notte. Il mattino ſuſſeguente ebbi il piacere di eſtrarre due pezzi di gelo, i quali lavati, liquefatti, e filtrati ſomminiſtrarono un' acqua, che non ebbi nauſea di guſtare, e che per verità non trovai nauſeoſa. Ma contento di queſto non cercai di portarla alla maſſima purità, con nuove congelazioni, tanto più che me n'era rimaſta piccola quantità, e che vedeva patentemente, che l'avrei ridotta criſtallina come l'acqua di fonte. Ecco le due ſperienze del Sig. *Bozza*.

I. ESPERIMENTO.

Scioſſi, dic' egli, nell' acqua dell' argilla figulina di color grigio delle più tenaci, l'agitai per due giorni di quando in quando perchè le parti più fine ſi uniſſero ſempre più all' acqua, levando via di mano in mano quella parte, che trovava precipitata al fondo. L' acqua aveva preſo un color di paglia cupo, e un ſapore terroſo ſenſibiliſſimo. Verſata una porzione di queſt' acqua in vaſe di vetro, e turata la bocca del vaſe, ſotterrai ſotto la ſabbia con la bocca una parte anche del vaſe, e circondai di ghiaccio peſtato aſperſo di ſale marino la parte ſopraſtante, ſerbando l' altra porzione per confronto. Dopo alquante ore eſtratto e ſturato il vaſe raccolſi in altro vaſe ſeparato la parte rimaſta liquida, e feci liquefare il puro gelo dopo di averlo ben lavato coll' acqua comune. L' acqua che n'ottenni era quella preciſamente che aveva adoperato da principio, pura, criſtallina, inſipida, e l' altra raccolta ſeparatamente dal ghiaccio era incomparabilmente più foſca della porzione ſerbata da principio, ed aveva un ſapore terroſo ingratiſſimo, che quella non aveva.

II. ESPERIMENTO.

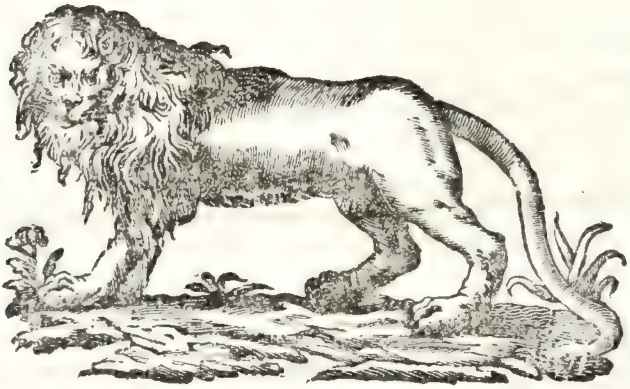
Acidulata, aggiugne egli, in un vaſe dell' acqua puriſſima con alquante gocce d' acido vitriuolico, v' infuſi buona doſe di tintura di tornaſole. Preſe l' acqua un vivaciſſimo color di rubino. La ſottopoſi alla congelazione artificiale ſeppellendo la bocca e parte del vaſe nella ſabbia, com' è detto qui ſopra, e dopo poche ore eſtratto il vaſe, laſciata uſcire la parte liquida, e lavato il gelo con acqua comune, ho riavuto l' acqua limpidiſſima di prima.

Non ſembra, che ſiaſi fatto molto caſo per l' addietro di queſto nobiliſſimo magiſtero di Natura, che come ho detto nella memoria ſopraccitata, era in qualche modo conoſciuto e familiare negli aceti concentrati, ne' vini diſacquati per congelazione, e in altri ſimili fenomeni. Ed è appunto dietro a queſte apparenze che mi ſon moſſo a cercare la dolcificazione dell' acqua marina, parendomi, come ho poi trovato vero, che nel criſtallizzarſi l' acqua, a guiſa de' ſali affettaſſe l' aggregazione delle proprie parti ſimilari, ed eſcludeſſe qualunque ſorta di principio ſtraniero.

Ma ſiccome la prima congelazione ordinariamente non toglie tutti all' acqua i principj ſtranieri che può ella contenere; e non era trovato ed accertato prima d'ora che biſogna procurare che una parte dell' acqua che ſi vuol depurare reſti liquida, e riceva le poſature dell' altra che ſi gela; e che per una ſeconda congelazione non biſogna adoperare che la ſola parte gelata fatta liquefare, e ſimilmente per una terza, e per tutte l' altre ſucceſſive congelazioni; così ſon nati degli equivoci, delle incertezze, e non ſi ſono poi ſpinte tant' oltre le ricerche come poteva farſi. Non è dunque la ſola dolcificazione dell' acqua marina, che poſſa ottenerſi con ripetuti agghiacciamenti praticati coll' artificio che ho detto e ridetto di tor via il ſolo gelo in ciaſcuna congelazione, abbandonando il reſtante; ma per queſte nuove ſperienze è luogo a preſumere, che poſſa non avervi acqua impura, e pregna di ſtranieri principj, la quale non poſſa affrontarſi, e ſcomporſi per queſta via. Altro però ſarà il caſo di dette ſoſtanze chimicamente diſciolte nell' acqua, ed altro ſe non

vi ſieno che meccanicamente ſoſpeſe. Nel ſecondo caſo una o due, e bene ſpeſſo una ſola congelazione baſterà per depurarla perfettamente. All'oppoſito nel caſo di combinazione, com' è per appunto nell' acque del mare, e in altre ſimili, ſarà ſempre meſtieri di reiterati agghiacciamenti per condurle ad una completa purificazione, replicando più volte la decompoſizione; giacchè ſembra dal fatto adoperare l' agghiacciamento a guiſa d' intermezzo che s' impadroniſce dell acqua, cioè del diſſolvente, onde le ſoſtanze reſtando abbandonate precipitano neceſſariamente. E queſto, in prova di quanto hanno oſſervato nelle loro eſperienze intorno al ghiaccio naturale gl' illuſtri Accademici del cimento, fa vedere che non è iſtantanea la congelazione, e che ha ella un ordine, una ſucceſſione di rappigliamenti, per cui è luogo all' eſtruſione de' principj ſtranieri nell' aggregarſi che fanno i principj ſimilari dell' acqua. L' argomento pertanto merita tutta l' attenzione de' Fiſici, ſe non erro. Oltre all' uſo, che può farſene ne' proceſſi chimici, e in molti biſogni della Fiſica, può non eſſere ultimo oggetto di utilità il rendere bevibili per queſto mezzo molte acque della terra rifiutate dagli uomini come inſalubri, che pur ſarebbero comodiſſime ed opportune per la vicinanza, come accade di molti laghi, ſtagni, e di non pochi fiumi. Raccogliendo nel verno il gelo ſuperficiale, che vi ſi forma, almeno lungo le ripe, e riponendolo in ciſterne, ed altre tali preparate conſerve acceſſibili all' aria libera, e al calore (non trattandoſi di formar ghiacciaje), ſomminiſtrarebbe liquefatto un' acqua molto più pura, ſcorrevole, e ſalubre, che non è per avventura in iſtato naturale. E forſe avrebbevi il prezzo dell' opera ſe queſt' acqua doveſſe per maggior purificazione congelarſi un' altra volta, purchè foſſero diſpoſte le coſe in modo che nella congelazione reſtaſſe liquida parte dell' acqua ſotto il ghiaccio, come ho ben fatto comprendere ſuperiormente. L' acqua procedente da queſto gelo liquefatto reſta priva di molt' aria, che conteneva ne' ſuoi interſtizj, ed è però che più floſcia, e men vivace appariſce che non era prima della congelazione. Al che può non difficilmente rimediarſi col batterla, e attignerne dalla conſerva, e riverſarla dall' alto nella medeſima, o in altra conſerva. E quì fa d' uopo che ſi rettifichi l' errore

manifesto preso su questo proposito a Pietroburgo da un Medico d'altronde rispettabile della Flotta Russa, il quale (se è vero ciò che ne dicono i publici fogli) ha proposto per uso degli uomini di mare di far conserva dell' acqua della Neva presa sotto il ghiaccio, e di farla di bel nuovo agghiacciare, serbando in cisterne l' acqua che resta liquida tra il nuovo ghiaccio e il fondo; precisamente al contrario di quello che va fatto. Una relazione vaga delle sperienze fatte in Italia l'ha indotto probabilmente in errore, non essendo per avventura giunto a quell' epoca all' Accademia Imperiale il III. Volume della nostra Società; del che basti, che siasi fatta menzione in questa Appendice.



MEMO-

MEMORIA

INTORNO

ALLE MAPPE, E ALLA SFERA DI RIDUZIONE PER L' ARTE NAVIGATORIA.

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

CAPITOLO PRIMO

Della Lossodromia, e delle Carte di Riduzione.

§. I.

L' Arte Navigatoria è quella parte della Scienza Navale, che insegna a viaggiar sul mare con un vascello, ben distinta dall'altre che la costruzione del vascello riguardano, e il maneggio del vascello nel navigare. Nel cammino obbliquo, ove non si tratta di correre nè secondo un meridiano, nè per un parallelo, il mezzo facile e più di tutti sicuro che s'è offerto agli uomini, è stato ed è quello di proceder sempre per un dato angolo di direzione da farsi co' meridiani successivi, cioè con la direzione de' meridiani mostrata dall' ago calamitato. La traccia pertanto del vascello sul mare segante sotto un angolo costante i meridiani terrestri è stata detta Lossodromia; e tutta l' arte del navigare versa intorno agli accidenti, e alle condizioni varie di questa linea, secondo ch' è supposta descritta sulla Terra sferica, o non isferica in conseguenza dello schiacciamento che il nostro globo mostra di avere ai poli. E come, per essere la figura fisica della Terra, indipendentemente da qualunque ipotesi, totalmente indeterminata, è stato preso il partito di ricorrere a curva di rivoluzione, e di adottare in ispecialità nel supposto della Terra non isferica, l' ellisse conica familiare, e non molto

discordante dal circolo; così altri hanno insegnato a dirigere la navigazione su la Terra sferica, come *Mercator*, *Wright*, *Wallis*, *Perks* ecc., ed altri sull' ellissoidica, come *Walz*, *Murdoch*, *Maupertuis* ecc. Il Sig. di *Caluso* sta pur tutt' ora occupato intorno alla navigazione sull' ellissoide, del che avremo frutto quanto prima nelle Memorie dell' Accademia Reale di Torino alla virtù proporzionato di questo illustre Geometra Italiano. E certamente mal conoscerebbe l' indole delle curve chi da sè non vedesse, che tutt' altra deve essere la linea lossodromica su la sfera da quella sull' ellissoide. Cade però qui in acconcio di fare una riflessione intorno a queste due ipotesi, che mi pare non ancora avvertita. Si faccia buono un divario sensibile dall' una all' altra ne' risultamenti per una navigazione, come lo vuole il *Maupertuis* (Mem. dell' Acc. R. di Parigi del 1744 pag. 466.). A me sembra che questo divario, quand' anche fosse maggiore, non accrediti punto nè poco la seconda sopra la prima senza fare una tacita supposizione, che la figura ellissoidica sia la vera, o almeno che la figura ellissoidica più della sferica somministri risultamenti prossimi al vero. Ma qual è la norma, quali i limiti del vero in questo argomento, se non si supponga noto ciò ch' è in questione? Qual potrebbe essere la navigazione lossodromica tanto accertata, con cui potessero le due ipotesi, come a pietra di paragone, confrontarsi? Ciò non deroga per alcun modo al merito di tante preziose ricerche, di tante misure di gradi, e di lunghezze del pendolo in diverse parti della Terra. Elle ci fanno vedere a chiare note, che intorno alla figura della Terra non è ancora permesso di prendere accertato e stabile partito; ed altro non permettono a' nostri studj fuorchè di appropriar per ora alla Terra quella figura, che soddisfaccia a tutte insieme più da vicino, cioè accomodata ai fatti attuali senza dar luogo a mentali divisamenti.

§. II.

Come però non dobbiamo stancarci giammai di porgere lumi ed ajuto all' arte nautica quant' è in potere di somministrarle la scienza, a cui deve ella tutti i suoi progressi; co-

sì, giacchè non v'è dimostrazione severa che obblighi più all' una che all' altra ipotesi, sarà sempre utile e prezioso il guidar l' arte sì nell' una che nell' altra; perchè col fatto, e con la giornaliera esperienza a quella maniera si appiglino i naviganti, che riuscirà loro più sicura e comoda di tutte. M' accingo dunque a due cose

I. A perfezionare le Carte di Riduzione.

II. A proporre per nuovo soccorso nell'arte navigatoria la riduzione della Sfera Artificiale.

E il fo in supposizione della Terra sferica tanto più sicuramente, che vi sono scortato dallo stesso Sig. *Bouguer*, il quale ad onta della parte, e dell'impegno che aveva di conchiudere tra' primi la sferoideità della Terra, non esitò di dire nel suo Trattato di Navigazione alla pag. 47 parlando della compressione ai poli: *On peut aussi se dispenser d' y avoir égard dans la marine, & continuer de considerer la Terre comme un globe parfait.*

§. III.

Le carte di riduzione non possono, nè debbono rigorosamente parlando appartenere alla Geografia, non essendo elle destinate a descriverci in piano le parti superficiali della Terra, *quatenus quantæ sunt*, ma unicamente a servire all' uso particolare della navigazione. Elle vanno considerate come costruzioni artificiali, come strumenti inventati per risolvere i quesiti del *Pilotaggio*, se così è permesso di denominare nella nostra lingua l' arte del Pilota. Sublime per verità è stato l' assunto de' Sigg. *Euler* (Atti dell'Acc. Imp. di Pietroburgo 1777), e la *Grange* (Mem. dell' Acc. R. di Berlino 1779) di prendere in un ampio senso la rappresentazione di una superficie sferica sopra di un piano esibendo sul piano i punti della sfera secondo qual si voglia legge; ond è facile da vedersi, che hanno potuto per tal via abbracciare sotto un certo aspetto anche le carte ridotte. Ma l'oggetto non cangia natura per questo. Lodevolissimo per altro è il lavoro di questi grandi Geometri, e l' occasione di disserrare intorno alle varie leggi colle quali possono immaginarsi fatte le rappresentazioni ha dato luogo tra mani sì potenti

a molte ſpeculazioni di Analiſi finiſſime. Sembra pertanto che la vera carta idrografica, o marina che voglia dirsi, in ſenſo geografico non altro debba rappreſentare che la Mappa di un' eſtenſione reale di mare meſſa in pianta con iſole, porti, littorali ecc. che vi ſono compreſi; in cui non entra eſſenzialmente la loſſodromia de' vaſcelli che vogliono percorrerla. Ma o ſieno per qualche verſo compreſe nella Geografia le carte di riduzione, o debbano eſſerne eſcluſe, come io credo, avuto riguardo all' uſo ſingolare cui ſono deſtinate; non è poſſibile di preparare ſopra una carta piana coſtruzione più bella per l' uſo della navigazione di queſte carte. Un' imperfezione però reſtava loro d' intorno nel miſurare in fatto ſulla carta così le loſſodromie, come le così dette miglia di longitudine, o il lato mecodinamico. Una tale imperfezione è tolta interamente in queſta Memoria.

§. IV.

Ma non altrimenti che m' è ſempre paruto ſtrano, che non ſi foſſero per l' innanzi avviſati gli uomini dotti di sbandire dalla Geografia la Proſpettiva, e di rappreſentare le parti ſuperficiali della Terra, comunque irregolari, appianate ſulle Mappe, non difformate, e ritenenti la loro preciſa eſtenſione, che hanno ſul globo; non ſeppi neppur comprendere perchè, prima di cercare mezzi più compoſti, non ſi foſſe rintracciato modo di maneggiare ſopra un globo artificiale tutta l' arte navigatoria. Così è ſtato fatto per l' Aſtronomia, così per la Geografia. La linea loſſodromica ſarebbe riuſcita una ſpirale com' è di fatto; i paralleli, i meridiani ſarebbero ſtati come ſono ſul globo naturale, e così gli angoli loſſodromici, quello che debbono eſſere; e finalmente l' eſtenſione del mare, i littorali, i porti, le iſole ecc. tutto vi ſarebbe ſtato ſituato com' è naturalmente ſul globo terracqueo. All' oggetto della Geografia ho cercato di ſupplire convenevolmente nel mio libro, che ha per titolo *Principj di Geografia aſtronomico-geometrica*, preſa la rappreſentazione delle parti ſuperficiali, qualunque ſiaſi la curva di rotazione generante la figura terreſtre, ſotto tutt'altro aſpetto da quello de' prelodati Geometri. A queſto della navigazione mi ſo a ſod-

disfare pienamente nella presente operetta. Nel che mi basta, che sia ben accolto il desiderio che ho coltivato di porgere, com' era in mio potere, al Pilotaggio un nuovo soccorso, quello finalmente ch' esser doveva in ordine anteriore a tutti.

§. V.

Mi fo pertanto a premettere alcune nozioni preliminari intorno alla lossodromia, note da gran tempo, le quali accoppiate ad altre meno avvertite, hanno dato luogo al soggetto di questa Memoria. Siccome però chi dirige il viaggio nelle grandi navigazioni è sempre versato convenevolmente nell' Arte; così m' astengo dall' esporre le cose in via elementare: supposte nell' uomo intendente tutte le cognizioni necessarie che ommetto, col proposito di dire soltanto ciò che ho da dir di nuovo in questo argomento.

Rappresenti pertanto (*Fig.* 1.) *PAM* la superficie della Terra; *P* il polo; *AM* l' equatore; *PA*, *PC*, *PD* ecc. i meridiani, *AEFGK* la linea lossodromica segante i meridiani sotto l' angolo costante *PAE*; *IF*, *HE* ecc. gli archi de' paralleli corrispondenti alle parti della lossodromia *EF*, *FG* ecc.

Proprietà conosciute di questa linea sono, che se sieno i meridiani *PA*, *PC*, *PD* ecc. pochissimo distanti tra di sè, e sieno pur tra sè uguali tutte le distanze de' paralleli *GI*, *FH* ecc.;

I.

Le parti della lossodromia *GF*, *FE* ecc. sono tra di sè uguali.

II.

Le lunghezze assolute degli archi de' paralleli *IF*, *HE*, ecc. sono pur tra di sè uguali.

III.

Le parti della lossodromia *AE*, *AF*, *AG* ecc. sono tra di sè respettivamente come le latitudini *CE*, *DF*, *BG* ecc.; e

le differenze di dette parti lossodromiche come le differenze delle latitudini corrispondenti.

I V.

Le lunghezze assolute degli archi *GI IF*, come pure degli archi *FH HE* ecc., e in conseguenza le lunghezze assolute della latitudine *GB*, e della somma delle lunghezze *IF* + *HE* ecc. detta altrimenti lato mecodinamico, sono tra di sè in costante ragione del coseno al seno dell' angolo lossodromico *IGF*, o sia del seno tutto alla tangente del medesimo angolo.

V.

Similmente le lunghezze assolute delle parti *GI GF*, *FH FE*, ecc. e però della latitudine *GB*, e della linea lossodromica *GF* + *FE* + *EA* sono tra di sè in costante ragione del seno tutto alla segante dell' angolo lossodromico *IGF*.

V I.

Nelle lossodromie fatte con diversi rombi, ma costituite tra i medesimi paralleli di latitudine, le differenze respettivamente in longitudine sono tra di sè come le tangenti degli angoli lossodromici.

§. V I.

Ecco poi altre proprietà che più da vicino si attengono all' artifizio delle latitudini crescenti, e in conseguenza alle carte ridotte.

I.

Se sia y il seno della latitudine u di qualunque punto della Terra *G*, *GI* un archetto elementare du del meridiano *PB*, dx l' archetto *BD* dell' equatore compreso tra due meridiani *PB*, *PD* infinitamente prossimi, ϕ l' angolo lossodromico *IGF*, *GF* l' archetto corrispondente della lossodromia, *FI* l' archet-

to del parallelo, poichè $GI = du = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, $FI = \frac{dy \text{ tang.} \phi}{\sqrt{(1-y^2)}}$, e $FI : BD = \cos. u : 1 = \sqrt{(1-y^2)} : 1$, sarà $dx = \frac{dy \text{ tang.} \phi}{1-y^2}$, e integrando $(A) \ldots\ldots x = \frac{1}{2} \text{tang.} \phi \log. \frac{1+y}{1-y}$ completamente. Abbiamo dunque nel valore di x la mutazione AB in longitudine dal punto d' intersezione della lossodromia A coll' equatore sino al punto B del meridiano che passa per l' origine G della lossodromia. Ma lo stesso valore non è che l' assoluta lunghezza dell' arco AB in parti del raggio 1 della sfera.

II.

Si chiami dt l' archetto IF, e nella carta ridotta l' elemento della latitudine sul meridiano si dica dz, e dr l' elemento del parallelo corrispondente. Per natura delle carte ridotte deve essere, posti simili gli archetti GI, IF

$$dz : dr = GI : IF = du : dt = 1 : \cos. u,$$

e però sarà $dz = \frac{dr}{\cos. u}$. Ma dr deve essere costante nelle carte ridotte, e uguale a du. Dunque $dz = \frac{du}{\cos. u}$. E perchè $du = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ (art. preced.), e $\cos. u = \sqrt{(1-y^2)}$, sarà $dz = \frac{dy}{1-y^2}$, e $z = \frac{1}{2} \log. \frac{1+y}{1-y}$, equazione finita e completa della latitudine crescente.

III.

Pertanto avvicinando questa all' equazione (A) dell' art. I. troviamo pel nostro oggetto della lossodromia, e delle carte ridotte questa prima proprietà

$$1 : \text{tang.} \phi = z : x$$

cioè che la latitudine crescente sta alla mutazione in longi-

tudine sull'equatore come il seno tutto alla tangente dell'angolo lossodromico. In conseguenza posta z la latitudine crescente allorchè $y=a$, x la mutazione in longitudine corrispondente all' angolo ϕ, z' la latitudine crescente quando $y=b$, x' la mutazione in longitudine collo stesso angolo ϕ, avremo $z-z':x-x'=1:\text{tang.}\,\phi$; e stessamente per altre latitudini crescenti z'', z''', e corrispondenti mutazioni di longitudine x'', x''' per altro angolo lossodromico ϕ', sarà $z''-z''':x''-x'''=1:\text{tang.}\,\phi'$. Onde saranno le differenze di due latitudini crescenti alle differenze delle mutazioni in longitudine sull' equatore per un dato angolo lossodromico, come il seno tutto alla tangente del medesimo angolo.

IV.

Ma per proprietà caratteristica della lossodromia (§. V. art. IV.) la latitudine naturale *GB* essendo al lato mecodinamico, cioè all' aggregato degli archi *IF*, *HE*, *CA*, nella stessa ragione del raggio alla tangente dell'angolo lossodromico *IGF*, sarà per un dato rombo la latitudine crescente alla latitudine naturale, cioè lunghezza assoluta dell' una a lunghezza assoluta dell' altra, come la lunghezza della mutazione in longitudine sull' equatore al lato mecodinamico.

V.

Pertanto la differenza di due latitudini naturali per un dato rombo sta alla differenza de' lati mecodinamici corrispondenti nella stessa ragione del seno tutto alla tangente dell' angolo lossodromico. Ma nella stessa ragione è provato essere (art. III.) la differenza $z-z'$ di dette latitudini poste crescenti alla differenza delle mutazioni corrispondenti $x-x'$ in longitudine sull' equatore. Dunque per un dato angolo lossodromico sarà la differenza delle latitudini crescenti alla differenza delle latitudini naturali, come la differenza delle mutazioni in longitudine sull' equatore alla differenza de' lati mecodinamici corrispondenti.

V I.

E di nuovo essendo $1 : \text{tang.}^2 \phi = z^2 : x^2$, sarà componendo $1 + \text{tang.}^2 \phi : 1 = z^2 + x^2 : z^2$, cioè $\text{sec.}^2 \phi : z^2 + x^2 = 1 : z^2$, e $1 : \text{sec.} \phi = z : \sqrt{(z^2 + x^2)}$. Ma per proprietà della lossodromia è il raggio alla secante dell' angolo del rombo ϕ, come la lunghezza dell' arco di latitudine naturale alla lunghezza della lossodromia. Costituito dunque un triangolo rettangolo i cui cateti sieno z, x, cioè la latitudine crescente, e la mutazione in longitudine, sarà la latitudine crescente, o artificiale, all' ipotenusa di detto triangolo, come la lunghezza della latitudine naturale alla lunghezza della vera lossodromia.

V I I.

E nello stesso modo di sopra (art. V.) si dimostrerà essere per un medesimo angolo lossodromico ϕ la differenza di due latitudini crescenti $z - z'$ alla differenza delle latitudini naturali corrispondenti, come la differenza delle due ipotenuse $\sqrt{(z^2 + x^2)} - \sqrt{(z'^2 - x'^2)}$ alla differenza delle due lossodromie vere corrispondenti.

§. V I I.

Con questi dati possono condursi a perfezione le carte ridotte assai facilmente, come vedremo. Con molta ragione il Sig. *Bouguer* vorrebbe, che sulle carte di navigazione non si tracciassero linee nelle particolari risoluzioni de' quesiti nautici; ma a ben giudicare della cosa tali quesiti richieggono tanto necessariamente costruzioni geometriche, che non pare possibile di astenersi dall' imbrattare le carte per ben condursi nelle navigazioni, e dal segnar punti col compasso. Inerendo pertanto al proposito del §. III. di non confondere la carta ridotta con la carta idrografica rappresentante il mare su cui si naviga, parmi che si potrebbe effettuare l' insinuazione di quel dottissimo uomo, e supplire a un tempo alla necessità assoluta di tracciar linee su le carte in questo mo-

do. Lasciando intatta la vera carta idrografica la quale indica al Pilota la giusta posizione de' luoghi, che non è tale su la carta di riduzione, essendo quivi le linee che congiungono due punti le direzioni de' rombi co' quali convien navigare per giugnere dall' uno all' altro, non mai quelle de' cerchj verticali, che li congiungono sul globo, si preparino a parte le carte ridotte corrispondenti, il cui piano per avventura potrebbe essere di carta pecorina, onde lavorarvi di matita, e tracciarvi sopra le linee proprie de' diversi casi, e cancellarvele a piacere. Una di queste carte sia rappresentata dal parallelogrammo *ABCD* (*Fig. II.*) in cui la *AB* sia o l' equatore, o altro parallelo qualunque, la quale sia divisa in parti eguali rappresentanti ciascheduna, per esempio, una sesta parte di grado equatoriale. Sieno poi i meridiani estremi *AC*, *BD*, divisi, com' è costume, coll' addizione continua delle secanti di dieci in dieci minuti, facendo uso della Tavola esibitaci dal Sig. *Bouguer* nel suo Trattato di navigazione, cui ho creduto bene di porre in calce di questa operetta, oppure adoperando la formula analitica delle latitudini crescenti (§. VI. art. II.). Queste latitudini crescenti sieno marcate internamente, come mostra la figura. Del lato esterno si faccia scala di parti eguali alle parti della *AB*, che saranno minuti equatoriali, contrassegnandole di 60 in 60 colla solita marca de' gradi circolari per abbreviamento. Così internamente avremo la scala delle latitudini crescenti, esternamente la misura delle differenze in latitudine naturale, del che vedremo l' uso. La superficie del parallelogrammo sarà il piano su cui andranno praticate le costruzioni necessarie nelle risoluzioni de' Problemi di navigazione ne' mari compresi tra i limiti assunti; e ciò sia quanto alla costruzione delle carte ridotte. E quanto all' uso per esser breve risolverò di fatto alcuni Problemi, ov' entrino le correzioni a cui danno luogo le cose qui innanzi dimostrate, e facciano fede della perfezione a cui si conduce la teoria e la pratica di queste carte: nel che fare assumeremo pertiche parigine $950\frac{1}{4}$ per la lunghezza di un minuto equatoriale, che suol pure denominarsi miglio marino, e però la scala esterna, che abbiamo detto di minuti equatoriali nella carta ridotta qui so-

pra, sarà pure scala di miglia marine, onde agevolmente si potrà passare dai gradi alle miglia, e viceversa.

I.

Data sulla carta idrografica la latitudine e longitudine di due punti di partenza, e di arrivo di un vascello, trovare le miglia marine di longitudine, o il valore migliare del latomecodinamico col mezzo della nostra Tabella ridotta (Fig. II.).

Sieno le occulte *FG*, *HF* i meridiani che passano pe' punti dati, e le *LM*, *NP* i respettivi paralleli di latitudine crescente, e però regolati su la scala interna della Tabella; e sia *Q* il punto di partenza, *R* l' arrivo del vascello. Si congiunga *QR*, e sopra la scala esterna de' minuti equatoriali o miglia marine *AC* si trovi da *S* verso *C* la differenza *ST* delle latitudini naturali de' punti *Q R*, e si conduca per *T* il parallelo *TX*, segante il meridiano *FG* in *V*, e la *QR* in *X*. Si misuri la *VX* su la medesima scala esterna *AC*, e le miglia marine risultanti per *VX* costituiranno la lunghezza vera del lato mecodinamico della proposta navigazione.

Imperciocchè essendo *QZ* la differenza delle latitudini crescenti de' punti *Q R*, *ZR* la mutazione in longitudine equatoriale, *ZQR* l' angolo lossodromico della navigazione, e *QV* la differenza delle latitudini naturali per costruzione, e per la similitudine de' triangoli *ZQR* *VQX* essendo

$$QZ : QV = ZR : VX$$

sarà (§. VI. art. IV.) *VX* il vero lato mecodinamico, e le miglia risultanti saranno le miglia di longitudine dimandate.

§. VIII.

Sia *A'B'C'D'* (*Fig. III.*) la carta ridotta al modo ordinario, *Q' R'* il sito de' punti dati, *ZQ'R'* l'angolo lossodromico. La somma $ab + cd +$ ecc. è il lato mecodinamico artificiale, di cui si cerca la rettificazione. Due modi sogliono adoperarsi. Si fanno delle parti di latitudine crescente *fg*, *gh* ecc. altrettante scale ciascheduna di egual numero di particelle rappresentanti miglia, leghe ecc. secondo la divisione

fatta, e ſi applica *ab* alla ſcala *fg*, *cd* alla ſcala *gh* ecc, e ſi determina la lunghezza di ciaſchedun lato a parte a parte rettificata in queſto modo. Queſto lavoro diventa bene ſpeſſo impraticabile nel caſo che piccola ſia la differenza in latitudine de' punti dati, incerto poi ſempre e fallace nel paſſaggio da una ad altra ſcala. Veggaſene un eſempio nel Probl. IV. Lib. II. Cap. VI. del Trattato di Navigazione del Sig. *Bouguer*. L' altro modo è quello di prendere un parallelo medio: modo rigoroſamente ineſatto. Tutte queſte difficoltà ed incertezze ſvaniſcono per la correzione noſtra indicata qui ſopra, con cui alla facilità è accoppiata l' eſattezza geometrica tanto prezioſa nella navigazione.

I I.

Dati i medeſimi elementi del Problema precedente, trovare la lunghezza del viaggio loſſodromico.

Fatta la medeſima coſtruzione ſu la Tabella ridotta, (*Fig. II.*) come qui innanzi, *QR* ſarà la linea loſſodromica, che il metodo ſomminiſtra; ma ella è creſcente per le coſe dimoſtrate antecedentemente. Si determini dunque come ſopra la differenza *ST* delle due latitudini naturali de' punti dati *Q R* ſopra la ſcala eſterna *AC*, e ſi conduca il parallelo *TX*. La linea *QX* ſarà la vera loſſodromica, la quale miſurata ſu la ſcala eſterna *AC*, darà in miglia marine la lunghezza del viaggio loſſodromico dimandata.

Imperciocchè eſſendo *ZQR* l' angolo loſſodromico della navigazione, *QZ* la differenza delle latitudini creſcenti de' punti *Q R*, *QV* la differenza delle latitudini naturali per coſtruzione, ſarà (§. VI. art. VI.) *QX* la vera loſſodromia della propoſta navigazione.

§. I X.

Sin da' primi tempi dell' invenzione delle carte ridotte non fu per avventura chi non conoſceſſe non eſſere altrimenti *QR* (*Fig. II.*) la vera lunghezza del viaggio loſſodromico. Quindi s' inventò il modo di rettificarla col miſurare la par-

te *Qb* (*Fig. III.*) su la scala *Qa* del meridiano *AC*, la parte *bd* su la scala *bc*, oppure *fg*, e così successivamente. Talchè per far comprendere l' indole di questo lavoro destinato a rettificare la lossodromia dice il Sig. *Bouguer* nel Lib. II. Cap. V. §. 239 di considerare la carta ridotta come un' unione di carte piatte differenti soprapposte l' una all' altra, e che non hanno la medesima scala. Ma non può negarsi che non sia incomoda, difettosa, e fallacissima ne' casi considerati al §. VIII. questa rettificazione. E perchè risulti meglio la necessità di purgare da questo difetto la pratica navigatoria risolveremo il seguente Problema, ch' è forse uno de' più usuali.

I I I.

Dato il punto di partenza, si dimanda la longitudine e la latitudine del punto di arrivo attuale, sia poi questo sul mare, o in terra ove sia pervenuto il vascello, essendo conosciute le miglia scorse con un dato e costante rombo.

Sia *Q* nella Tabella ridotta (*Fig. II.*) il punto di partenza di cui è nota la longitudine e la latitudine dalla carta idrografica. Al meridiano *FG* che passa per *Q* si costituisca all' istesso punto *Q* l' angolo del rombo tenuto *ZQY*. Dalla scala esterna *AC* de' minuti o delle miglia marine si applichino sopra l' indefinita *QY* le miglia corse nel viaggio fatto, e sia *QX* la lunghezza risultante. Si conduca perpendicolare al meridiano dal punto *X* la *XV*. Sarà per le cose dimostrate *QV* la differenza in latitudine vera tra il punto dato e quello dell' arrivo, la quale misurata su la scala somministrerà in miglia marine, e però in gradi e minuti l' intera latitudine cercata. Trovata la latitudine naturale del punto di arrivo, si cerchi la latitudine crescente che le corrisponde, e però dalla scala interna la differenza *QZ* per rispetto alla crescente del punto *Q*. Condotta una perpendicolare al meridiano in Z la quale seghi la *QY* in *R*, sarà *RZ* la mutazione in longitudine, e però si avrà la longitudine dimandata del punto di arrivo. Potrà pertanto segnarsi

ſu la carta idrografica il punto della Terra ove attualmente ſi trova il vaſcello.

§. X.

Veggiamo di queſto Problema nelle carte comuni di riduzione (*Fig. III.*). Eſſendo $\mathcal{Q}'$ il punto di partenza, ſi coſtituiſca l' angolo $Z'\mathcal{Q}'Y'$ uguale all' angolo loſſodromico dato. La lunghezza del viaggio fatto ſi diſtribuiſca ſopra l' indefinita $\mathcal{Q}'Y'$ per parti creſcenti ſecondo le parti $a\mathcal{Q}'$, bc, ecc. del meridiano, cioè ſecondo le ſcale delle medeſime parti, onde rieſca ingrandita e creſcente, e ſia R' il punto ove termina queſta diſtribuzione. Si conduca per R' il parallelo Rh ſegante in Z' il meridiano che paſſa pel punto $\mathcal{Q}$. Sarà $R'Z'$ la mutazione dimandata in longitudine, e $\mathcal{Q}'Z'$ la differenza in latitudine creſcente, onde ſi ricaverà e la longitudine totale e la latitudine del punto di arrivo. Quanto imperfetta e fallace ne' paſſaggi particolarmente da una ſcala all' altra rieſca la determinazione, e converſione della loſſodromia data in parti creſcenti, onde dipende la definizione de' due elementi ricercati, il vede ognuno da sè, cui ſiano familiari queſte pratiche di navigazione. Che ſe $\mathcal{Q}R'$ foſſeſi aſſunta uguale alla loſſodromia data, come ſi fa per alcuni nelle carte piatte, $R'Z'$ non ſarebbe altrimenti la mutazione in longitudine, ma il lato mecodinamico, com' è manifeſto dalle coſe dimoſtrate.

§. XI.

Sempre più chiaramente appariſce, che non potendo maneggiarſi i queſiti dell' Arte ſenza tentativi ſu la carta, e moltiplicità di linee, non poſſiamo rinunciare al far coſtruzioni geometriche ſenza eſporci a pericoli e inconvenienti graviſſimi. E però non ſembra mal fondato l' avere preparata, nel modo che ho inſinuato, per le navigazioni la carta ridotta, ſenza indicazioni di paeſi e ſenza linee nel ripieno, a guiſa di tabella raſa, onde farvi ſopra tutte le operazioni lineari che occorrono, cancellarle, e riformarne di nuove ſecondo il biſogno. La carta idrografica ella ſi è, che

dee contenere i luoghi nella loro giusta posizione, e sopra di essa debbono segnarsi le situazioni del vascello in corso, i suoi arrivi, secondo che risulta dalle operazioni fatte su la Tabella di riduzione. Sopra di che non è mestieri che più oltre ci tratteghiamo.

CAPITOLO SECONDO

Della Sfera di riduzione.

§. XII.

NObilissima invenzione è quella delle latitudini crescenti per la costruzione che abbiamo veduto de' Problemi di navigazione, e tanto più in presente, che si sono corrette e tolte via le incertezze procedenti dal misurare per parti sopra una moltitudine di scale le miglia di longitudine, e le lossodromie. Ma questa invenzione non ha prodotto che le carte di riduzione, e conteneva pur nel suo seno anche la riduzione della sfera artificiale per tutti gli usi dell'arte navigatoria: riduzione più naturale che non sono le carte, tutto riuscendo su la sfera, com' è precisamente sul globo terracqueo, meridiani, paralleli ecc. e la lossodromia in quella stessa linea spirale, ch' è tracciata dal vascello su la superficie del mare. Questa è la riduzione che or mi propongo di mettere in luce. Come per descrivere le varie estensioni terrestri è riuscito di trovar modo, onde averle in piano della stessa area che occupano su la faccia della Terra co' meridiani concorrenti al polo; così apparirà qui il modo di navigare non già su' disegni piani ma sì bene sopra lo stesso globo col mezzo di una sfera artificiale, anzi di un emisfero, se un' intera sfera di due in tre piedi di raggio fosse incomoda ne' vascelli.

§. XIII.

Facciamo pertanto attenzione primamente alla condizione de' piccoli archetti *AC*, *EH*, *FI*, *GL* ecc. (*Fig. I.*) o parti del lato mecodinamico. E' certo, che per natura della los-

ſodromia *AEFGK* debbono tutti avere una ſteſſa determinata lunghezza. Ma appartenendo ciaſcun di loro ad altro ed altro parallelo, l' iſoperimetria importa neceſſariamente, che ciaſcheduno ſia dotato d' altro ed altro numero di gradi. Ciò era notiſſimo ſin da quando preſe ad inveſtigarſi la curva che ſega tutti i meridiani della Terra ſotto un medeſimo coſtante angolo come fa la loſſodromia. Ma di qua per appunto moveremo per inoltrarci nel noſtro argomento. E' dunque coſa evidente, che gli archi di longitudine, corriſpondenti a dette parti mecodinamiche ſull' equatore, ſaranno diſeguali cioè d' altro e d' altro numero di gradi. Ma perchè dette parti ſieno tra di sè uguali, biſogna che creſcano in gradi nella ſteſſa proporzione con cui i raggi reſpettivi decreſcono, cioè come decreſcono, allontanandoſi dall' equatore, i coſeni delle reſpettive latitudini. Dunque gli archi reſpettivamente ſimili ſull' equatore debbono creſcere nella medeſima proporzione, ch' è quanto dire, nella proporzione con cui creſcono le ſecanti di dette latitudini.

§. XIV.

Ed ecco ſpuntare in fatto ſull' equatore ne' viaggi loſſodromici de' vaſcelli la legge degli archi creſcenti in longitudine, che ha luogo artificialmente in latitudine ſu' meridiani delle carte ridotte. Queſto belliſſimo legame può dimoſtrarſi così. Sieno y, y', y'' ecc. i ſeni ſucceſſivamente delle latitudini equidifferenti *MK*, *BG*, *DF* ecc. (*Fig. I.*), dx, dx', dx'' ecc. le mutazioni elementari in longitudine *MB*, *BD*, *DC* ecc. corriſpondenti, e ſia ϕ l' angolo coſtante loſſodromico *GKL*, *FGI* ecc. Sarà $x = AM = \frac{1}{2} \text{tang.}\,\phi\; l.\frac{1+y}{1-y}$, $x' = AB = \frac{1}{2} \text{tang.}\,\phi\; l.\frac{1+y'}{1-y'}$, $x'' = AD = \frac{1}{2} \text{tang.}\,\phi\; l.\frac{1+y''}{1-y''}$ ecc. (§. VI art. I.). Dunque ſaranno tra di sè gli archi *AM*, *AB*, *AD* ecc. reſpettivamente come $\frac{1}{2} l.\frac{1+y}{1-y}$, $\frac{1}{2} l.\frac{1+y}{1-y'}$, $\frac{1}{2} l.\frac{1+y''}{1-y''}$ ecc. Ma queſte ſono le eſpreſſioni, o i valori delle

le latitudini crefcenti de' punti *K*, *G*, *F* ecc. (§. VI. art. II.). Dunque ecc.

§. XV.

Siccome dunque un vafcello nel percorrere uguali fegamenti minimi della linea loffodromica ful mare fegna tacitamente archi crefcenti di longitudine full' equatore, e la legge di quefti archi crefcenti è fatta manifefta; è facile da vederfi, che imitando il globo reale con un globo artificiale, in cui gl' intervalli de' meridiani full' equatore vengano fegnati crefcenti con la legge trovata, mentre le latitudini fopra di effi meridiani fieno diftribuite per eguali intervalli, fi può tracciare in fatto la fpirale loffodromica, e rifolvere tutti i Problemi della navigazione fu la faccia fteffa del mare, che il vafcello va folcando. Così mentre nella carta ridotta le latitudini artificiali fono tutte crefcenti, ed è la longitudine divifa in parti eguali, nella sfera di riduzione all' oppofito la longitudine farà divifa in parti crefcenti, com' è divifa precifamente la latitudine nelle carte ridotte, ch' è cofa mirabile, e la latitudine in parti eguali.

§. XVI.

La Tavola pertanto delle latitudini crefcenti pofta qui in calce, come ferve per la divifione de' meridiani nelle carte, fervirà pure per la divifione dell' equatore nella sfera artificiale. Imperciocchè ciafcuna particella delle latitudini crefcenti fignifica un minuto di meridiano, ch' è quanto dire dell'equatore, e però la lunghezza di un miglio marino corrifpondente a detto minuto (§. VII.). In confeguenza mentre un arco di latitudine di 60° è di minuti 3600, cioè di 3600 miglia marine di lunghezza, la latitudine crefcente di 60° è fegnata nella Tavola di parti 4527. Dunque è manifefto, che tanto può efprimerfi detta latitudine crefcente diftefa in una linea retta divifa in 4527 parti eguali del valore ciafcuna di un minuto dell' equatore, quanto efibendola con un arco di circolo avente per raggio il raggio della

Terra, cioè con un arco dell' equatore di 75°, 27', che comprendono per appunto 4527 minuti. Con questa Tavola pertanto segneremo sull' equatore le longitudini che debbono procedere come le latitudini crescenti che lor corrispondono.

Sia perciò *AB* l' equatore della Terra (*Fig. IV.*), *P* un de' poli, *AP* un meridiano. Si divida il meridiano *AP* in parti eguali *Aa*, *ab*. *bc*, *cd* ecc. di 10' ciascheduna, e sull' equatore da *A* in *F*, da *A* in *G*, da *A* in *H* ecc. si applichino le parti crescenti per 10', 20', 30' ecc. tratte dalla Tavola, che saranno le mutazioni di longitudine crescenti per 10', 20', 30' ecc. di latitudine naturale. Per *a*, *b*, *c*, *d* ecc. descrivansi i paralleli, e si conducano i meridiani *PF*, *PG*, *PH* ecc.

Sarà pertanto l' arco *AF* la mutazione in longitudine pel punto di latitudine *a'*, l' arco *AG* la mutazione in longitudine pel punto di latitudine *b'*, e così successivamente. Si dirà pertanto fondamentale per la sfera da ridursi la divisione di 10' in 10', giacchè una bisogna fissarne per base, quando il bisogno di una grandissima esattezza non richiedesse una divisione fondamentale più minuta. Eseguito una volta sì fatto scompartimento, nessun problema richiede per la sua risoluzione che se ne faccia un nuovo, servendo il fatto per tutti.

Siccome dunque i gradi di longitudine crescente in *F*, *G*, *H* ecc. sono denotati dai gradi di latitudine corrispondenti in *a'*, *b'*, *f* ecc., e viceversa; così non difficilmente potremo definire sino a qual segno sia permesso di condurre la graduazione crescente sull' equatore relativamente alle latitudini corrispondenti. Essendo infinita, e perciò inassegnabile la latitudine crescente di 90°, la graduazione non può inoltrarsi, che a qualche grado minore di 90, come sarebbe a 89°, 40', mentre per essere la circonferenza dell' equatore di 21600 minuti, e di 20075 minuti la latitudine crescente di 89°, 40', si viene ad occupare presso che tutta la circonferenza equatoriale con la graduazione crescente spinta sino a 89°, 40'.

§. XVII.

Non ha dubbio intanto, che a qualunque punto *m* della lossodromia fondamentale *AabfM'* termini il viaggio fatto coll' angolo *ada'*, condotto per *m* il parallelo *mnq*, sarà sempre l' arco lossodromico *Aa'* all' arco *Am*, come la mutazione *Aa* in latitudine alla mutazione *Aq*, giacchè, essendo considerato rettilineo il piccolo triangolo lossodromico *fM'f*, rettangolo in *f*, e rettilineo pure il triangoletto *fmn*, rettangolo in *n*, saranno simili detti triangoli, e però proporzionali le grandezze enunciate per proprietà della linea lossodromica.

§. XVIII.

Ma altra conseguenza pure è inerente a questa divisione fondamentale, importantissima per la risoluzione de' Problemi nautici con la sfera di riduzione, cui bisogna premettere prima d' inoltrarci, ed enuncieremo così.

Sia divisa comunque in *K* (*Fig. IV.*) la differenza *FG* delle longitudini de' punti *a*, *b'*, e sia condotto il meridiano *PK* segante in *b* il parallelo *bb'* e congiunta *ab*. E' certo, che essendo *ab'*, *ab* due linee lossodromiche procedenti dal medesimo punto *a'* sotto diversi rombi, le differenze delle respettive longitudini percorse sull' equatore *FG*, *FK* tra i medesimi paralleli *ad*, *bb'* sono tra di sè come le tangenti degli angoli lossodromici *ga'b'*. *gab* (§. V.). E di nuovo se sia *M'* nel parallelo *dM'* il termine della lossodromia fondamentale coll' angolo *gab'*, ed *M* il termine dell' altra coll' angolo *ga'b* nel medesimo parallelo *dM'*, sicchè condotto per *M* il meridiano *PL* sieno *FN*, *FL* le differenze delle longitudini de' punti *M*, *M*, saranno pure tra di sè le *FN*, *FL* come le tangenti degli angoli lossodromici *ga'b*. *gab*. Dunque saranno proporzionali tra di sè le quattro differenze in longitudine *FG*, *FN*, *FK*, *FL*, cioè sarà

$$FG:FN=FK:FL.$$

§. XIX.

Ma per facilità in oltre nella riſoluzione de' Problemi è neceſſaria una ſcala angolare, che ci diſpenſi, ſe vogliamo, dall' inſtituire analogie col calcolo aritmetico. S' intendano perciò coſtrutte in angolo qualunque *CAB* (*Fig. V.*) le ſcale *AB*, *AC* di parti eguali rappreſentanti ciaſcuna un minuto dell' equatore, cioè un miglio marino ſicchè poſſano apporſi le denominazioni di un grado, di due ecc. a 60, a 120 ecc. di queſte parti, con che è reſo facile il paſſaggio dai gradi alle miglia, e viceverſa. Dovendoſi far uſo di due ſcale torna comoda queſta, ſu cui con le note righe parallele ſi poſſono inſtituire analogie ſenza tirar linee ſul piano della ſcala. Ne' Problemi pertanto che verranno qui appreſſo, ove ſia detto d' inferire altra ed altra proporzionalità di minuti, o miglia marine, s' intenderà ſempre ciò fatto col mezzo di queſta ſcala angolare, ſe attualmente il Navigante non voglia inſtituire le analogie aritmeticamente.

§. XX.

Premeſſe queſte coſe, perchè la sfera di riduzione ſi preſenti da sè agli occhi de' leggitori, non potendoſele dar moto in diſegno, riſolveremo i principali Problemi di navigazione ſu la *Fig. IV.*, e riuſcirà quindi chiariſſimo l' artificio con cui paſſeremo in fine a darne l' effettiva coſtruzione.

Ed altro non aggiungo in prevenzione ſe non ſe ch' io conſidero la ſpirale loſſodromica, come un compoſto di piccoli archetti circolari appartenenti ad altro ed altro cerchio verticale, e però gli angoli loſſodromici come angoli sferici coſtituiti da archi di cerchj maſſimi della sfera. Venghiamo pertanto ai Problemi.

PROBLEMA I.

Dato il punto di partenza, il rombo, e la lunghezza in miglia marine del viaggio lossodromico, trovare il punto di arrivo.

Tracciati su la sfera il meridiano, e il parallelo che passano pel punto dato, si faccia che il meridiano insista sul grado di longitudine crescente denotato dal grado di latitudine del punto dato (§. XVI.). Sia pertanto *a'* questo punto, il cui meridiano *PF* insiste sul grado *F* di longitudine denotato dal grado di latitudine del punto *a'*, e sia costituito su la superficie sferica al punto *a'* l'angolo sferico *ga'b* uguale al dato angolo lossodromico della navigazione, e pel punto d' intersezione *b* col parallelo prossimo fondamentale si faccia passare il meridiano occulto *PK*. Misurato l' arco *a'b* sulla scala del meridiano *AP* s' inferisca colla scala angolare della *Fig. V.*, come i minuti dell' arco *ab* ai minuti dell' arco *a'g*, così la lunghezza del viaggio fatto ad un quarto proporzionale, il quale somministrerà la mutazione in latitudine fatta dal vascello in questo viaggio (§. V.). Sia ella *ad*; sarà cognita pure la latitudine *Ad*. Si truovi sull' equatore il grado di longitudine crescente denotato dal grado di latitudine del punto *d*, e sia in *N*. S' inferisca, come i minuti dell' arco fondamentale *FG* ai minuti dell' arco *FK*, così i minuti dell' arco fondamentale *FN* ad un quarto proporzionale. Darà questo (§. XVIII.) la mutazione di longitudine *FL* percorsa sull' equatore in questo viaggio. E' dunque trovato ecc.

§. XXI.

E qui subito si riconosce

I. La necessità di segnare internamente sull' equatore della sfera i gradi di longitudine naturale computati dal primo meridiano; e di fare che la graduazione esterna delle longitudini crescenti portata da una zona possa girare intorno, perchè tirato un meridiano secondo la naturale sua longitu-

dine, movendo la zona, si possa farlo insistere sopra un grado qualunque di longitudine crescente.

II. Che bisogna poter tracciare su la faccia della sfera qualunque meridiano, e qualunque parallelo dimandato.

III. Che occorre inoltre un piccolo strumento goniometrico per misurare gli angoli sferici su la superficie della sfera, e costituire su la medesima angoli dati, come si fa col semicerchio trasportatore nella geometria piana.

IV. Che potrebbe tornar bene il preparare la sfera, o l'emisferio di riduzione, dalle graduazioni in fuori che sono indispensabili, con la superficie rasa e netta da linee, per farvi sopra tutte le costruzioni lineari, che occorrono nelle navigazioni, liberamente, come s' è detto della Tabella di riduzione; cancellarle, e rifarne di nuove a talento. Ma la pratica deciderà se così convenga, o torni meglio il fare le poche costruzioni necessarie su la faccia stessa del mare disegnato su la sfera.

V. E che può accadere, che i punti dati riescano tra due della costruzione fondamentale della sfera, ancorchè la graduazione sia instituita di 10′ in 10′. Ma così per appunto accade anche nelle carte ridotte, ove pure è distesa una graduazione fondamentale, e vi si rimedia senza inconvenienti o col prendere per punto dato il più prossimo fondamentale, o col risolvere il quesito due volte assumendo per punto dato prima l' uno poi l' altro de' punti fondamentali, tra' quali è egli costituito, e col far uso del risultamento ragguagliato.

PROBLEMA II.

Dato il punto di partenza, e quello a cui si vuol pervenire con la navigazione, si dimanda il rombo che dee tenersi, e il viaggio che si farà per giugnervi.

Sia, come qui innanzi, a' il punto di partenza, il cui meridiano sia condotto a insistere (§. XXI. art. I.) sul grado F di longitudine crescente denotato dal grado di latitudine data del punto a; e sia ad la mutazione in latitudine de' punti dati. Si trovi il grado N di longitudine crescente

corrifpondente al grado di latitudine del punto *d*. E poichè è data la longitudine de' punti, e perciò la differenza in longitudine, fi applichi quefta differenza da *F* verfo *N* full' equatore, e fia *L* il punto ov' ella termina. S' inferifca, come i minuti di longitudine *FN* ai minuti di longitudine *FL*, così i minuti di longitudine *FG* al quarto proporzionale *FK*, e fi conduca il meridiano *PK*. Ove quefto fega il parallelo fondamentale *bb'*, per efempio in *b*, fi conduca l' arco loffodromico *a'b*, e farà tofto dato l' angolo del rombo ricercato *gab*. Di nuovo dunque inferendo (§. V.), come i minuti o miglia marine dell' arco fondamentale *ag* alle miglia del fegamento loffodromico *ab* dato dalla sfera, così le miglia della mutazione in latitudine *ad*, ch' è pur data, al quarto proporzionale, che farà la loffodromia dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA III.

Dato il punto di partita, il rombo di vento feguito nel viaggio, e la latitudine del punto di arrivo, trovare la longitudine di quefto punto, e la lunghezza del viaggio fatto.

Sia, come prima, *a'* il punto di partenza, la cui latitudine fia denotata dal grado *F* della graduazione crefcente dell' equatore, e fia *ad* la differenza in latitudine de' punti di partenza e di arrivo. Si faccia al punto *a'* l' angolo del rombo dato *gab*, e pel punto *b*, ove refta fegato il parallelo proffimo fondamentale, fi conduca l' occulto meridiano *PK*. Mifurata ful meridiano graduato *AP* la lunghezza *ab*, s' inferifca, come i minuti di latitudine *ag* ai minuti della differenza data in latitudine *ad*, così le miglia marine della *ab* alla lunghezza del viaggio totale ricercato. Effendo poi data la latitudine *Ad* del punto di arrivo fi trovi il grado *N* che la denota fu la longitudine crefcente, e s' inferifca, come i minuti di longitudine fondamentale *FG* pel punto *b'* ai minuti della longitudine *FN*, così i minuti di *FK* pel punto *b* al quarto proporzionale, che darà i minuti di *FL*, onde fi ricaverà tofto la longitudine ricercata del punto di arrivo. Il che ecc.

PROBLEMA IV.

Dato il punto di partenza, la latitudine dell' arrivo, e la lunghezza della ſtrada fatta, ſi dimanda il rombo tenuto, e la differenza in longitudine tra i punti di partenza e di arrivo.

Sia a', come qui innanzi, il punto di partenza, il cui meridiano inſiſta ſul grado F della graduazione creſcente corriſpondente al grado di latitudine del punto a', e ſia ad la differenza delle latitudini date. S' inferiſca, come i minuti della differenza ad ai minuti della mutazione fondamentale $a'g$, così la loſſodromia data ad un quarto proporzionale (§. V.). Queſto valore miſurato ſu la graduazione del meridiano PA ſomminiſtrerà la lunghezza dell' arco loſſodromico compreſo tra i paralleli fondamentali aa', bb'. Si adatti queſto valore dal punto a' ſu la sfera sì, che incontri in qualche punto come b il parallelo fondamentale bb'. Sarà $ga'b$ l' angolo del rombo dimandato. Per b ſi conduca l' occulto meridiano PK, e perchè è nota la latitudine Ad dell' arrivo, ſia ella denotata ſu la diviſione creſcente dell' equatore dal grado corriſpondente N. Poſto ciò s' inferiſca, come nel Problema precedente, e ſi troverà la differenza in longitudine FL ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA V.

Dato il punto di partenza, la longitudine del punto di arrivo, e il rombo tenuto, ſi dimanda la latitudine dell' arrivo, e la lunghezza del viaggio fatto.

Sia di nuovo a' il dato punto di partenza meſſo a ſuo luogo per riſpetto al punto fondamentale F di longitudine creſcente denotante il grado di latitudine del punto a; e ſia fatto ſu la sfera l' angolo $ga'b$ uguale all' angolo loſſodromico dato. Pel punto b, ove dal lato dell' angolo è ſegato il parallelo bb', ſi faccia paſſare il meridiano occulto PK. I minuti della differenza in longitudine, ch' è nota dalle longitudini

tudini date de' punti di partenza e di arrivo, si portino da *F*, per esempio, in *L* sull' equatore, e s' inferisca, come i minuti della *FK* ai minuti della *FG*, così i minuti della *FL* ad un quarto proporzionale. I minuti di questo valore applicati su la graduazione crescente dell' equatore cadano, per esempio, in *N*. Il grado segnato in *N* per la longitudine crescente denoterà il grado di latitudine del punto di arrivo. Posto ciò è subitamente cognita la differenza delle latitudini data e trovata, onde s' inferisca, come i minuti dell' arco *a'g* ai minuti di questa differenza in latitudine, così la lunghezza dell' arco *a'h* misurato sul meridiano *AP* alla lunghezza del viaggio lossodromico dimandato. Il che ecc.

§. XXII.

La risoluzione di questi Problemi fatta bensì su la carta, ma come se fosse fatta su la sfera, basta per additare da sè la costruzione della sfera di riduzione, che abbiamo in mira. Si metta pertanto l' occhio su la *Fig. VI.*, la quale ci presenta l' emisfero su cui deve operarsi, sia poi egli l' australe o il boreale, come il richiede la navigazione. *AB* è l' equatore tracciato su la superficie sferica. *ABCD* è una zona cilindrica di metallo, il cui orlo superiore deve essere costituito rasente l' equatore *AB* quasi questo fosse sezione di quella; a questa zona è stabilmente annesso un meridiano di metallo *PE*. Essendo ferma la sfera sul suo piedestallo, la zona *ABCD* dee poter girare intorno al proprio asse trasportando seco il meridiano *PE* mobile intorno al polo *P*. La zona è divisa con la Tavola delle latitudini crescenti posta qui in fine procedendo da un margine del meridiano *PE* di 10′ in 10′, e terminando all' altro al grado 89°, 40′ come s' è detto (§. XVI.). Per tal modo ciascun punto della longitudine crescente segnata su la zona, atteso il giro libero ch' ella ha, può applicarsi a qualunque punto si voglia dell' equatore tracciato su la sfera. Il meridiano annesso di metallo *EP* deve essere diviso di 10 in 10 minuti che contrassegnino le latitudini dall' equatore al polo. Quanto poi all' equatore, dal punto ove cade il primo meridiano, come *PH*, principio delle longitudini naturali, la divisione sopra

di eſſo deve eſſer fatta come quella del meridiano anneſſo alla zona. Doppio è l'ufficio del meridiano mobile, dovendo ſervire da guida onde tracciare ove piace un meridiano ſu la sfera fermando con la vite *m* la zona alla sfera, e per tracciar pure qualunque parallelo. Al qual ſecondo oggetto deve eſſere preparata una piccola morſa (*Fig. VII.*) di metallo da ſtrignerſi ſul meridiano mobile al grado di latitudine voluto col mezzo della vite *a*, e portante in *b* un lapis che tocchi appena la ſuperficie sferica quando la morſa è ſtretta. Così rivolgendo il meridiano per quel verſo che occorre, ſi può deſcrivere il parallelo o tal porzione di parallelo che fa di meſtieri.

§. XXIII.

Reſta da indicarſi lo ſtrumento opportuno, onde coſtituire ſu la ſuperficie sferica (§. XXI.) un angolo loſſodromico dato, o rilevare i gradi di angolo già coſtituito. Ho detto (§. XX.) che l' archetto minimo loſſodromico può conſiderarſi come archetto di cerchio maſſimo della medeſima sfera. Dunque l' angolo da coſtituirſi o da rilevarſi è ſempre formato da archi di cerchio maſſimo. Per la qual coſa è neceſſario per la formazione di un tale ſtrumento di dare ad una lamina di metallo *AB* (*Fig. VIII.*) la curvatura di un meridiano della ſteſſa sfera, che abbia per corda ſei od otto pollici circa. Agli eſtremi di queſto arco di meridiano *A B* deve terminare ed eſſere fiſſata una lamina *BCA*, di cui l'orlo eſterno *BCA* ſia un ſemicerchio avente detta corda per diametro, e però rappreſenti il ſemiparallelo della sfera che abbia per polo il mezzo *D* della porzione di meridiano *AB*. Queſta lamina *BCA* inſiſtente ſu tal ſemicerchio deve combaciarſi con quella piccola zona di sfera che può eſſere compreſa tra i paralleli *BCA*, *bca*, e deve eſſere diviſa in 180 gradi. Dal mezzo *D*, polo de' paralleli, dee partire una laminetta *DC*, mobile intorno al punto *D*, avente eſſa pure la curvatura del meridiano, la quale ſerva a indicare i gradi degli angoli *ADC*, *BDC* a guiſa di meridiano volubile intorno al polo *D*. Ciò baſta per far comprendere, che adattando il punto *D* a qualunque punto voluto di un meridiano

tracciato su la sfera, e la lamina *AB* al meridiano stesso, col moto dell' indice e può costituirsi qualunque angolo sferico su la sfera, e rilevarsi qualunque angolo sferico a quel punto costituito.

§. XXIV.

Per dimostrare pertanto l' uso della sfera ridotta basterà che risolviamo il primo de' Problemi precedenti, ch' è il più usuale nelle navigazioni lossodromiche.

Dato il punto di partenza, e il tratto di viaggio che s' è fatto navigando con un dato rombo dal Sud al Nord, trovare su la sfera attuale la longitudine e la latitudine del punto a cui il vascello è pervenuto.

Sia il punto dato a 25° di latitudine, e 50° di longitudine. Si trasporti il meridiano mobile *PE* (*Fig. VI.*) al punto *F* ove sull' equatore è segnata la distanza di 50° dal primo meridiano *PH*, e si descriva il meridiano *PF*. Adattato quindi il porta-lapis (*Fig. VII.*) sul grado 25 del meridiano mobile, si segni su la superficie sferica il punto *a* che determina la posizione del punto di partenza dato, qual è realmente sul globo terrestre. E come suppongo, che la graduazione fondamentale così dell' equatore come del meridiano, insieme con le longitudini crescenti della zona *ACDB* proceda di 10′ in 10′, così avanzando di 10′ il porta-lapis verso il polo si descriva il segamento *fghn* del parallelo di 25°, 10′ di latitudine. Fatto questo si adatti lo strumento goniometrico (*Fig. VIII.*) col polo *D* in *a*, e coll' arco *AB* sul meridiano tracciato *PF*, e si costituisca l' angolo sferico *gab* uguale al dato angolo lossodromico. Pel punto d' intersezione *b* col parallelo *fn* si tracci col mezzo del meridiano mobile su la sfera il meridiano *PK*, e si misuri sul meridiano *PE*, come scala, la lunghezza dell' arco *ab*. Di nuovo al punto *b* si costituisca l' angolo *Pbp* uguale all' angolo *gab*, e si faccia *bp* = *ab*, e per *p* passi un altro meridiano. Similmente al punto *p* si costituisca l' angolo *Ppq* uguale all' angolo *Pbp*, e *pq* = *bp*, e così successivamente finchè ripetendo l' operazione di meridiano in meridiano, la lunghezza della vera lossodromia, come *ar*, risulti uguale alla lunghezza del

viaggio fatto. Allora per *r* si faccia passare l' ultimo meridiano *PL*, e si rimetta la zona mobile al sito primo del meridiano *PF*, ov' è segnata la latitudine data di 25°. Sarà *HL* la longitudine del punto di arrivo *r* misurata su la graduazione dell' equatore, e il grado *L* su la graduazione crescente della zona denoterà la latitudine del medesimo punto *r*. Il che ecc.

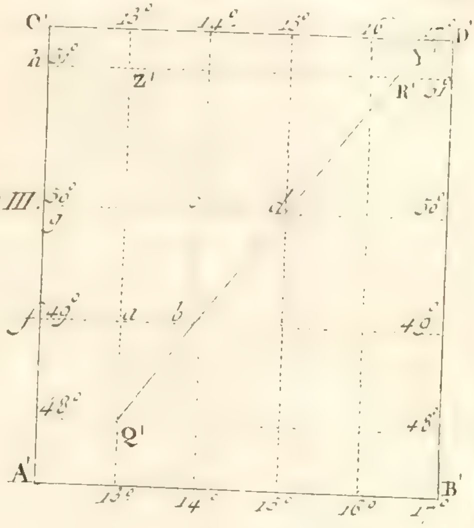
ALTRIMENTI

Ma se non voglia descriversi su la sfera l' effettiva lossodromia, si praticherà la prima costruzione indicata nella risoluzione di questo Problema. Imperciocchè, tirato il meridiano della longitudine data di 50° al punto *F*, e fatta girare la zona mobile sì, che il grado 25° di longitudine crescente, da cui è denotata la latitudine del punto dato, cada in *F*, e trovato come sopra il punto *b*, il segamento lossodromico *a'b*, e il punto *K* ove termina il meridiano che passa per *b*, e fermata finalmente la zona in questa posizione, si cerchi sopra di essa la crescente di 25°, 10', cioè la *FG*. Fatto questo con la scala angolare si trovi il quarto proporzionale alla piccola lunghezza *a'b*, alla lunghezza *a'g* della mutazione in latitudine, e alla lunghezza del viaggio fatto, e si avrà la differenza in latitudine tra il punto dato e quello di arrivo, la quale aggiunta alla *Fa'* darà la latitudine ricercata. A questa corrisponda su la graduazione crescente della zona, per esempio, il punto *N*. S' inferisca pertanto: come i minuti di *FG* ai minuti di *FK* così i minuti di *FN* al quarto proporzionale, e si avrà l' arco, per esempio, *FL*, il quale aggiunto su la graduazione dell' equatore all' arco *HF* somministrerà la longitudine *HL* del punto di arrivo.

§. XXV.

Lungo sarebbe e non necessario il risolvere altri Problemi con la sfera di riduzione subito che n' è fatta palese e lucida la costruzione, e l' uso. Il segnare, per esempio, il punto ov' è un vascello, trovandosi a vista di due punti a terra conosciuti, il che si fa comunemente prima di perdere di

Fig. III.



II.

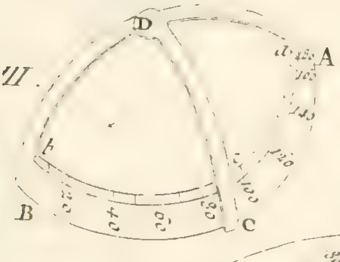


Fig. VII.

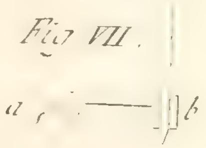
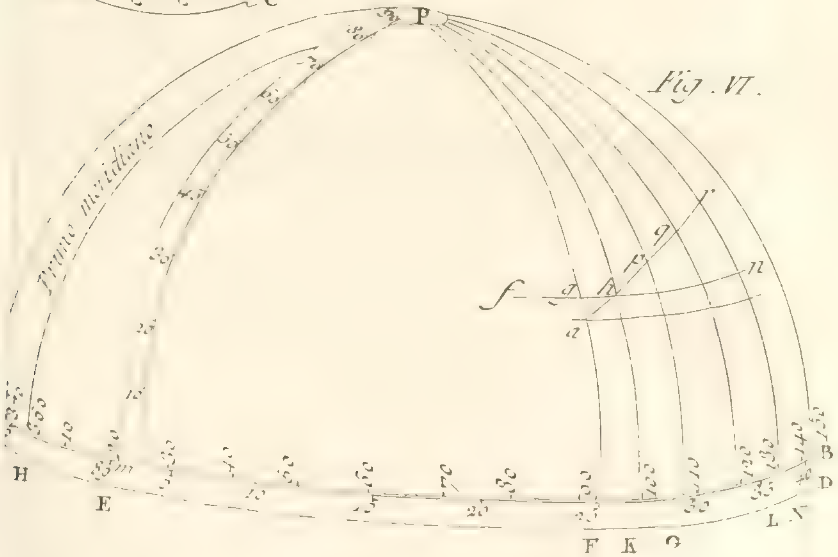


Fig. VI.



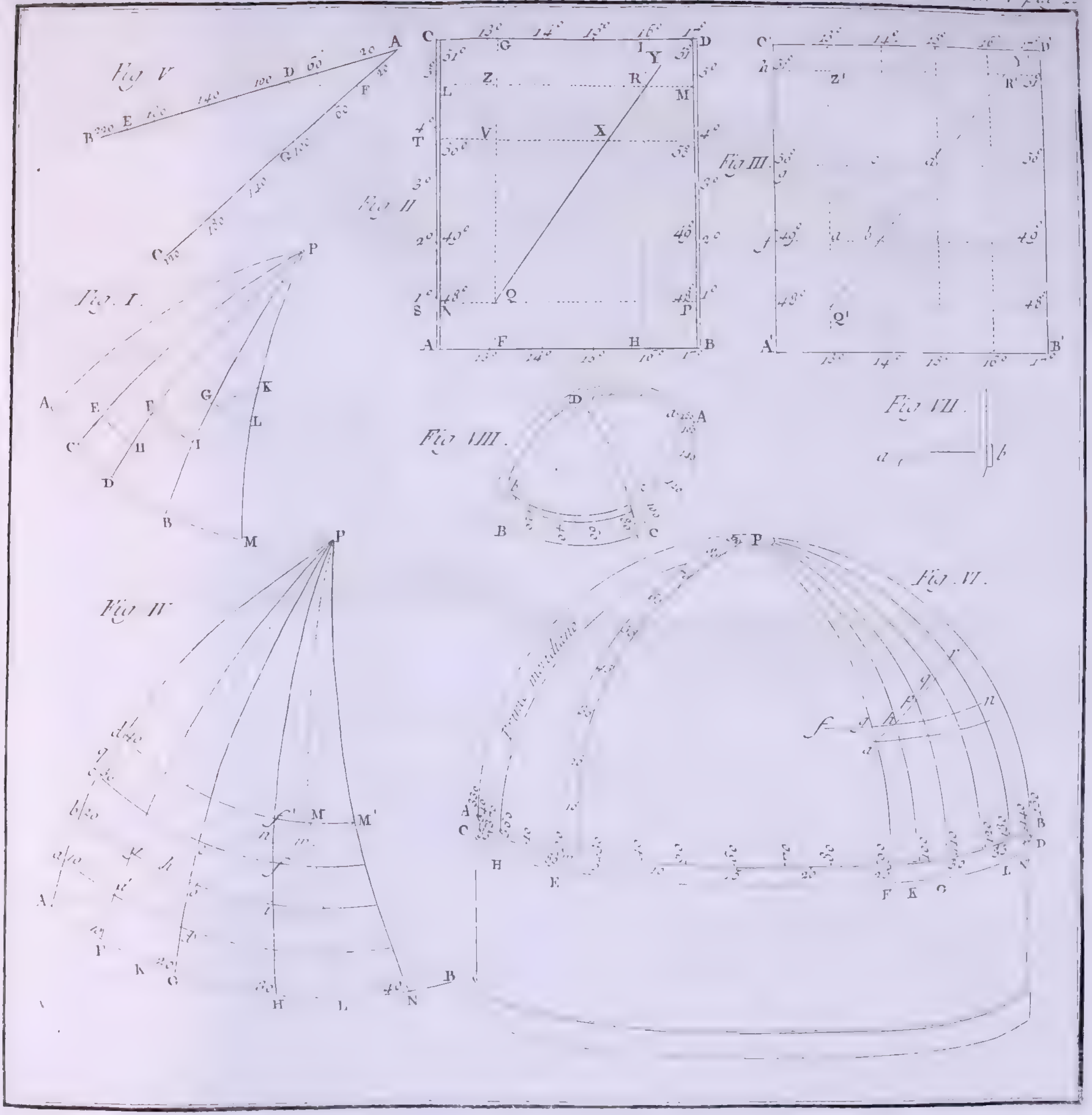


Fig V
Fig II
Fig III
Fig I
Fig VIII
Fig VII
Fig IV
Fig VI
primo meridiano

vista la terra, riesce su la sfera ridotta più facilmente e più esattamente praticabile che non è per avventura col mezzo delle carte. Così il ridurre in gradi e minuti di longitudine equatoriale le miglia percorse verso l' est o verso l' ovest sopra un dato parallelo, è cosa che si effettua su la sfera di riduzione in pochi istanti. Ma e di queste, e dell'altre operazioni dell' Arte navigatoria che non esigono quasi alcun artificio su la sfera, veggano gl' intendenti dell'Arte, all' intelligenza e pratica de' quali è rimesso il giudizio della cosa.

T A V O L A

DELLE LATITUDINI CRESCENTI.

M'	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.
0	0	0	7	421	14	848	21	1289	28	1751	35	2244	42	2782
10		10		431		859		1300		1762		2256		2795
20		20		441		869		1311		1774		2269		2809
30		30		451		879		1321		1785		2281		2822
40		40		461		890		1332		1797		2293		2836
50		50		471		900		2343		1808		2306		2849
0	1	60	8	482	15	910	22	1354	29	1819	36	2318	43	2863
10		70		492		921		1364		1831		2330		2877
20		80		502		931		1375		1842		2343		2890
30		90		512		941		1386		1854		2355		2904
40		100		522		951		1397		1865		2368		2918
50		110		532		962		1408		1877		2380		2932
0	2	120	9	542	16	972	23	1419	30	1888	37	2393	44	2946
10		130		552		983		1429		1900		2405		2960
20		140		562		993		1440		1911		2418		2974
30		150		573		1004		1451		1923		2430		2988
40		160		583		1014		1462		1935		2443		3002
50		170		593		1025		1473		1946		2455		3016
0	3	180	10	603	17	1035	24	1484	31	1958	38	2468	45	3030
10		190		613		1046		1495		1970		2481		3044
20		200		623		1056		1506		1981		2494		3058
30		210		634		1067		1517		1993		2506		3072
40		220		644		1077		1528		2005		2519		3087
50		230		654		1088		1539		2017		2532		3101
0	4	240	11	664	18	1098	25	1550	32	2028	39	2545	46	3116
10		250		674		1109		1561		2040		2558		3130
20		260		684		1119		1572		2052		2571		3144
30		270		695		1130		1583		2064		2584		3159
40		280		705		1140		1594		2076		2597		3173
50		290		715		1151		1605		2088		2610		3188
0	5	300	12	725	19	1161	26	1616	33	2099	40	2623	47	3203
10		310		735		1172		1628		2111		2636		3217
20		320		746		1183		1639		2123		2649		3232
30		330		756		1193		1650		2135		2662		3247
40		340		766		1204		1661		2147		2675		3262
50		350		776		1214		1672		2159		2688		3276
0	6	360	13	787	20	1225	27	1684	34	2171	41	2702	48	3291
10		370		797		1236		1695		2184		2715		3306
20		380		807		1246		1705		2196		2728		3321
30		390		818		1257		1717		2208		2741		3337
40		400		828		1268		1729		2220		2755		3352
50		410		839		1278		1740		2232		2758		3367

TAVOLA

DELLE LATITUDINI CRESCENTI.

M'	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.	G	LUN.
0	49	3382	56	4074	63	4905	70	5966	77	7467	84	10137
10		3397		4092		4927		5995		7512		10234
20		3412		4110		4949		6025		7557		10334
30		3428		4128		4972		6055		7603		10437
40		3443		4146		4994		6085		7650		10543
50		3459		4164		5017		6115		7697		10652
0	50	3474	57	4183	64	5039	71	6146	78	7745	85	10765
10		3490		4201		5062		6177		7793		10881
20		3506		4219		5085		6208		7842		11002
30		3521		4238		5108		6240		7892		11127
40		3537		4257		5132		6271		7942		11257
50		3553		4275		5155		6303		7994		11392
0	51	3569	58	4294	65	5179	72	6335	79	8045	86	11533
10		3585		4313		5202		6367		8099		11679
20		3601		4332		5226		6400		8152		11832
30		3617		4351		5250		6433		8207		11992
40		3633		4370		5275		6467		8262		12160
50		3649		4389		5299		6500		8318		12334
0	52	3665	59	4409	66	5323	73	6534	80	8375	87	12522
10		3681		4429		5348		6569		8433		12719
20		3698		4448		5373		6603		8492		12927
30		3714		4468		5398		6638		8552		13149
40		3731		4488		5423		6674		8614		13387
50		3747		4507		5448		6710		8676		13641
0	53	3764	60	4527	67	5474	74	6746	81	8739	88	13917
10		3780		4547		5500		6782		8803		14216
20		3797		4568		5526		6819		8869		14543
30		3814		4588		5552		6856		8936		14903
40		3831		4608		5578		6894		9004		15311
50		3848		4629		5604		6932		9074		15770
0	54	3865	61	4649	68	5631	75	6970	82	9145	89	16300
10		3882		4670		5658		7009		9218		16925
20		3899		4691		5685		7048		9292		17694
30		3916		4712		5712		7088		9368		18682
40		3933		4733		5739		7128		9446		20075
50		3950		4754		5767		7169		9525		22458
0	55	3967	62	4775	69	5794	76	7210	83	9606		
10		3985		4797		5822		7251		[illegible]	90	Infin.
20		4003		4816		5851		7293		[illegible]		
30		4021		[illegible]		5879		7335		9861		
40		[illegible]		[illegible]		5909		7379		[illegible]		
50		[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]		

DISSERTAZIONE
GEOMETRICO-ANALITICA
DELLA COSTRUZIONE E DELLA QUADRATURA DI ALCUNE VOLTE E LUNULE.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

GIova sommamente all' Architettura il determinare la costruzione, e la quadratura di alcune Volte, e Lunule. Se la costruzione è rettamente determinata, la volta reca all' occhio molto piacere: e la cognizione della quadratura di una volta si rende necessaria per istabilire giustamente il contratto coll' Artefice, che la dee costruire. Io ho dovuto convincere un Artefice, che la superficie della volta circolare d'una tribuna quadrata sta a quella del sottoposto pavimento come 8 : 7 mediante il computo dei materiali, ch' egli avea posti in opera nel formarla.

PROBLEMA I.

Trovare la superficie della Volta d' una Tribuna quadrata formata con quattro Lunule.

La volta d' una tribuna quadrata rade i quattro archi eguali, che la detta tribuna compongono, ed è formata da quattro lunule l' una dall' altra separate da due ellissi, che s' incrocicchiano, i cui assi maggiori sono le diagonali del quadrato, sopra i lati del quale i quattro archi sono costrutti, ed i semiassi minori s' eguagliano al raggio degli archi.

Sia (*Fig.* 1.) AHB la metà d' un arco della tribuna, C il centro dell' arco stesso, $CA = CB$ il raggio. Immaginiamoci che il predetto arco sempre parallelo a se stesso si muova col centro C per la linea CE uguale, e normale a CB; il

raggio

raggio *CB* genererà il quadrato *CD*, ed il quadrante *AHB* la superficie *AHBDOF* d' un quadrante di cilindro. Venga ora tagliata la mentovata superficie dal piano *FIBLE* normale al quadrato *CD*, e che passi per la diagonale *BE* del detto quadrato, e determinerà esso piano la metà *BHAFIB* d' una delle nostre lunule, di cui si cerca la quadratura, la qual lunula mediante l' ellisse *BIF* confina colla vicina.

Egli è certo che la superficie *BHAFIB* della semilunula s' eguaglia alla superficie *BHAFOD* del quadrante del cilindro meno la superficie *BIFOD*. La superficie del cilindro è facilissima da ritrovarsi, supposta la rettificazione del cerchio, pareggiando essa il prodotto della circonferenza *BHA* nella lunghezza $AF = CB$ del cilindro. Resta dunque da determinare la superficie *BIFOD*.

Segnata ad arbitrio l' ascissa *BG*, ed il suo infinitesimo elemento *Gg*, per li punti *G*, *g* si tirino le due ordinate *GH*, *gh*, e pel punto *H* la *Hn* parallela a *BC*. Si conducano *GK* parallela a *CE*, *KO LI* parallele a *GH*, che saranno ad essa eguali, e congiunti i punti *H O* colla retta *HO*, che passerà pel punto *I*, si meni pel punto *h* la retta *ho* parallela ad *HO*. Mentre l' ascissa *BG* cresce per l' elemento *Gg*, la superficie *BIOD* cresce per l' elemento $IioO = IO . Oo = IO . Hh$: ma $IO = LK = KE = CG$; dunque l' elemento $IioO = CG . Hh$. Per la similitudine dei triangoli *HCG*, *Hhn* abbiamo $CH = ho : CG :: Hh : nh$, e per conseguenza $CG . Hh = ho . hn$: ma quest' ultima quantità è l' elemento del rettangolo *HK*; dunque la superficie *BIOD*, ed il rettangolo *HK*, che hanno gli elementi eguali, sono fra loro eguali. Quindi se dalla superficie *BHOD* si sottrarrà il rettangolo *HK*, resterà la superficie della porzione di lunula *BHI*. Quando l' ascissa *BG* è divenuta eguale al raggio *BC*, la superficie *BHOD* pareggia la *BHAFOD*, e s' eguaglia al prodotto $BHA . BC$. In oltre il rettangolo *HK* si è cangiato nel quadrato $AE = (BC)^2$. Sarà pertanto la superficie della semilunula $BHAFIB = (BHA - BC) . BC$, ed essendo la volta formata da otto semilunule, sarà la sua intera superficie $= (2BHA - 2BC) . 4BC$; il che ecc.

COROLLARIO I.

La ſuperficie *BIFOD* della parte di cilindro tagliata fuori dal piano *BIFELB* è geometricamente quadrabile, avendo io dimoſtrato, che qualunque ſua porzione *BIOD* s' eguaglia al corriſpondente rettangolo *HK*.

COROLLARIO II.

S' eguaglia la ſuperficie del pavimento della tribuna a $4(BC)^2$; dunque le ſuperficie della volta, e del pavimento ſi riguardano nella proporzione di $(2BHA - 2BC) \cdot 4BC : BC \cdot 4BC$, cioè come $2BHA - 2BC : BC$, o ſia come la circonferenza del ſemicircolo meno il diametro al raggio.

COROLLARIO III.

Ammeſſa l' approſſimazione Archimedea, che il quadrante al raggio ſtia come 11 : 7, ſi troverà la ſuperficie della noſtra volta $= (\frac{22}{7} BC - 2BC) \cdot 4BC = \frac{8}{7} BC \cdot 4BC$, la quale corriſponderà all' aja del pavimento come $\frac{8}{7} BC \cdot 4BC : BC \cdot 4BC$, ch è quanto a dire come 8 : 7. Praticamente adunque ſi avrà la ſuperficie della volta, aggiungendo a quella del pavimento la ſettima parte.

COROLLARIO IV.

Pel Corollario I. la ſuperficie *BIFOD* s' eguaglia al quadrato *AE*, o ſia *CD*, e perciò ella è doppia del triangolo *BED*, ch' è la ſua projezione nel piano orizzontale *CD*. Se adunque la volta d' un vaſo quadrato, il cui pavimento $(2CB)^2$, ſi coſtruiſca di figura circolare a quattro venti, e ſenza lunule, la ſua ſuperficie ſarà doppia di quella del pavimento, eſſendo eſſa uguale ad otto ſuperficie *BIFOD*, ed il pavimento ad otto triangoli *BED*.

PROBLEMA II.

Determinare la figura del perimetro d' una Lunula generata in una Volta ellittica dal movimento d' un semicircolo lungo una linea orizzontale normale al lato del vaso, il raggio del qual semicircolo sia più picciolo del semiasse minore della ellisse, colla qual è costrutta la Volta.

Sia (*Fig.* 2.) *CBVRFC* un pezzo di volta ellittica, *BK* un piano orizzontale, ed *AHBC* un quadrante di circolo normale ad esso piano, il quale parallelo a se stesso si muova col centro *C* sempre nella linea *CK*. La circonferenza *BHA* tagliando la volta genererà il semiperimetro *BIF* della semilunula *BIFAHB*, la cui figura si vuole geometricamente determinare.

Suppongo, che *CFR* sia un quadrante d'ellisse, i cui semiassi *CK*, *KR*, la quale io ripeto nella *Fig.* 3. S' accomodi ad essa l' ordinata *FE* uguale al raggio *CA* del quadrante circolare *AHBC*, e tirata la diagonale *CR*, che tagli *EF* nel punto *S*, per questo si conduca *ST* parallela a *CK*. Col semiasse trasverso *EK*, e col conjugato *TR* descrivasi l' iperbola Apolloniana (*Fig* 2.) *ELB*, che passerà pel punto *B*. Pel punto qualunque *G* si tiri *GM* parallela, ed eguale a *CK*, che interséchi l' iperbola nel punto *L*, e condotta alla semellisse *GIP* della volta l' ordinata *LI*, dico che il punto *I* è nel perimetro *BIF*.

Per la proprietà della ellisse *CFR*, ed essendo $EF = CA$, avremo $EK = \frac{CK}{KR} \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$, e per la similitudine dei triangoli *CKR* *STR*, $TR = \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$. Menata pel punto *L* la *DLQ* parallela a *BC*, sarà per la natura dell' iperbola $(KQ)^2 - (KE)^2 = \frac{(EK)^2}{(TR)^2} \cdot (QL)^2$, e sostituendo in vece di *EK* *TR* i loro valori, $(KQ)^2 - \frac{(CK)^2}{(KR)^2} \cdot ((KR)^2$

$-(CA)^2\Big) = \frac{(CK)^2}{(KR)^2} \cdot (QL)^2$, e per conſeguenza $\frac{(KR)^2}{(CK)^2} \cdot (KQ)^2$ $-(KR)^2 + (CA)^2 = (QL)^2$. Nell' elliſſe *GIP* eſſendo $ML = KQ$, $MP = KR$, abbiamo $(KR)^2 - \frac{(KR)^2}{(CK)^2} \cdot (KQ)^2 = (LI)^2$; dunque unendo inſieme i valori trovati di $(QL)^2$, $(LI)^2$; $(QL)^2 + (LI)^2 = (AC)^2$. Supponendo pertanto che il quadrante *AHBC* abbia viaggiato lungo la retta $CQ = GL$, e sia giunto nel ſito *OIDQ*, il punto *I* ſarà comune all' elliſſe *GIP*, ed al detto quadrante, e la circonferenza *DIO* tagliando la volta nel punto *I*, apparterrà eſſo al perimetro *BIF* della ſemilunula *BIFAHB*; il che ecc.

COROLLARIO I.

La noſtra curva *BIF* è un luogo alla ſuperficie. Si determina eſſa in due modi, o prendendo per aſciſſa l' arco iperbolico *BL*, e per ordinata la retta *LI*, ch' è del pari ordinata e della elliſſe *GIP*, e del circolo *DIO*, ovvero per aſciſſa l' arco circolare *BH*, e per ordinata la $HI = GL$, ch' è applicata ugualmente e all' elliſſe *GIP*, e all' iperbola *BLE*.

COROLLARIO II.

La projezione della curva *BIF* nel piano orizzontale *BK* è l' iperbola *BLE*, e nel piano verticale *CH* il circolo *BHA*.

COROLLARIO III.

Se (*Fig.* 3.) $EF = KR$, cioè a dire ſe ſono eguali il raggio del circolo generante la lunula, e la ſaetta della volta, ne ſegue eſſere (*Fig.* 2.) $EK = 0$, ed in tale ſuppoſizione l' iperbola *BLE* ſi cangia nella retta *BK*, e la curva *BIF* in un quadrante di elliſſe, i cui ſemiaſſi *BK*, *KR*.

PROBLEMA III.

Quadrare la Semilunula BHAFIB.

Prorogate (*Fig* 2. 4.) le parallele *CK*, *GM*, *BX*, tiro ad esse la normale *eyb*, ed indi al piano, in cui giacciono le dette parallele, la parimente normale *ef*, che faccio uguale a $\frac{KR \cdot CA}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}}$. Coi semiassi *eb*, *ef* descrivo il quadrante ellittico *ebif*, il quale camminando sempre parallelo a se stesso lungo alla linea *ek* uguale alla *EK* della *Fig.* 2, generi colla sua circonferenza la superficie *bifnzx* del quadrante di cilindro ellittico. Nella stessa guisa il quadrante di circolo *CBHA* generi la superficie *BHANZX* del quadrante di cilindro. Conduco le ordinate *GH* *yi*, e le *HZ* *iz* parallele a *GM* *ym*, e segno i menomi archetti *HS* *io* corrispondenti a pari decrementi *HT* *il* delle ascisse uguali *CG*, *ey*. E' noto ai Geometri essere $HS = \frac{CA \cdot HT}{\sqrt{((CA)^2 - (CG)^2)}}$, $io = \frac{\sqrt{((eb)^4 + ((ef)^2 - (eb)^2) \cdot (ey)^2)}}{eb\sqrt{((eb)^2 - (ey)^2)}} \cdot il$, e poichè $eb = CA$, $ef = \frac{KR \cdot CA}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}}$, $ey = CG$, $il = HT$, dopo i necessarj computi troveremo $io = \frac{CA \cdot HT \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)}}{\sqrt{((CA)^2 - (CG)^2)} \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}}$. Perciò $HS : io :: \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)} : \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)}$, e conseguentemente $HS \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)} = io \cdot \sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$, e moltiplicando da entrambe le parti per $\frac{CK}{KR}$, $HS \cdot \frac{CK}{KR}\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)} = io \cdot \frac{CK}{KR}\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$: ma $\frac{CK}{KR}\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2 + (CG)^2)} = QK = ML = ZI$ per l' equazione dell' iperbola *BLE*, e per la costruzione $\frac{CK}{KR}\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)} = ek = ym = iz$; dunque $HS \cdot IZ$

$= io \cdot iz$. Si offervi effere $SH \cdot IZ$ l' elemento della fuperficie $BIZX$, ed $io \cdot iz$ l' elemento della fuperficie $bizx$, e fi deduca effere $BIZX = bizx$: ma $BHIB = BHZX - BIZX$; dunque $BHIB = BHZX - bizx$, cioè a dire uguale alla differenza di due fuperficie cilindriche, una circolare, e l' altra ellittica corrifpondenti a pari afciffe BG, by. Pofta $CG = cy = o$, avremo la fuperficie della femilunula $BHAFIB = BHANZX - bifazx$ differenza fra le fuperficie di due quadranti dei mentovati cilindri; il che ecc.

SCOLIO I.

Quefta foluzione può, come vedremo, adattarfi al cafo, in cui fia $CA = KR$, e confeguentemente $EK = o$, BLE una linea retta, ed il femiaffe ef dell' elliffe bif infinito. In tale circoftanza per altro egli è meglio ricorrere al Problema I., e quantunque (*Fig.* 1) CE non fia eguale a CB, fi troverà $BIOD = HK$, e perciò $BHIB = BHOD - HK$. In fatti ho dimoftrato nel predetto Problema effere $CH : CG :: Hb : nb$; ma $CH = CB = ED$, $GG = EK$, e per la fimilitudine dei triangoli EDB EKL, $ED : EK :: DB : KL$; dunque $DB : KL :: Hb : nb$, e poichè $DB = bo$. $KL = IO$, $Hb = Oo$, $bo : IO :: Oo : nb$, e paffando all' equazione $IOo = nbo$. Fatta la riflefione, che IOo, nbo fono gli elementi dell' aje $BIOD$, HK, ne dedurremo l' eguaglianza dell' aje fteffe, e conchiuderemo effere $BHIB = BHOD - BIOD = BHOD - HK$; il che ecc.

COROLLARIO.

Qualunque proporzione abbia $BC : CE$, l' aja $BIFOD$ è fempre doppia del fottopofto triangolo BED.

SCOLIO II.

Ho affermato poterfi adattare la foluzione del Problema III. al cafo, in cui fia (*Fig.* 2. 4.) $CA = KR$. In quefta circoftanza effendo $ef = \frac{KR \cdot CA}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}} = \infty$, l' arco ellittico bi s' adeguerà colla ordinata yi, e perciò $BIZX = bizx = im$. Conciofiachè $CB = cb$, avremo $CA : GH :: ef$

$= \frac{KR.CA}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}} : yi$, e quindi $yi = \frac{KR.GH}{\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}}$:
ma $ek = ym = \frac{CK}{KR}\sqrt{((KR)^2 - (CA)^2)}$ per la coſtruzione; dunque $im = CK.GH = HM$, e per conſeguenza $BHIB = BHZX - bizx = BHZX - HM$; il che ecc.

SCOLIO III.

Alle lunule praticamente non ſi aſſegna la figura determinata nel Problema II., la quale ſendo ſtata poſta in uſo nella Chieſa del Redentore in Venezia, non laſcia l' occhio contento. Il contorno (*Fig.* 5.) *BIF* della ſemilunula *BIFAHB* ſuol farſi di figura ellittica nata dal tagliare la volta *CBVRFC* col piano verticale *BEFIB*, che paſſi per la linea *BE*. Ciò poſto cerchiamo ſe alla ſemilunula *BIFAHB*, che dee radere il quadrante di circolo *BHA*, ſi può aſſegnare la figura di una porzione di ſuperficie di un fruſto conico, il quale tagliato dal piano verticale *BEFIB* ci dà un' elliſſe. La figura di una porzione di ſuperficie di un cilindro non ſerve alla noſtra ipoteſi, che ſia $AC < KR$, avendo dimoſtrato nel Problema II., che la volta ellittica, ed il cilindro ſi tagliano mediante una curva diverſiſſima dall' elliſſe.

PROBLEMA IV.

Data una Volta ellittica, determinare quel fruſto conico, che la tagli in maniera, che la comune ſezione ſia un pezzo d' elliſſe.

Sia *AHBSFA* il fruſto conico che ſi cerca, e la comune ſezione di eſſo, e della volta *CBVRFC* ſia il pezzo d'elliſſe *BIF*. Pel punto *F*, che dee appartenere all' elliſſe *CFR* della volta, i cui ſemiaſſi *CK*. *KR*, ſi conduca *FE* ordinata alla detta elliſſe, indi nel piano orizzontale *CX* ſi meni la retta *BE*, che ſarà la projezione del pezzo d'elliſſe *BIF*. Scelto ad arbitrio il punto *L* nella linea *BE*, ſi deſcriva per eſſo la *LI* ordinata all' elliſſe *BIF*, e la linea *GLM* parallela ed eguale a *CK*. Se il fruſto conico è quello che ſi cerca, l' el-

liſſe GIP della volta dee paſſare pel punto I. Per lo ſteſſo punto ſi tagli il fruſto conico con un piano verticale parallelo al $CBHA$, onde ſi generi il quadrante di circolo DIO, i cui raggi QO, QD. Si tiri l'AY parallela a CE, la quale tagli la QO nel punto Z.

Pongo $AC = CB = c$, $CK = GM = a$, $KR = MP = b$, $CE = g$, e per la natura dell' elliſſe CFR avremo $EF = \frac{b}{a}\sqrt{(2ag - g^2)}$, da cui ſottratta $EY = c$, reſta $YF = \frac{b}{a}\sqrt{(2ag - g^2)} - c$. Sia in oltre $GL = CQ = x$, e per conſeguenza $EQ = g - x$. Per la ſimilitudine dei triangoli AYF, AZO avremo

$$AY : YF :: AZ : ZO$$

$$g : \frac{b}{a}\sqrt{(2ag - g^2)} - c :: x : \frac{\frac{bx}{a}\sqrt{(2ag - g^2)} - cx}{g}$$, analogia, che mi dà $ZO = \frac{\frac{bx}{a}\sqrt{(2ag - g^2)} - cx}{g}$. S' aggiunga ad eſſa linea $QZ = c$, e ne riſulterà $QO = \frac{cg - cx + \frac{bx}{a}\sqrt{(2ag - g^2)}}{g}$.

La ſomiglianza dei triangoli ECB, EQL ci ſomminiſtra la proporzione $EC : CB :: EQ : QL$

$$g : c :: g - x : \frac{cg - cx}{g},$$ da cui ſi deduce il valore di $QL = \frac{cg - cx}{g}$. Per l' equazione al circolo DIO abbiamo $(QO)^2 - (QL)^2 = (LI)^2$, cioè ſoſtituendo in cambio di QO, e di QL i ritrovati valori, e cancellati i termini che ſi elidono, $(LI)^2 = \left(\frac{2cbx}{ag} - \frac{2cbx^2}{ag^2}\right) \cdot \sqrt{(2ag - g^2)} + \frac{2b^2x^2}{ag} - \frac{b^2x^2}{a^2}$: ma per l' equazione all' elliſſe GIP, $(LI)^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$

$= 2b^2x$

$= \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}$; dunque $\left(\frac{2cbx}{ag} - \frac{2cbx^2}{ag^2}\right) \cdot \sqrt{(2ag - g^2)} = \frac{2b^2x}{a}$ $- \frac{2b^2x^2}{ag}$, e dividendo per $\frac{2bx}{a} - \frac{2bx^2}{ag}$, $\frac{c}{g} \sqrt{(2ag - g^2)} = b$, equazione che maneggiata determina $CE = g = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, ed $EF = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{(2ag - g^2)} = \frac{2cb^2}{b^2 + c^2}$. Quindi tagliata $CE = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, e condotta l' ordinata *EF* all' ellisse *CFR*, e congiunti i punti *AF* colla linea *AF*, la figura *CAFE* sarà quella, che, girata intorno l' asse *CE*, genererà il frusto conico, che si desidera; il che ecc.

Soluzione sintetica.

Sia (*Fig.* 6.) *Cc* l' asse maggior dell' ellisse della volta. Dividasi nel punto *E* in maniera, che sia $CE : Ec :: (CA)^2 : (KR)^2$, cioè a dire come i quadrati del raggio *CA* della mezzaluna, e del semiasse minore *KR* dell' ellisse della volta. Nel piano orizzontale, che passa per *Cc*, si tirino le linee *BCA*, *bca* normali a *Cc*, e sia $CB = CA$ raggio della mezzaluna. Parallela alle descritte linee si meni *EF* uguale all' ordinata, che nell' ellisse della volta corrisponde all' ascissa *CE*, e per i punti *A F* si tiri la *AFa*, che tagli la *bca* nel punto *a*. Condotta poscia pei punti *B E* la retta *BE*, dico che prorogata interfecherà nel punto *a* le linee *Aa*, *ba*, e che per conseguenza avendo le due ellissi, che nascono dalla sezione della volta, e del frusto conico generato dal giro intorno l' asse *Cc* della figura *CAac*, l' asse maggiore *Ba*, e l' ordinata *EF* comuni, sono perfettamente uguali, e si combaciano mutuamente.

Dimostrazione.

Poichè le linee *CE Ec* stanno in ragione di $(CA)^2 : (KR)^2$, sarà $CE = \frac{2CK \cdot (CA)^2}{(CA)^2 + (KR)^2}$, $Ec = \frac{2CK \cdot (KR)^2}{(CA)^2 + (KR)^2}$, ed il rettan-

golo $CEc = \frac{4(CK)^2.(CA)^2.(KR)^2}{((CA)^2+(KR)^2)^2}$: ma l' ordinata EF all' elliſſe della volta s' eguaglia a $\frac{KR}{CK} \sqrt{Cec}$; dunque $EF = \frac{2CA.(KR)^2}{(CA)^2+(KR^2)}$, e conſeguentemente $BA = 2CA : EF = \frac{2CA.(KR)^2}{(CA)^2+(KR)^2} :: (CA)^2 + (KR)^2 : (KR)^2$. Fatta la riſleſſione, che nella ſteſſa ragione di $(CA)^2 + (KR)^2 : (KR)^2$ ſi riguardano per la coſtruzione le linee $Cc = Al$, $CE = AY$, e che per i triangoli ſimili Ala, AYF, $Al : AY :: Aa : AF$, ſi deduca eſſere $BA : EF :: Aa : Fa$. Quindi le due linee Aa, Ba ſi tagliano nello ſteſſo punto a della linea ba; il che ecc.

COROLLARIO.

Se (*Fig.* 5.) $CA = KR$, il punto E coincide col punto K, la curva BIF diviene un quadrante d'elliſſe, ed il quadrante di fruſto conico ſi cangia in un quadrante di cilindro.

SCOLIO.

Per la natura dell'elliſſe $CZFR$ gli elementi dell' ordinata EF, e dell' aſciſſa CE ſtanno fra loro come $(KR)^2 . FK : (CK)^2 . EF$, o ſoſtituendo i ſimboli analitici come $b^2.\left(a - \frac{2ac^2}{b^2+c^2}\right) = b^2.\left(\frac{ab^2-ac^2}{b^2+c^2}\right) : a^2.\frac{2cb^2}{b^2+c^2}$, e fatte le debite riduzioni, come $b^2 - c^2 : 2ac$. Di ſopra abbiamo trovato $YF : AY :: \frac{b}{a}\sqrt{(2ag-g^2)} - c : g$, e quindi ponendo invece di g lo ſcoperto valore $\frac{2ac^2}{b^2+c^2}$, ne riſulterà dopo i neceſſarj computi $YF : AY :: b^2 - c^2 : 2ac$. Eſſendo dunque gli elementi delle coordinate EF CE come $YF : AY$, la linea AF toccherà l' elliſſe $CZFR$ della volta nel punto F. Per la qual coſa condotta

dalla sommità *A* della mezzaluna all' ellisse *CZFR* la tangente *AF*, e girato intorno il punto *C* l' angolo *CAF*, dimodochè i punti *A F* descrivano i quadranti di circolo *AHB*, *FTS*, genererà la linea *AF* una superficie di frusto conico, che intersecandosi colla superficie della volta ellittica, determinerà la semilunula *BIFAHB*, la projezione del cui contorno *BIF* nel piano orizzontale *CS* è la linea retta *BE*. L' addotta riflessione è confacente alla pratica, e facilita molto la costruzione del frusto conico, e della lunula sovrapposta alla mezzaluna.

PROBLEMA V.

Quadrare la Lunula dell' antecedente Problema IV.

Replicato (*Fig.* 7.) il quadrante di frusto conico della Fig. 5, divido similmente i due raggi *CB ES* nei punti *G*, *M*, e per essi tiro al piano *CS* le normali *GH*, *MP*. Condotta prima la *HP*, indi la *GM*, che intersechi la *BE* nel punto *L*, meno *QLD* parallela a *CB*, *LI* parallela a *GH*, *QO* parallela ad *AC*, e suppongo descritto il quadrante di cerchio *DIO*. Delineo parimente *AY* parallela a *CE*, che tagli la *QO* nel punto *Z*. Sieno *Hh*, *Ii*, *Pp* elementi degli archi simili *BH*, *DI*, *SP* proporzionali ad essi archi, e conseguentemente ai raggi *CB*, *QD*, *ES*.

Faccio, come nel precedente Problema IV, $CA = CB = c$, $EF = ES = \frac{2cb^2}{b^2+c^2}$, $CE = \frac{2ac^2}{b^2+c^2}$, $YF = \frac{cb^2-c^3}{b^2+c^2}$, $AF = HP = BS = \frac{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2}$. Sia $AO = HI = BD = x$, $CG = y$, e per la costruzione $EM = \frac{2b^2y}{b^2+c^2}$.

Osservo essere $EC : EQ :: CB : QL$: ma $EC : EQ :: FA : FO$; dunque $FA : FO :: CB : QL$

$$\frac{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2} : \frac{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2}-x :: c : c(-b^2\cdot c^2).\frac{x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}},$$

cioè a dire $QL = \frac{c(-b^2-c^2).x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}$. Abbiamo altresì

$$BS : BD :: SE : DL$$

$$\frac{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2} : x :: \frac{2cb^2}{b^2+c^2} : \frac{2b^2x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}},$$

analogia che mi dà $DL = \frac{2b^2x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}$. Quindi sarà $QD = c + \frac{(b^2-c^2).x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}$. Poichè per la costruzione

$$CB : QD :: CG : QL$$

$$c : c + \frac{(b^2-c^2).x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} :: y : y + \frac{(b^2-c^2).xy}{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}},$$

scopriremo $QL = y + \frac{(b^2-c^2).xy}{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}$. I due valori di QL ci somministrano l' equazione $\frac{c(-b^2-c^2).x}{\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}} = y + \frac{(b^2-c^2).xy}{c\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}$, da cui si raccoglie

$$\frac{(c-y).\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2+\left(\frac{b^2-c^2}{c}\right).y} = x,$$

e per conseguenza $QD = \frac{2b^2c^2}{b^2c+c^3+(b^2-c^2).y}$. Si fa essere $Hh = \frac{-cdy}{\sqrt{(c^2-y^2)}}$: ma

$$CB : QD :: Hh : Ii$$

$$c : \frac{2b^2c^2}{b^2c+c^3+(b^2-c^2).y} :: \frac{-cdy}{\sqrt{(c^2-y^2)}} : \frac{-2b^2c^2dy}{(b^2c+c^3+(b^2-c^2).y).\sqrt{(c^2-y^2)}};$$

dunque $Ii = \frac{-2b^2c^2dy}{(b^2c+c^3+(b^2-c^2).y).\sqrt{(c^2-y^2)}}$, ed $\frac{Hh+Ii}{2} = \frac{-cdy}{2\sqrt{(c^2-y^2)}} - \frac{2b^2c^2dy}{(b^2c+c^3+(b^2-c^2).y).2\sqrt{(c^2-y^2)}} = \frac{(3b^2c+c^3+(b^2-c^2).y)}{b^2c+c^3+(b^2-c^2).y} \cdot \frac{-cdy}{2\sqrt{(c^2-y^2)}}$. Moltiplicando questa quantità per $HI = x = \frac{(c^2-cy).\sqrt{(4a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2c+c^3+(b^2-c^2).y}$ avre-

mo l' elemento dell' aja della lunula, cioè

$$bHIi = \frac{(3b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y).(c^2 - cy)}{(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y)^2} \cdot \frac{cdy.\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2\sqrt{(c^2 - y^2)}}.$$

Posta $b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y = z$, onde ne risulti $c^2 - cy = \frac{2b^2c^2 - cz}{b^2 - c^2}$, trovo $\frac{(3b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y).(c^2 - cy)}{(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y)^2} = \frac{4b^4c^3 - cz^2}{(b^2 - c^2).z^2} = \frac{4b^4c^3}{(b^2 - c^2).z^2} - \frac{c}{b^2 - c^2}$. Perciò tornando a porre in cambio di z il suo valore, sarà $\frac{(3b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y).(c^2 - cy)}{(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y)^2} = \frac{4b^4c^3}{(b^2 - c^2).(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y)^2} - \frac{c}{b^2 - c^2}$, e conseguentemente $bHIi = \frac{2b^4c^3.\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(b^2 - c^2).(b^2c + c^3 + (b^2 - c^2).y)^2} \cdot \frac{-cdy}{\sqrt{(c^2 - y^2)}} - \frac{1}{2}c.\frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2} \cdot \frac{-cdy}{\sqrt{(c^2 - y^2)}}$ (1.). Compiuto il quadrante di frusto conico $NAFPSBN$, noto che il secondo termine s' eguaglia all' elemento NHb della porzione di superficie conica NBH. E vaglia il vero l' analogia

$$YF : FA :: CA : AN$$

$$\frac{cb^2 - c^3}{b^2 + c^2} : c\frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 + c^2} :: c : c\frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2}$$

ci mostra essere $AN = HN = c\frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2}$, e per conseguenza

$$NHb = \frac{1}{2}c\frac{\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2} \cdot \frac{-cdy}{\sqrt{(c^2 - y^2)}} \quad (2.).$$

Il primo termine lo dispongo così

$$\frac{2b^4c^4\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(b^2 - c^2)^3} \cdot \frac{-dy}{\left(\frac{b^2c + c^3}{b^2 - c^2} + y\right)^2 . \sqrt{(c^2 - y^2)}} \quad (3.),$$

e facendo $\frac{b^2c + c^3}{b^2 - c^2} = m$, prendo a maneggiare la quantità

$\frac{-dy}{(m+y)^2 . \sqrt{(c^2-y^2)}}$. Pongo $m+y = \frac{1}{-u+\frac{m}{m^2-c^2}}$, e dopo le necessarie operazioni trovo $\frac{-dy}{(m+y)^2 . \sqrt{(c^2-y^2)}} =$

$$\frac{udu - \frac{mdu}{m^2-c^2}}{\sqrt{(m^2-c^2)} . \sqrt{\left(\frac{-u^2+c^2}{(m^2-c^2)^2}\right)}}$$

(4.). Anche qui abbiamo due termini. Il primo riceve integrazione, essendo

$$\int \frac{udu}{\sqrt{(m^2-c^2)} . \sqrt{\left(\frac{-u^2+c^2}{(m^2-c^2)^2}\right)}} = \frac{-\sqrt{\left(\frac{-u^2+c^2}{(m^2-c^2)^2}\right)}}{\sqrt{(m^2-c^2)}} = \frac{-\sqrt{(c^2-y^2)}}{(m^2-c^2).(m+y)}$$

$= \frac{(b^2-c^2)^3 . -\sqrt{(c^2-y^2)}}{4b^2c^4\ (cb^2+c^3+(b^2-c^2).y)}$, e moltiplicando per la costante $\frac{2b^4c^4\sqrt{(+a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{(b^2-c^2)^3}$ tralasciata nel maneggio della formola $\frac{-dy}{(m+y)^2 . \sqrt{(c^2-y^2)}}$, avremo la quantità algebraica contenuta nell' integrale della formola (3.) $= \frac{-b^2\sqrt{(+a^2c^2+(b^2-c^2)^2)} . \sqrt{(c^2-y^2)}}{2.(cb^2+c^3+(b^2-c^2).y)}$ (5.). Prorogo la linea CE fino in K, onde sia $CK = a$. e condotta la verticale KV, venga questa tagliata in V dalla linea AF continuata. Per la soluzione sintetica del Probiema IV, è $CE : CK :: 2c^2 : b^2+c^2$; ma $CE : CK :: AF : AV$, ed $AF = \frac{c\sqrt{(+a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2}$; dunque $2c^2 : b^2+c^2 :: \frac{c\sqrt{(+a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{b^2+c^2} : \frac{\sqrt{(+a^2c^2+(b^2-c^2)^2)}}{2c} = AV$.

In oltre per la costruzione del presente Problema

CB : QD :: GH : LI

$c : \frac{2b^2c^2}{b^2c+c^3+(b^2-c^2).y} :: \sqrt{(c^2-y^2)} : \frac{2b^2c\sqrt{(c^2-y^2)}}{b^2c+c^3+(b^2-c^2).y}$, e

perciò $\frac{1}{2} AV . LI = \frac{b^2 \sqrt{(c^2 - y^2)} . \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2 . (b^2 c + c^3 + (b^2 - c^2) . y)}$. La formola (5.) adunque s' eguaglia al prodotto della metà della linea AV nell' ordinata LI.

Prendo ora per mano il secondo termine della formola (4.) $\frac{- \frac{m du}{m^2 - c^2}}{(\sqrt{m^2 - c^2}) . \sqrt{(-u^2 + \frac{c^2}{(m^2 - c^2)^2})}}$, che si riduce alla forma seguente $\frac{m}{c\sqrt{(m^2 - c^2)}} . \frac{\frac{-c}{m^2 - c^2} . du}{\sqrt{(\frac{c^2}{(m^2 - c^2)^2} - u^2)}}$, ed ha per sommatoria $\frac{m}{c\sqrt{(m^2 - c^2)}}$. Arco raggio $\frac{c}{m^2 - c^2}$ seno $\sqrt{(\frac{c^2}{(m^2 - c^2)^2} - u^2)} = \frac{b^2 + c^2}{2b^2}$. Arco raggio $\frac{(b^2 - c^2)^2}{4b^2c^3}$ seno $(\frac{(b^2 - c^2)^2}{4b^2c^3} . \frac{2bc\sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2 c + c^3 + (b^2 - c^2) . y})$ $= \frac{(b^2 + c^2) . (b^2 - c^2)^2}{8b^4c^5}$. Arco raggio b seno $\frac{2b^2 c \sqrt{(c^2 - y^3)}}{b^2 c + c^3 + b^2 - c^2) . y}$. Moltiplicando per la costante $\frac{2b^4c^4 \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(b^2 - c^2)^3}$ ommessa nel maneggiare la formola (3.), ci si presenterà $\frac{1}{2} . \frac{(b^2 + c^2) . \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c . (b^2 - c^2)}$. Arco raggio b seno $\frac{2b^2 c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2 c + c^3 + (b^2 - c^2) . y}$ (6.). Agevolmente dimostrasi essere $NC = \frac{2ac^2}{b^2 - c^2}$, e per conseguenza $NK = \frac{2ac^2}{b^2 - c^2} + a = \frac{a . (b^2 + c^2)}{b^2 - c^2}$. Di sopra ho trovato il valore di $NA = \frac{c\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2}$.

Ora verificandosi l' analogia

$$NC : NA :: NK : NV$$

$$\frac{2ac^2}{b^2 - c^2} : \frac{c\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{b^2 - c^2} :: \frac{a . (b^2 + c^2)}{b^2 - c^2} : \frac{(b^2 + c^2) . \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c . (b^2 - c^2)}$$

abbiamo $NV = \frac{(b^2 + c^2) . \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c . (b^2 - c^2)}$, ed essendo $KR = b$, $LI = \frac{2b^2c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) . y}$, si conchiuda essere

$\frac{1}{2} . \frac{(b^2 + c^2) . \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c . (b^2 - c^2)}$. Arco raggio b seno

$\frac{2b^2c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) . y} = \frac{1}{2} NV$. Arco raggio KR seno LI.

Descritto pertanto sopra la base KR un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa $= NV$, e generato col mezzo di esso un quadrante conico, ed al quadrante di circolo base di detto solido adattata l' ordinata $L'I' = LI$, la corrispondente porzione di superficie conica s' agguaglia alla formola (6.)

Raccogliendo le cose a lungo spiegate, sarà BHI

$= \frac{1}{2} . \frac{(b^2 + c^2) . \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c . (b^2 - c^2)}$. Arco raggio b seno $\frac{2b^2c \sqrt{(c^2 - y^2)}}{b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) . y}$

$- \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}{b^2 - c^2}}$. Arco raggio c seno $\sqrt{(c^2 - y^2)}$

$- \frac{b^2 \sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2) . \sqrt{(c^2 - y^2)}}}{2 . (b^2c + c^3 + (b^2 - c^2) . y)}$

$= \frac{1}{2} NV$. Arco raggio KR seno LI
$- \frac{1}{2} NA$. Arco raggio CA seno GH
$- \frac{1}{2} AV . LI$, e per conseguenza $BHAFIB$
$= \frac{1}{2} NV$. Arco raggio KR seno EF
$- \frac{1}{2} NA$. Arco raggio CA seno CA
$- \frac{1}{2} AV . EF$. Non s' è aggiunta costante; perchè posta GH $= \sqrt{(c^2 - y^2)} = 0$, rettamente si trova $BHI = 0$.

SCOLIO I.

Potrebbe a qualcuno cadere in pensiero, che la presente soluzione non andasse d' accordo collo Scolio I. dopo il Problema III, nel quale ho dimostrato, che posta $CA = KR$ è $BHI = BHPS - HM$. In fatti cancellati i termini eguali a nulla, sembra che si trovi $BHI = \frac{ab^2}{b^2 - c^2}$. Arco raggio c

seno

ſeno $\sqrt{(c^2-y^2)} - \frac{a^2c^2}{b^2-c^2}$. Arco raggio c ſeno $\sqrt{(c^2-y^2)}$ $-\frac{1}{2}a\sqrt{(c^2-y^2)} = a$. Arco raggio c ſeno $\sqrt{(c^2-y^2)} - \frac{1}{2}a$ $\sqrt{(c^2-y^2)} = BHPS - \frac{1}{2}HM$.

Per iſcoprire il fonte del paralogiſmo, ſi deſcriva col raggio $KR=b$ il quadrante $RXIT$, e continuata la linea GM ſino in m, ſi tiri l' ordinata mX, indi ſi accomodi allo ſteſſo quadrante l'ordinata $L'I'=LI$. Faccio $KR=b=c+n$, e ſuppongo n una quantità infinitamente picciola. Eſſendo

$$NC : CA :: NK : KV$$

$$\frac{2ac^2}{b^2-c^2} : c :: \frac{a.(b^2+c^2)}{b^2-c^2} : \frac{b^2+c^2}{2c}$$, ſi trova $KV = \frac{b^2+c^2}{2c}$, e ponendo in luogo di b il ſuo valore $c+n$, $KV = \frac{2c^2+2cn+n^2}{2c} = c+n+\frac{n^2}{2c} = b+\frac{n^2}{2c}$, equazione che ci inſegna eſſere $RV = \frac{n^2}{2c}$ minima del ſecondo grado, e che per conſeguenza fra KV, KR paſſa una ſtrettiſſima adequazione. Quindi i due quadranti deſcritti coi raggi KR, KV ſono una coſa ſteſſa, e la linea NP continuata paſſa nel punto X e la linea NS nel punto T. Abbiamo determinato $BHI = TI.\frac{1}{2}XN - BH.\frac{1}{2}HN - GH.\frac{1}{2}Gm$. S'aggiunga, e ſi ſottri la quantità $I'X.\frac{1}{2}XN$, e ne riſulterà $TX.\frac{1}{2}XN - BH.\frac{1}{2}HN - GH.\frac{1}{2}Gm - IX.\frac{1}{2}XN = BHI$. E poichè $TX.\frac{1}{2}XN - BH.\frac{1}{2}HN = BHXT$, $BHI = BHXT - GH.\frac{1}{2}Gm - IX.\frac{1}{2}XN$.

Cerchiamo ora il valore del termine $IX.\frac{1}{2}XN$. Fatta la rifleſſione eſſere $NC : NK :: CG : Km$,

$$\frac{2ac^2}{b^2-c^2} : \frac{a.(b^2+c^2)}{b^2-c^2} :: y : \frac{(b^2+c^2)}{2c^2}.y$$ ci ſi preſenterà il valore di $Km = \frac{(b^2+c^2)}{2c^2}.y = \frac{(c+n)}{c}.y$, da cui dipende quello di $mX = \frac{(c+n)}{c}.\sqrt{(c^2-y^2)}$. Ma $L'I' = LI$ $= \frac{2b^2c.\sqrt{(c^2-y^2)}}{b^2c+c^3+(b^2-c^2).y} = \frac{(c^2+2cn).\sqrt{(c^2-y^2)}}{c^2+cn+ny}$; dunque ri-

dotti i computi, $mX - LI = \frac{ny}{c^2}\sqrt{(c^2 - y^2)}$. Eſſendo queſta una grandezza infiniteſima, avremo l' analogia

$$Km \quad : \quad KX : : mX - LI \quad : \quad IX,$$

$$= \frac{(c+n)}{c} \quad : c+n \quad : : \frac{ny}{c^2}\sqrt{(c^2 - y^2)} : \quad \frac{n}{c}\sqrt{(c^2 - y^2)}$$ che ci moſtra $IX = \frac{n}{c}\sqrt{(c^2 - y^2)}$. Concioſſiachè $VN = XN = \frac{(b^2 + c^2).\sqrt{(4a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{2c.(b^2 - c^2)}$, ſurrogato in cambio di b il ſuo valore $c+n$, e traſcurate le quantità minime del ſecondo grado, ſcopriremo $ZN = \frac{a(c+n)}{n}$. Perciò $IX.\frac{1}{2}XN = \sqrt{(c^2 - y^2)}.\frac{(ac + an)}{2c} = \sqrt{(c^2 - y^2)}.\frac{1}{2}a = GH.\frac{1}{2}Gm$.

Troveremo adunque per lo Scolio I. dopo il Problema III. $BHI = BH.T - GH.Gm$, e nello ſteſſo tempo ci accorgeremo, che il paralogiſmo naſceva dal traſcurare la quantità finita, e non traſcurabile $IX.\frac{1}{2}XN = GH.\frac{1}{2}Gm$. Quand'anche la differenza fra b e c divenga eguale a nulla, la detta grandezza pareggia ſempre il prodotto $GH.\frac{1}{2}Gm$, ed in queſto caſo il nulla IX moltiplicato nell' infinito dirò così aſſoluto $\frac{1}{2}XN$ produce una grandezza finita $GH.\frac{1}{2}Gm$. La Geometria ha i ſuoi reconditi arcani, e, ſe mi è lecito di uſare un' ardita eſpreſſione, ci fa formare l' idea d' una ſpecie di creazione.

SCOLIO II.

Se cerco il valore della ſottangente dell' elliſſe CFR riſpettivamente al punto F, lo trovo $= \frac{4a^2bc^2}{(b^2+c^2).(b^2-c^2)}$: ma tale è la miſura della linea EN: dunque la linea NAF tocca la nominata elliſſe nel punto F. il che ho parimente provato nello Scolio dopo il Problema IV. Da ciò ne naſce, che ſuppoſta FQ minima, la differenza fra QO, LI è infiniteſima del ſecondo

ordine, ed essendo l'arco OI una menoma porzione del primo ordine del quadrante OID, è finito il raggio QO del suddetto quadrante. Non lascio di notare, che in riguardo alle linee date CA, CK, KR, la nostra lunula è la più lunga, che costruire si possa.

SCOLIO III.

Condotta qualunque altra linea dal punto A all' ellisse CFR, la taglierà in un punto medio fra C ed F. Sia questo, per non moltiplicare le figure, il punto F, ed interverrà, che ad EQ infinitesima corrisponda QO — LI infinitamente picciola dello stesso grado, e che per conseguenza l' arco OI riguardi il suo quadrante di circolo con una proporzione finita, e che il detto quadrante sia fornito d' un raggio minimo, il qual raggio diviene uguale a nulla nel punto F. Anche qui ci si manifesta un mistero della Geometria. Se AF è tangente, al punto F compete il massimo raggio finito EF. Che se AF è secante, al punto F tocca il raggio $= 0$, quantunque l' angolo, che formano la tangente e la secante, sia picciolissimo, purchè finito.

PROBLEMA VI.

Quadrare una Volta ellittica a quattro venti.

La maggior difficoltà consiste nel determinare la superficie del pezzo di volta vicino agli angoli, la cui projezione nel piano orizzontale è un triangolo rettangolo. Si vede espresso questo pezzo di volta $BIFOD$ nella Fig. 1. Sia dunque DOF un quadrante d'ellisse. Pongo $ED = a$, $EF = b$, $BD = c$, $EK = x$, e sarà $Oo = -\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$, $LK = \frac{cx}{a}$, e l' elemento dell' aja $BIOD$, cioè a dire $IOoi = -\frac{cxdx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{a\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$. Facciasi $a^4 - a^2x^2 + b^2x^2 = a^2z^2$, e adempiute le sostituzioni, troveremo $IOoi$

$= \frac{cz^2d^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(z^2-b^2)}}$. Queſta formola ſi diſponga così

$IOoi = \frac{c}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.\left(\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} + dz\sqrt{(z^2-b^2)}\right) + \frac{c}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.$
$\left(\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} - dz\sqrt{(z^2-b^2)}\right) = \frac{c}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.$
$\left(\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} + dz\sqrt{(z^2-b^2)}\right) + \frac{c}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.\frac{b^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}$. Moltiplicando, e dividendo il ſecondo termine per $z+\sqrt{(z^2-b^2)}$, ci ſi preſenterà $\frac{c}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.\left(\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} + dz\sqrt{(z^2-b^2)}\right)$
$+ \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.\left(dz + \frac{zdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}\right):\left(z+\sqrt{(z^2-b^2)}\right) = IOoi$,
ed integrando, $\frac{cz\sqrt{(z^2-b^2)}}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} + \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}\,l\left(z+\sqrt{(z^2-b^2)}\right)$
$= BIOD$. Si debbono prendere i logaritmi nella logiſtica della ſottangente $= 1$ colla condizione, che b ſia il protonumero, a cui corriſponde il logaritmo $= 0$. Si avverta eſſere $BIOD = 0$, quando $EK = x = ED = a$, nella qual circoſtanza la formola $a^4 - a^2x^2 + b^2x^2 = a^2z^2$ determina $z = b$. Fatta la ſoſtituzione, ſcopriremo $BIOD = \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}\,lb = 0$, come in fatti dee ritrovarſi. Pongo invece di z il ſuo valore eſpreſſo per x, e mi ſi affaccia

$$BIOD = \frac{c\sqrt{(a^4(-a^2+b^2).x^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{2a^2} + \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.$$
$$l\left(\frac{\sqrt{(a^4(-a^2+b^2)x^2} + \sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right);$$

il che ecc.

COROLLARIO I.

Mettendo $x = o$, avremo l' intera ſuperficie $BIFOD = \frac{ca}{2}$

$$+ \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} l\left(a + \sqrt{(a^2-b^2)}\right).$$

COROLLARIO II.

Se $a = b$, è $IOoi = - \frac{cxdx\sqrt{(a^4(-a^2+b^2).x^2)}}{a^2\sqrt{(a^2-x^2)}} = - \frac{cxdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, e ſenza biſogno d' artificj ſi paſſa all' integrazione, onde s' abbia $BIOD = c\sqrt{(a^2-x^2)}$. Quando $x = o$, ſi trova $BIFOD = ac$, cioè a dire la mentovata ſuperficie doppia del triangolo BED, come ho notato nel Corollario dopo lo Scolio del Problema III.

SCOLIO.

Nella ſteſſa ſuppoſizione di $a = b$ ricorrendo alla ſoluzione generale ſcopriremo $BIOD = \frac{c\sqrt{(a^2-x^2)}}{2} + \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$. $l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right)$. Dovendoſi neceſſariamente accordare le due ſoluzioni generale, e particolare, egli è d' uopo provare che ſia

$$\frac{c\sqrt{(a^2-x^2)}}{2} = \frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} . l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right).$$

Fingaſi che a ſuperi b per una quantità infiniteſima. Procedendo con tutto rigore avrei in queſta ſuppoſizione

$$l\left(\frac{\sqrt{(a^4(-a^2+b^2).x^2)} + \sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right)$$

$$= l\left(a \frac{(-a^2+b^2)}{2a^2} . x^2 + \frac{\sqrt{(a^2-b^2)} . \sqrt{(a^2-x^2)}}{a}\right)$$: ma a^2-b^2

è infinitamente più picciola di $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; dunque rettamente ho supposto il predetto logaritmo $= l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}\right)$. Alla logistica (*Fig.* 8.) *GFD* della sottangente $BE = 1$ s'accomodi l'ordinata $EF = b = a$, a cui corrisponde il logaritmo nulla. Sia $AD = a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$, e condotta *FC* parallela ad *EA*, resterà la menoma $CD = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$. Si meni al punto *F* la tangente *FB*. Per la similitudine dei triangoli *FED*, *DCF* avremo

$$FE : EB :: DC : CF$$

$$a : 1 :: \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} : \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^2}$$

e conseguentemente $CF = l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}\right) = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^2}$, e moltiplicando per $\frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}}$,

$$\frac{cb^2}{2\sqrt{(a^2 - b^2)}} \cdot l\left(a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}\right) = \frac{cb^2}{2a^2}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$= c\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2}$; il che ecc.

PROBLEMA VII.

Quadrare il pezzo di Volta tagliato fuori dalla lunula del Problema IV.

La metà del pezzo di volta, che si vuol quadrare, si è (*Fig.* 5.) *BCFIB*, la cui projezione nel piano orizzontale è il triangolo *BCE*. Pel punto *T* (*Fig.* 6) si tiri *TZ* parallela ed eguale a *KC*. Poste, come nel Problema IV, $CK = ZT = a$, $KR = b$, $BC = c$, $CE = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, l'analogia

$$EC \quad : \quad CB \quad :: \quad TZ \quad : \quad ZB$$

$\frac{2ac^2}{b^2+c^2} \quad : \quad c \quad :: \quad a \quad : \quad \frac{b^2+c^2}{2c}$, c' insegna essere $ZB = \frac{b^2+c^2}{2c} = C$; e quindi ne risulta $ST = EK = a - \frac{2ac^2}{b^2+c^2} = \frac{ab^2 - ac^2}{b^2+c^2}$, $ES = \frac{b^2+c^2}{2c} - c = \frac{b^2-c^2}{2c}$. Nominata x la qualunque TS, sarà, per l' antecedente Problema VI. l' aja della volta, la cui projezione orizzontale $BZSE$, uguale a

$$C\sqrt{\frac{(a^4(-a^2+b^2).x^2).\sqrt{(a^2-x^2)}}{2a^2}} + \frac{Cb^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}.$$

$$l\left(\sqrt{\frac{(a^4(-a^2+b^2).x^2)+\sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}}\right)$$

$$= \frac{(b^2+c^2)}{4a^2c}\sqrt{(a^4(-a^2+b^2).x^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{(b^4+b^2c^2)}{4c\sqrt{(a^2-b^2)}}.$$

$l\left(\sqrt{\frac{(a^4(-a^2+b^2).x^2)+\sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}}\right)$, sostituendo in vece di C il suo valore. Se $TS = x$, ne risulta $ZS = a - x$, $SE = \frac{(b^2+c^2).x}{2ac}$, l' arco ellittico corrispondente all' ascissa $ZS = CE\int - \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$, ed il pezzo di volta corrispondente al rettangolo $ZE = \frac{(b^2+c^2).x}{2ac}$

$\int - \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + a^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$. Avremo pertanto l' aja della volta relativa al triangolo $BCE = \frac{(b^2+c^2)}{4a^2c}\sqrt{(a^4(-a^2+b^2)x^2)}.$

$$\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{(b^4+b^2c^2)}{4c\sqrt{(a^2-b^2)}}.l\left(\sqrt{\frac{(a^4(-a^2+b^2)x^2+\sqrt{(a^2-b^2)}.\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}}\right)$$

$- \frac{(b^2-c^2)}{2ac}.x.\int - \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}}$, e quando sia $x = EK = \frac{ab^2 - ac^2}{b^2+c^2}$, ne risulterà la superficie della volta

$$(\textit{Fig. } 5.)\ BCZFIB = \frac{b^2}{2.(b^2+c^2)}\sqrt{(b^4+4a^2c^2+c^4-2b^2c^2)}$$
$$+\frac{(b^4+b^2c^2)}{4c\sqrt{(a^2-b^2)}}\,l\left(\frac{b\sqrt{(b^4+4a^2c^2+c^4-2b^2c^2)}+2bc\sqrt{(a^2-b^2)}}{b2+c^2}\right)$$
$$\left(-\frac{b^2+c^2}{2c}\right)CZF.$$

PROBLEMA VIII.

Determinare i diametri dei circoli, che formano la Volta d' una lunula, la cui projezione nel piano orizzontal sia un triangolo, quando la linea collocata nella sua sommità, che la divide in due parti eguali, taglia l' ellisse della Volta del vaso.

Richiedono frequentemente le circostanze, che la linea, la quale passa per le sommità dei circoli, che formano la volta d'una lunula, la cui projezione nel piano orizzontale sia un triangolo, tagli, e non tocchi l'ellisse della volta del vaso. In tale supposizione egli è d' uopo determinare i diametri variabili dei circoli mentovati. Sia (Fig. 9.) *BHAFIB* la metà d'una delle nostre lunule, e la linea *AF* collocata nella sua sommità tagli nel punto *F* l'ellisse *CPF* della volta del vaso. Nel lato *CE* del triangolo *BCE* projezione nel piano orizzontale della predetta lunula, segno ad arbitrio il punto *Q*, e per esso conduco *QO* parallela a *CA*, *QL* parallela a *CB*. Il piano *OQL* tagli nel punto *I* la porzione d'ellisse *BIF*, che forma il semiperimetro della lunula, e menata la retta *OI*, sia ad essa normale la *IM*, la quale interséchi la *OQ*, se fa di bisogno, continuata nel punto *M*; egli è certo che *OM* sarà il diametro del circolo, che passa pei punti *O*, *I*. Collo stesso artificio si troveranno i diametri di tutti gli altri circoli, che formano la volta *BHAFIB* della lunula. Prorogata la linea *AC* fino in *D*, di modo che sia *CD* = *CA*, le estremità inferiori dei detti diametri saranno collocate nella curva *DMF*, che passa pei punti *D*, *F*, e di cui m'accingo a cercar l' equazione. Pel punto *L* situato a piombo del punto *I* si tiri *LG* parallela a *QC*, *LI* verti-

cale

cale e parallela a QO, ed ordinata all' elisse GI della volta del vaso. Si menino in oltre IP parallela ad LQ, AY parallela a CE.

Ritenute le denominazioni del Problema IV, sia $CK = a$, $KR = b$, $CA = CD = c$, $CE = AY = g$, e per conseguenza $EF = \frac{b}{a}\sqrt{(2ag - g^2)}$, $YF = \frac{b}{a}\sqrt{(2ag - g^2)} - c$. Sia parimente $GL = CQ = x$, e quindi $EQ = g - x$, $ZO = \frac{bx\sqrt{(2ag - g^2)} - acx}{ag}$,

$$QO = \frac{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)}}{ag},\ QL = PI = \frac{cg - cx}{g},$$

$$LI = QP = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)},\ PO = QO - QP$$

$$= \frac{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ax - x^2)}}{ag}.$$ Per la proprietà del circolo abbiamo

$$OP : PI :: PI : PM,$$

$$\frac{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ax - x^2)}}{ag} : \frac{cg - cx}{g} :: \frac{cg - cx}{g}$$

analogia, che mi suggerisce il valore di

$$PM = \frac{ac^2.(g^2 - 2gx + x^2)}{acg^2 - acgx + bgx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg^2\sqrt{(2ax - x^2)}}.$$

Aggiungo allo stesso il valore di OP, e trovo il diametro cercato $OM = \frac{acg - acx + bx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ax - x^2)}}{ag}$

$$+ \frac{ac^2.(g^2 - 2gx + x^2)}{acg^2 - acgx + bgx\sqrt{(2ag - g^2)} - bg^2\sqrt{(2ax - x^2)}};$$ il che ecc.

COROLLARIO I.

Posta come nel Problema IV, $CE = g = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$, onde sia $EF = \frac{b}{a}\sqrt{(2ag - g^2)} = \frac{2cb^2}{b^2 + c^2}$, si trova $OM = 2\,OQ = 2c - \frac{2acx + 2bx\sqrt{(2ag - g^2)}}{ag} = 2c + \frac{(b^2 - c^2).x}{ac}$.

COROLLARIO II.

Se $CQ = x = 0$, si scopre $OM = AD = 2c$, e quindi la curva DMF passa pel punto D.

COROLLARIO III.

Se $CQ = x = CE = g$, ci vuole un po d'artificio per iscoprire, che $OM = 0$, purchè sia $g < \frac{2ac^2}{b^2 - c^2}$. Si faccia $EQ = g - x = z$, e posta in opera la sostituzione, ci si presenterà OM

$$= \frac{acz + (bg - bz)\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ag - g^2 - 2az + 2gz - z^2)}}{ag}$$

$$+ \frac{ac^2z^2}{g.(acz + (bg - bz)\sqrt{(2ag - g^2)} - bg\sqrt{(2ag - g^2 - 2az + 2gz - z^2)})}$$

Quando $EQ = z$ è infinitamente picciola, abbiamo

$$\sqrt{(2ag - g^2 - 2az + 2gz - z^2)} = \sqrt{(2ag - g^2)}\ \frac{-az + gz}{\sqrt{(2ag - g^2)}}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}a^2z^2}{(2ag - g^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Egli è necessario in questo caso il tener conto anche della grandezza infinitesima del secondo grado $- \frac{\frac{1}{2}a^2z^2}{(2ag - g^2)^{\frac{3}{2}}}$. Surrogato il detto valore, scopriremo dopo i necessarj calcoli $OM = \frac{z(c\sqrt{(2ag - g^2)} - bg)}{g\sqrt{(2ag - g^2)}}$

$$+ \frac{\frac{1}{2}abz^2}{(2ag - g^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^2z\sqrt{(2ag - g^2)}}{g.(c\sqrt{(2ag - g^2)} - bg) + \frac{\frac{1}{2}abg^2z}{2ag - g^2}}.$$ Nella supposizione di $g = \frac{2ac^2}{b^2 + c^2}$ è $c\sqrt{(2ag - g^2)} - bg = 0$, e quindi cancellato oltre il primo anche il secondo termine relativamente nullo in riguardo al terzo, si trova OM

$$= \frac{2c^2(2ag - g^2)^{\frac{3}{2}}}{abg^2} = \frac{4b^2c}{b^2 + c^2},$$ valore che in fatti compete nel

Problema IV alla linea $2EF$. Che se $g < \frac{2ac^2}{b^2+c^2}$, qualmente si suppone nel presente Problema, la quantità $c\sqrt{(2ag-g^2)} - bg$ è finita, e perciò nel denominatore del terzo termine si dee cancellare la grandezza rispettivamente nulla $\frac{\frac{1}{2}abg^2z}{2ag-g^2}$, onde trascurato altresì come sopra il secondo termine, s'abbia $OM = \frac{z.(c\sqrt{(2ag-g^2)}-bg)}{g\sqrt{(2ag-g^2)}} + \frac{z.(c^2\sqrt{(2ag-g^2)})}{g.(c\sqrt{(2ag-g^2)}-bg)}$, equazione da cui s'impara, che ad $EQ = z = 0$ ci corrisponde nel punto F il diametro $OM = 0$.

Sembrando cosa strana, che nel Problema IV all' assissa CE ci corrisponda il massimo diametro $2EF$, e nel presente Problema all'assissa segnata colle stesse lettere il minimo diametro $= 0$, massimamente che il motivo di questo gran cangiamento dipende dai valori delle assisse mentovate, che possono essere vicinissimi all' egualità, purchè sia finita la loro differenza, non ho voluto risparmiar parole, onde anche col mezzo dell' Analisi si scopra la cagione dell' inaspettato passaggio dal massimo al nulla.

COROLLARIO IV.

Posto che sia $CE = g = CB = c$, troveremo $OM = \frac{ac^2 - acx + bx\sqrt{(2ac-c^2)} - bc\sqrt{(2ax-x^2)}}{ac} + \frac{ac.(c^2-2cx+x^2)}{ac^2 - acx + bx\sqrt{(2ac-c^2)} - bc\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Fanno un ottimo effetto queste lunule nelle volte a quattro venti; perchè l'elisse BIF è uguale, e parallela a quella, ch'è situata diagonalmente negli angoli del vaso, e separa le volte dei due lati, che stanno fra loro in angolo retto.

COROLLARIO V.

Che se in oltre sarà $YF = 0$, ed $EF = c$, avremo $OM = \frac{ac - b\sqrt{(2ax-x^2)}}{a} + \frac{a.(c^2-2cx+x^2)}{ac-b\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Nei tempj ad

una sola nave le lunule di questa fatta cingono gli archi maggiori, e la saetta $KR = b$ della volta si determina in maniera, che la linea AF sia orizzontale, e l'angolo CBE retto. Si ottiene ciò, quando sia $KR = b = \frac{ac}{\sqrt{(2ac - c^2)}}$.

Le lunule ascendenti del Corollario IV, si pongono nelle dette Chiese al di sopra degli archi minori. Chiamato C il raggio dell' arco maggiore compreso l' archivolto, ed essendosi stabilito $KR = b = \frac{aC}{\sqrt{(2aC - C^2)}}$, si troverà $EF = \frac{b}{a}$

$$\sqrt{(2ac - c^2)} = \frac{C\sqrt{(2ac - c^2)}}{\sqrt{(2aC - C^2)}}.$$

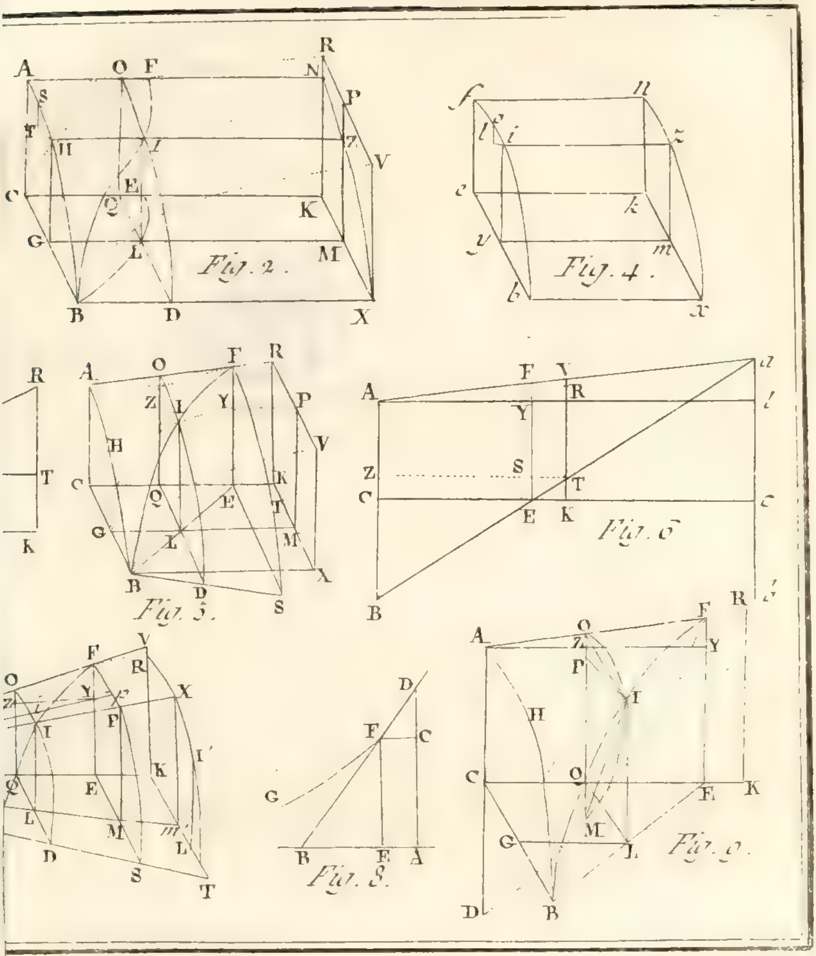


Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 6
Fig. 8.
Fig. 9.

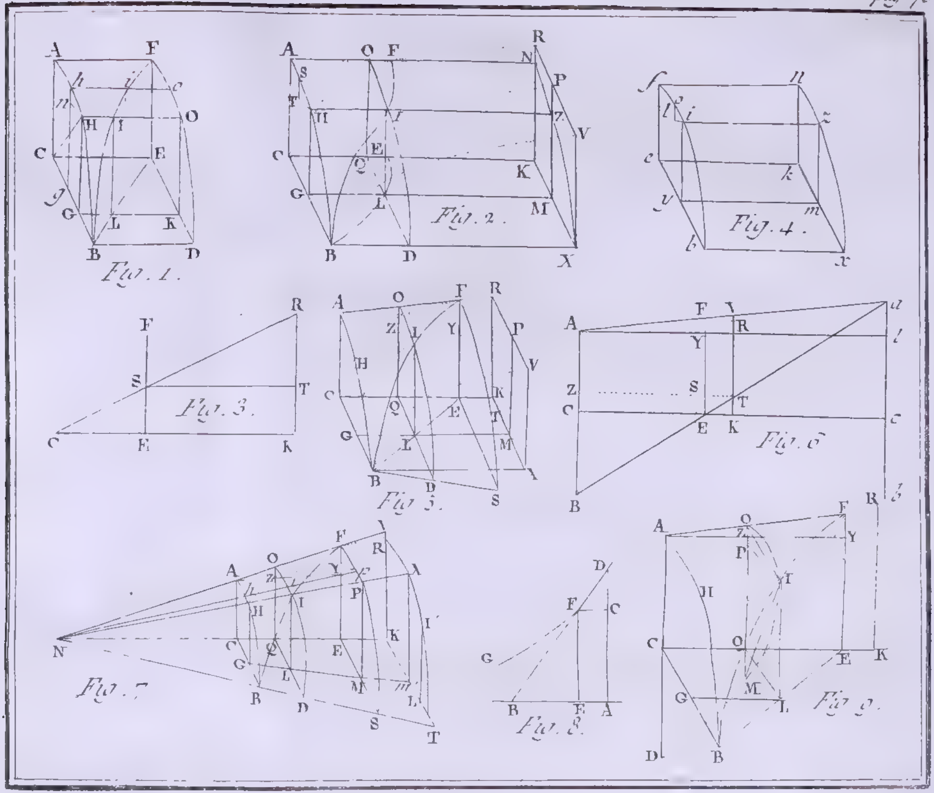


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

DELLA LONGITUDINE

DI VERONA

DETERMINATA CON OSSERVAZIONI ASTRONOMICHE

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI.

LA longitudine di Verona è ſtata infino ad ora maliſſimo conoſciuta. Il rinomato *d' Anville* nella ſua Analiſi geografica dell' Italia la ſtabiliſce in 28° 23': nella ſua Carta dell' Italia la ſitua ne' 28° 33'. In una carta anonima del territorio Veroneſe, che porta la data del 1745, ed è la più ricevuta nel paeſe comunemente, la Città è collocata ai 28° 50': in quella dell' Ab. *Santini* del 1776 ai 28° 35'. Vi ha dunque nelle carte geografiche una diſcrepanza di 17', che in tal latitudine corriſpondono a più di dodici miglia d' incertezza ſulla poſizione d' una città, la qual vanta il primato in Italia dopo le metropoli.

Se ſi guarda poi l' autorità degli Aſtronomi, che in queſta materia ſono i ſoli giudici competenti, ſi trova che tanto nelle Efemeridi di Vienna, di cui tengo il Tomo pel 1783, come nella Conoſcenza de' Tempi di Parigi, di cui poſſedo la ſerie da 1752 fino a 1790 (del cangiamento fatto in quella del 1791 ſarà detto in appreſſo), e così ancora nelle eccellenti Efemeridi Milaneſi che attinſero ciò da que' fonti, la longitudine di Verona è ſtata regiſtrata 8° 58' 30" all' oriente del meridiano del Reale Oſſervatorio di Parigi. Supponendo di 20° col *d' Anville* la longitudine di Parigi, dalla di lui Analiſi alle citate Efemeridi corre un divario di 35' 30", il qual coſtituiſce più di 25 miglia d' incertezza ſulla ſituazion di Verona da levante a ponente.

Toſto che dalle parche mie facoltà s' è potuto condurre a

termine la fabbrica della Specola in una casa acquistata a bella posta, e la collocazione degl' Istromenti non affatto spregevoli che ho da Parigi tradotti, le prime cure e fatiche sono state senza dubbio da me rivolte a determinare la latitudine e la longitudine del luogo della Terra, dove dimoro ed intendo alle osservazioni astronomiche. Non tardai ad accorgermi che la seconda era notabilmente diversa da tutte le quantità già enunziate: e questa scoperta m' inspirò il desiderio e mi fece conoscere l' importanza di aspirare all' ultima esattezza possibile in tale determinazione. Risolsi pertanto di trarla unicamente da osservazioni le più sicure, come son quelle d' eclissi di sole, e d' occultazioni di stelle, rigettando del tutto i satelliti di Giove, i passaggi della Luna al meridiano, ed altri mezzi di gran lunga inferiori ai due primi. Ma perchè appunto i fenomeni più propizj intervengono più di rado, ed inoltre mi trovai privo talvolta d' osservazioni straniere da comparare alle mie; perciò se due anni mi son passati nella presente investigazione, confido che ogni discreto sia per concedere, che non essendo essa urgente, più debba meritar lode la sicurezza di quel che sia la sollecitudine.

La Torre maggiore della città di Verona, quella che d' altezza gareggia con le più rinomate, e fa degnamente i primi inviti al forastiere ancor ben lontano, siede 8° 40′ 39″ all' oriente dell' Osservatorio regio di Parigi: e questa mia determinazione è fondata sopra le osservazioni di un eclissi di sole, e di sei occultazioni di stelle. La maggior discordia dall' uno all' altro tra i risultamenti di questi sette fenomeni va a 3″ di tempo; laonde mi giova credere, che la quantità media non admetta per così dire la minima incertezza.

Eccomi a riferire le mie osservazioni, non che le altrui che ho prese a confronto, e che d' altre longitudini porgono ottime determinazioni.

I. Occultazione di η de' Gemelli a' 26 Novembre 1787.

Parigi, *Meſſier*;	Imm.	11^h	33′	39″,5	t.v. *hôtel des mathurins*	
	Em.	12	42	24	dal diſco oſcuro	
Le François;	Em.	12	42	29	*au Collége royal*	
Milano, Ceſaris;	Imm.	12	11	30	Differ. de'merid.	27′25″
	Em.	13	16	58	. . . .	27 25
Padova, Chiminello;	Em.	13	32	21,5	. . . .	38 10

Le due oſſervazioni di Milano paragonate alle tre di Parigi danno 27′ 25″ per differenza de' meridiani: qual fu appunto ſtabilita dal Sig. *Du Séjour* con due ecliſſi ſolari (*Mémoires* 1771 *pag.* 239), e dai valentiſſimi Aſtronomi di Brera per moltiplici oſſervazioni adottata nelle loro Efemeridi da 1777 in poi. Queſta ſervirà qualche volta di confronto unico alle mie oſſervazioni.

II. Occultazione di η de' Gemelli a' 20 Gennajo 1788.

Parigi, *Meſſier*;	Imm.	10^h	37′	36″,2	nel diſco oſcuro	
	Em.	11	48	37		
Méchain;	Imm.	10	37	34	*à l'Obſervatoire royal*	
	Em.	11	48	35,2		
Marſiglia, *Bernard*;	Imm.	11	0	0	Differ. de'merid.	12′14″
Padova, Chiminello;	Imm.	11	32	32,6	. . . . . .	38 10
Verona, Cagnoli;	Em.	12	37	23	. . . . . .	34′41″

III. Ecliſſi di Sole de' 4 Giugno 1788.

					Diff. de'mer. con Parigi
Greenwich, *Maskelyne*;	Principio	19^h	24′	46″,5	
	Fine	21	1	25,5	
Mittau, *Beittler*;	Principio	21	20	15 . . .	1^h 25′ 41″
	Fine	23	8	52 . . .	1 25 44
Viviers	Fine	21	16	17 . . .	9 18
Marſiglia, *Bernard*;	Fine	21	17	16,5 . .	12 12
Bologna, Matteucci;	Fine	22	3	45,5 . .	36 7
Verona, Cagnoli;	Fine	22	1	52,5 . .	34 42

Ho cercato primieramente l' error delle tavole in latitudine dalle due seguenti fasi da me osservate intorno al mezzo dell' ecliſſi.

Porzione illuminata 13′ 18″,7 a 20^h 54′ 49″
Porzione illuminata 13 34,5 a 21 1 36

Ne ho conchiuſo che le tavole del *Mayer* davano la latitudine troppo grande di 5″, il qual errore nè più nè meno ricavasi dalla comparazione tra loro delle due eccellenti osſervazioni di *Greenwich*. Queste accuſavano in oltre la longitudine lunare delle tavole d'eſser troppo grande di 3″; ma ciò non può admetterſi ripugnandovi la congerie delle altre oſſervazioni. Ogni errore ſulla longitudine lunare è ſparito aumentando la differenza de' meridiani tra *Greenwich* e Parigi da 9′ 16″ a 9′ 21″, che affatto ſi accoſta all' ipoteſi di 9′ 20″ la qual ſembra preponderare da poco in qua.

Come poi alla ſuppoſizione di 9′ 16″, che feci ne' primi calcoli, corriſpondeva proſſimamente l' ipoteſi di 34′ 45″ per differenza di longitudine tra Parigi e Verona, così ſul fondamento d'una mia lettera ſcritta in allora a Parigi è ſtata introdotta per la prima volta nella Conoſcenza de' tempi pel 1791 la ſuddetta quantità di 34′ 45″, che io m'era già riſerbato di meglio diſcutere ed appurare.

IV. Occultazione di π del Sagittario a' 19 Giugno 1788.

Marſiglia, *Bernard*; Imm. 9^h 23′ 9″
Em. 10 40 51 dal diſco oſcuro
Verona, Cagnoli; Em. 11 17 28,5 Diff. de' mer. con Parigi 34′ 43″.

In queſto calcolo ho ſuppoſto di 12′ 13″ la differenza dei meridiani tra Parigi e Marſiglia, che è il mezzo cavato dalle oſſervazioni precedenti II, III.

V. Occultazione di 2α del Cancro a' 22 Ottobre 1788.

Verona, Cagnoli; Em. 13^h 20′ 44″ dal diſco oſcuro.

Non ho ancora ottenuto oſſervazioni ſufficienti a determinare gli errori delle tavole lunari.

VI.

VI. Occultazione di e del Lione a' 11 Febbrajo 1789.

Marſiglia, *Bernard*; Em. $15^h 17' 17''$ dal diſco oſcuro
Verona, Cagnoli; Imm. 14 37 16,5 } Differ. de' mer. con
Em. 15 40 36,5 } Parigi 34' 43''

L' oſſervazione di Marſiglia è ſtata certamente notata 7' più tardi per error di ſcrittura, e deve ſtare a $15^h 10' 17''$, giacchè in queſto modo ſi accorda a puntino con le mie, poſta la differenza de' meridiani tra Parigi e Marſiglia 12'13''.

VII. Occultazione di 2α del Cancro a' 8 Marzo 1789.

Verona, Cagnoli; Imm. $9^h 28' 34'',5$ nel diſco oſcuro.
Mi mancano oſſervazioni corriſpondenti.

VIII. Occultazione di e del Lione a' 7 Aprile 1789.

Padova, Chiminello; Imm. $12^h 45' 31'' \frac{1}{4}$
Differ. de mer. con Parigi 38' 10''
Verona, Cagnoli; Imm. 12 41 8 . . . . . 34 42

Queſte due oſſervazioni, degne di maſſima fiducia perchè d' immerſione nel diſco oſcuro, danno ſteſſiſſimo l'error delle tavole — 8'',7 nella diſtanza de' centri, poſte le differenze de meridiani con Parigi come ſopra. Ma quella di Padova è già determinata dalle oſſervazioni concordiſſime I, II. Poſciachè dunque le differenze apparenti di longitudine e di latitudine, trovate col calcolo, ſono per Padova 15' 59'',1; 4 21'',0: e per Verona 15' 55'',3; 4' 33',1: è coſa evidente, che qualunque ſiano i piccioli errori nella longitudine e nella latitudine delle tavole, partorir devono errore uguale ſulla diſtanza de' centri dell' uno e dell' altro calcolo. Dunque le differenze de' meridiani aſſunte ſi confermano a maraviglia ſcambievolmente.

IX. Occultazione di 11 *della Libra a'* 2 *Luglio* 1789.

Milano, Cefaris;	Imm.	$9^h\ 48'\ 46'', 5$	nel difco ofcuro		
	Em.	11 3 46, 0			
Parigi, *Méchain*;	Imm.	9 7 8			
Trans, *Bernard*;	Imm.	9 35 50	Diff. de'mer. con Parigi	16' 43''	
Padova, Chiminel.	Imm.	10 3 53	. . . .	38 10	
Verona, Cagnoli;	Imm.	9 58 54, 5	. . . .	34 41	

Dedotti gli errori delle tavole dalle offervazioni di Milano, il piccolo errore + 2'', 3 trovato, dopo tal correzione, fulla diftanza de'centri, apparve lo fteffo affatto nelle altre quattro offervazioni, mentre le differenze apparenti di longitudine e di latitudine non differifcono fenfibilmente ne'quattro calcoli. Dunque le differenze de'meridiani affunte ecc.

X. Occultazione di 1α *del Cancro a'* 15 *Settembre* 1789.

Verona, Cagnoli;	Imm.	$16^h\ 10'\ 30''$
	Em.	17 10 33, 5

L' errore fulla diftanza de' centri nel calcolo dell' immerfione è + 1'', 9; in quello dell' emerfione — 1'', 5. Quefta conformità degli errori con fegno contrario è una prova di molto pefo per la bontà delle due offervazioni, quando le differenze apparenti di longitudine e di latitudine da un calcolo all' altro fono preffo poco uguali, giacchè allora fe anche abbiavi alcun errore nella longitudine terreftre affunta, gli errori delle tavole non lafciano di produrre uguale effetto con fegno contrario fulle due diftanze de' centri. Non ho ottenuto ancora offervazioni ftraniere di quefta occultazione, le quali godano dell' accennata teftimonianza di bontà, e fiano per confeguenza atte a manifeftare gli errori delle tavole.

XI. Occultazione di 1α *del Cancro a'* 6 *Dicembre* 1789.

Milano, Cefaris;	Imm.	$12^h\ 28'\ 9'', 3$	
	Em.	13 36 11, 2	dal difco ofcuro
Verona, Cagnoli;	Em.	13 45 54, 5	Diff. de' mer. con Parigi 34' 44''

CONCLUSIONE.

Differenza de' Meridiani tra Parigi e Verona.

II	34′ 41″
III	42
IV	43
VI	43
VIII	42
IX	41
XI	44
Mezzo	34′ 42″

Differenza de' Meridiani tra Parigi e Padova.

I	38′ 10″
II	10
VIII	10
IX	10

Tanta concordia non può paſſare ſenza un tributo di lode al pregiato amico e diligentiſſimo oſſervatore.

Differenza de' Meridiani tra Parigi e Marſiglia.

II	12′ 14″
III	12
Mezzo	12′ 13″

Se dalla longitudine di Verona per riſpetto a Parigi 34′ 42″ ſi ritrocede a conchiudere quella di Marſiglia, ſi ha 12′ 12″ tanto dalla IV quanto dalla VI oſſervazione; e queſta quantità ſi avvicina anche più a quella di 12′ 7″ adottata nella Conoſcenza de' Tempi.

Differenza de' Meridiani con Parigi.

Viviers,	III,	9′ 18″
Trans in Provenza,	IX,	16 43
Bologna,	III,	36 7
Mittau,	III,	1^h 25′ 43″

Ora tornando alla longitudine del mio Osservatorio, ella è dunque di 34′ 42″ di tempo, o sia di 8° 40′ 30″ all'oriente del meridiano di Parigi. Riducendola alla Torre maggiore della città, che è distante dalla mia Specola tese 109 sotto un azzimutto orientale di 106° 9′, risulta la differenza di longitudine da Verona a Parigi di 34′ 42″, 6, o sia di 8° 40′ 39″.

Tutti i calcoli delle osservazioni addotte in questa Memoria sono stati fatti col metodo esposto accuratamente nella mia Dissertazione, che ha conseguito il premio dall'Accademia di Coppenaghen (*Méthode pour calculer les longitudes géographiques etc. Vérone chez Ramanzini* 1789). Dopo l'esperimento di tanti calcoli sono in grado di aggiungere alle cose dette nell'accennata Dissertazione due utili avvertimenti.

1.° Ho stabilito in quella (43), che due osservazioni d'uno stesso fenomeno, ancorchè fatte in luoghi diversi ma di posizione nota, bastano per determinare col mezzo delle equazioni proposte gli errori delle tavole lunari. Questo è verissimo in generale: ma se ognuna delle due osservazioni è dello stesso nome, cioè per esempio se sia immersione tanto una che l'altra, e se i paesi dove furono fatte non siano tra loro rimoti considerabilmente; in tal caso non essendovi divario sensibile nel valore degli elementi dall'una all'altra osservazione, l'errore delle equazioni può esser grande per ogni piccolo error delle osservazioni. Allora si migliora condizione ricorrendo al ripiego esposto nell'altro avvertimento, che segue.

2.° Nella mentovata Dissertazione ho fermato (47), che per determinare una longitudine terrestre sono necessarie tre osservazioni d'uno stesso fenomeno, due delle quali possono esser fatte, ed anche tutte tre in eclissi di sole, nel luogo di cui si cerca la longitudine. Questo è pur vero generalmente parlando. Ma ho notato un caso, che non è raro, nel quale due sole osservazioni bastano. Il caso è quando entrambe le osservazioni essendo dello stesso nome, ed una fatta in luogo noto di posizione, le differenze apparenti di longitudine e di latitudine siano d'egual valore appresso poco in ambi i calcoli. Allora l'ipotesi giusta per la longitudine cercata sa-

rà quella che darà nella diſtanza de' centri lo ſteſſo errore, che è prodotto dal calcolo dell' oſſervazione fatta nel luogo conoſciuto. Se n'è veduto l'eſempio di ſopra VIII.

Devo poi dichiarare, che ne' calcoli delle Occultazioni addotte in queſta Memoria ho fatto uſo degli elementi che ſeguono. Per il luogo delle ſtelle ho preſo la quantità media tra i Cataloghi di *la Caille*, *Mayer* e *Bradley*. Per ridurlo al tempo dell'oſſervazione ho adoperato la preceſſione in longitudine 50″, 252. Per calcolare la variazione ſecolare in longitudine e latitudine ho ſuppoſto di 57″ la diminuzione dell' obliquità dell'eclittica. Per la parallaſſe della luna ho adottato lo ſchiacciamento della Terra di $\frac{1}{310}$ ſecondo la teoria. I piccoli errori, che poſſono eſſere in queſti elementi, devono influire preſſo poco egualmente in ognuna delle oſſervazioni d'uno ſteſſo fenomeno, atteſa la vicinanza de' luoghi ove furono fatte, ed il poco divario nelle differenze apparenti di longitudine e di latitudine da un calcolo all'altro: ſembra però che non ſiavi ragion di temere alterazioni ſenſibili ſulle differenze de' meridiani dedotte. Ho poi notato le faſi nel diſco oſcuro della luna, ſiccome quelle che poſſono meritare maggior fiducia.

Mi reſta da render conto del modo come procedo per ottenere accuratamente il moto orario lunare, giacchè uno de' maſſimi fonti di celerità nel metodo da me eſpoſto nella citata Diſſertazione conſiſte in prendere il luogo della luna dalle efemeridi, e non dalle tavole. Per maggiore approſſimazione ſon ſolito bensì tener conto delle ſeconde differenze, al qual fine è ſommamente comoda la tavola del Sig. *Guerin* che ſi trova nella Conoſcenza de' tempi pel 1771. Fatto in tal modo un primo calcolo, per aver poi con molta eſattezza (*avec une très grande préciſion*. la Lande Aſtron. 1521 2.ª edit.) il moto della Luna da una oſſervazione all'altra, adopero il moto ſpettante al tempo di mezzo tra le due oſſervazioni; il qual moto ſi cava dalle Efemeridi nel modo che ſegue.

Si dimandi il moto orario della luna in longitudine per li 15 Settembre 1789 a 16^h 7′ t. v. del meridiano di Parigi. Ho dalla Conoſcenza de' Tempi

	longitudine della luna.	Differenze.
li 15 a mezzodì	$3^s\ 29^\circ\ 37'\ 15''$	
a mezzanotte	4 6 52 30	$7^\circ\ 15'\ 15''$
li 16 a mezzodì	4 14 14 7	7 21 37

Dico dunque: moto orario a $12^h = \frac{7^\circ 15' 15'' + 7^\circ 21' 37''}{24} = 36' 32'',2$

moto orario a $18^h = \frac{7^\circ 21' 37''}{12} \ldots\ldots = 36' 48'',1$

Dunque moto orario a $15^h = \frac{36' 32'',2 + 36' 48'',1}{2} = 36\ 40,1$

Nel modo stesso si trova il moto orario a $16^h 30' = 36\ 44,1$

a $15^h 45' = 36\ 42,1$

e da ultimo a $16^h\ 7 = 36'\ 43,1$

Nella stessa maniera si faccia pel moto orario in latitudine.

Finalmente a comodo di chi volesse comparare altre osservazioni a quelle che sono state da me calcolate e discusse, non ometto di riferire gli elementi che seguono, dove il luogo della luna è dedotto dalle osservazioni, o sia corretto degli errori delle tavole: il tempo è ridotto al meridiano del regio Osservatorio di Parigi.

26 Novembre 1787 a $11^h\ 38'\ 12''$ tempo vero.

Longitudine vera della luna	$2^s 29^\circ 53' 29'',4$
Latitudine vera australe	20 19,5
Longitudine apparente di η de' Gemelli . .	3 0 29 27,1
Latitudine apparente australe	54 45,7

20 Gennajo 1788 a $11^h\ 8'\ 25''$

Longitudine vera della luna	3 0 40 20,6
Latitudine vera australe	27 13,3

3 Giugno 1788 a $19^h\ 22'\ 44''$

Longitudine vera della luna	2 13 12 23,4
Latitudine vera boreale	20 53,0
Longitudine vera del Sole	2 14 12 46,4

19 Giugno 1788 a $9^h\ 28'\ 0''$

Longitudine vera della luna	9 12 44 46,5
Latitudine vera boreale	2 17 27,8
Longitudine apparente di π del Sagittario . .	9 13 18 37,0
Latitudine apparente boreale	1 27 54,6

11 Febbrajo 1789 a 14^h 58′ 4″

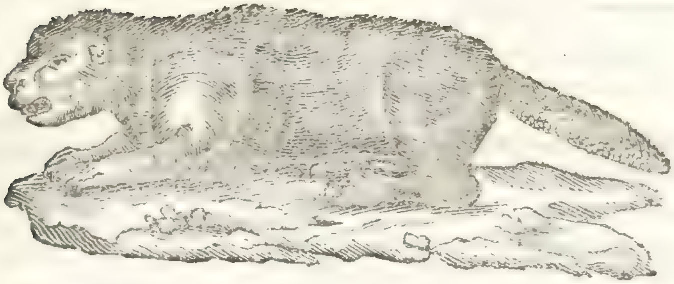
Longitudine vera della luna	5	21	40	31, 1
Latitudine vera auſtrale		4	46	51, 7
Longitudine apparente di *e* del Lione . .	5	21	26	40, 6
Latitudine apparente auſtrale		5	42	3, 9

15 Settembre 1789 a 15^h 35′ 48″

Longitudine vera della luna	4	9	4	12, 0
Latitudine vera auſtrale		4	58	44, 3
Longitudine apparente di 1 α del Cancro . .	4	10	10	8, 3
Latitudine apparente auſtrale		5	29	42, 1

6 Decembre 1789 a 13^h 8′ 46″

Longitudine vera della luna	4	9	55	4, 6
Latitudine vera auſtrale		5	9	41, 1



OSSERVAZIONI
SOPRA IL RITORNO DELLE SERIE

Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI.

I.

PRoposta la serie $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4$ ecc. pel ritorno delle Serie si avrà $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3 + b^{iv}y^4$ ecc. e sarà

$$b' = \frac{1}{a'}$$

$$b'' = \frac{-b'^2a''}{a'}$$

$$b''' = \frac{-2b''b'a'' - b'^3a'''}{a'}$$

$$b^{iv} = \frac{-(b''^2 + 2b'b''')a'' - 3b'^2b''a''' - b'^4a^{iv}}{a'} \text{ ecc.}$$

La maniera, come ognuno dei coefficienti b'', b''', b^{iv} ecc. dipende da' suoi precedenti, e dai dati a', a'', a''', a^{v} ecc., è quella che passo subito a descrivere, quando abbia avvisato che distinguendosi qui l' un dall' altro i coefficienti dei termini tanto della Serie proposta, quanto dell' altra per l' indice del termine, a cui ciascuno appartiene, e venendo quest' indice espresso per altrettanti accenti, allorchè si vorrà esprimere un coefficiente in generale, il numero degli accenti si esprimerà per una lettera greca, la quale per conseguenza starà in luogo di un numero qualunque d' accenti; ove poi si voglia indicare il numero aritmetico corrispondente, il quale cioè abbia tante unità, quanti sono quegli accenti, si farà uso della lettera corrispondente latina: così $a^{\rho} x^{r}$ sarà il termine r esimo della serie $a'x + a''x^2 + a'''x^3$ ecc., e $b^{\rho} y^{r}$ quello della serie $b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc.

II.

II. Il coefficiente π eſimo, cioè b^{π}, è una frazione, che ha per denominatore a', e per numeratore la ſomma di tanti termini, quanti ſono i coefficienti a'', a''', a^{iv} ecc. fino ad a^{π}. Ciaſcuno di queſti termini è uno dei coefficienti ſteſſi a'', a''', a^{iv} ecc. preſo ſotto il ſegno contrario, e moltiplicato per una funzione dei coefficienti b', b'', b''' ecc., che precedono il b^{π}. Queſta funzione poi pel termine, che ha π, conſiſte nella ſomma di tutti i prodotti, che poſſon farſi moltiplicando inſieme i coefficienti b', b'', b''' ecc., e la loro poteſtà per modo che il numero de' fattori di ciaſcun prodotto ſia p, e la ſomma degli accenti appoſti a queſti fattori ſia coſtantemente eguale al numero r; ciaſcuno de' quali prodotti è moltiplicato per $2.3.4\ldots\ldots p$, e allorquando contiene qualche poteſtà, è egli inſieme diviſo per 2 tante volte, quanti ſono i quadrati, che contiene, per 2.3 tante volte, quanti ſono i cubi, per $2.3.4$ tante volte, quante ſono le quarte poteſtà, e così via diſcorrendo.

III. Se la propoſta ſerie $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3$ ecc. vada a troncarſi di modo che $a^{\mu}x^{m}$ ſia l'ultimo di lei termine, allora nella formazione dei coefficienti b', b'', b''' ecc. ſi arriverà finalmente ad avere eſauſti tutti i coefficienti a'', a''', a^{iv} ecc.; e ciò ſuccederà nel valore del coefficiente b^{μ}, il numeratore del quale avrà $(m-1)$ termini, ſuppoſto che niuno dei coefficienti a'', a''', a^{iv} ecc., che precedono a^{μ}, ſia zero; e lo ſteſſo numero di termini avrà pure il numeratore del valor di qualſivoglia dei coefficienti ſuſſeguenti $b^{\mu+\prime}$, $b^{\mu+\prime\prime}$, $b^{\mu+\prime\prime\prime}$ ecc. Ciò è chiaro per quel, che or ora ſi è detto intorno alla formazione di tal numeratore. E per lo ſteſſo principio ſi rende parimente chiaro, che intendendo diſpoſti i termini del numeratore ſecondo l'ordine dei coefficienti a'', a''', a^{iv} ecc., l'ultimo di eſſi ſarà $-b'^{m}a^{\mu}$ nel valore di b^{μ}, ſarà $-mb'^{m-1}b''a^{\mu}$ nel valore di $b^{\mu+1}$, $-\left(\frac{m(m-1)}{2}b'^{m-2}b''^{2} + mb'^{m-1}b'''\right)a^{\mu}$ nel valore di $b^{\mu+\prime\prime}$, $-\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}b'^{m-3}b''^{3} + m(m-1)b'^{m-2}b''b''' + mb'^{m-1}b^{iv}\right)a^{\mu}$ in quello di $b^{\mu+\prime\prime\prime}$, ecc.

IV. Il caſo ultimamente conſiderato è quello d' un' equazione determinata del grado m, nella quale ſia ſeparato l' ul-

timo termine. Dunque per qualsivoglia equazione determinata si avrà $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc., dove y rappresenta l'ultimo termine dell'equazione separato, b', b'', b''' ecc. sono quantità dipendenti nella maniera, che di sopra si è detto, dai coefficienti a', a'', a''' ecc. delle corrispondenti potestà x. x^2, x^3 ecc. dell'incognita x, secondo l'ordine delle quali potestà, cominciando dalla prima, si suppongono disposti i termini dell'omogeneo di comparazione nell'equazione proposta. La serie pertanto $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc. rappresenterà ciascuno dei valori della x, che, essendo l'equazione proposta del grado m. saranno in numero m. Che poi li debba rappresentar tutti, e non un solo, si renderà evidente subito che si consideri, che ognuna delle quantità y, a', a'', a''' ecc. è una funzione di tutti i valori dell'incognita x, la qual funzione è egualmente data per ciascun dei medesimi valori, cioè y è il prodotto di tutti i valori, a' è la somma di tutti i prodotti dei valori moltiplicati insieme in numero $(m - 1)$ alla volta, a'' è la somma di tutti i prodotti dei valori moltiplicati insieme in numero $(m - 2)$ alla volta, ecc.; donde segue, che la serie stessa $b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc., in cui b', b'', b''' ecc. sono funzioni di a', a'', a''' ecc. è una funzione dei valori di x data egualmente per ciascuno dei medesimi valori; per la qual cosa se sussiste l'equazione $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc. ponendo in luogo di x uno dei valori, dee sussistere egualmente ponendovi qualsivoglia degli altri valori della medesima x.

V. Ben è vero, che quando la serie $b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc. sia convergente, darà essa attualmente un solo dei valori di x per approssimazione: ma questo non impedisce, che li rappresenti tutti. Ciò è coerente a quel che è dimostrato nel primo, e nel secondo dei tre opuscoli, che pubblicai l'anno 1787. A conoscere poi quale prerogativa distingua dagli altri valori della x quello, che viene attualmente somministrato per approssimazione da quella serie, allorchè ella è convergente, sembra che possa condurre il riflettere, che se uno dei valori della x fosse picciolissimo, e come infinitesimo rispetto agli altri, il termine ultimo y dell'equazione, il quale è il prodotto di tutti i valori, involvendo in se questo valore infinitesimo, sarebbe infinitesimo, laddove ognuno de' coefficienti a', a'', a''' ecc., che è la somma dei prodotti

dei valori moltiplicati insieme in numero $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-3)$ ecc., dovendo contenere dei prodotti, ne' quali non entrerebbe il valor infinitesimo, verrebbe a restar finito. Per la qual cosa i valori delle quantità b, b'', b''' ecc., come indipendenti da y, e dipendenti solo da a', a'', a''' ecc., sarebbero tutti finiti anch' essi, e però la serie $b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc. rappresentatrice dei valori di x avrebbe il suo primo termine infinitesimo, consistendo esso nella quantità infinitesima y moltiplicata per la finita b', il secondo infinitesimo rispetto al primo, il terzo rispetto al secondo, e così di mano in mano. Dunque in tal caso la serie e sarebbe convergente, e darebbe attualmente il valor infinitesimo. Posta la qual riflessione par chiaro, che la serie, quando è convergente, debba convergere verso il minimo dei valori della x considerati assolutamente, e senza aver riguardo ai segni, onde sono affetti; perciocchè questo è quel di tutti i valori, che è meno lontano dall'esser infinitesimo, cioè dall'esser quello, il quale, quando ha luogo, par cosa certa che venga per quella serie attualmente somministrato. Io sottopongo questo discorso al giudicio dei Matematici, essendo troppo persuaso, che anche in materia di matematica pura certi raziocinj metafisici, benchè a prima vista sembrino seducenti, possono talvolta inchiudere gravi parallogismi. Che se il discorso fatto regge, si dovrà dunque conchiudere, che la ritrovata serie, ove sia convergente, è atta, sommandone molti termini, a dare attualmente per approssimazione quello dei valori della x, che, prescindendo dal segno prefisso, è il minimo di tutti.

VI. Per venire a un esempio sia l'equazione $c = mx - \frac{m(m^2-1)}{2\cdot3}x^3$ $+ \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5 - \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^7 \ldots\ldots\ldots$ $+ \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\cdot3\cdot4}2^{m-9}x^{m-8} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot3}2^{m-7}x^{m-6}$ $+ \frac{m(m-3)}{2}2^{m-5}x^{m-4} - m.2^{m-3}x^{m-2} + 2^{m-1}x^m$, la quale, quando sia $c<1$, e m un numero della serie 5, 9, 13, 17 ecc., si sa che ha reali tutti i valori di x, e questi, ove si suppon-

ga $c =$ cos ϕ, compresi nella formola generale $x =$ cos $\frac{2K\pi + \phi}{m}$, dove π denota la semiperiferia posto il raggio $= 1$, e a K si debbon intendere successivamente sostituiti i numeri $0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots (m - 1)$; si sa inoltre, che essendo $\phi < \frac{\pi}{2}$ di questi valori il minimo è positivo, ed è quello, che risulta, quando in luogo di K si mette il numero $\frac{m-1}{4}$. Ora confrontando quest' equazione colla serie proposta da principio si ha $y = c$, $a' = m$, $a'' = 0$, $a''' = \frac{-m(m^2-1)}{2.\ 3}$, $a^{iv} = 0$, $a^{v} = \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$, $a^{vi} = 0$, $a^{vii} = \frac{-m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}$, $a^{viii} = 0$, $a^{ix} = \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)(m^2-49)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}$, ecc.

Quindi $b' = \frac{1}{m}$, $b'' = 0$, $b''' = \frac{m^2-1}{2.\ 3.\ m^3}$, $b^{iv} = 0$, $b^{v} = \frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ m^5}$, $b = 0^{vi}$, $b^{vii} = \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7\ m^7}$, $b^{viii} = 0$, $b^{ix} = \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)(49m^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ m^9}$, ecc.

Dunque $x = \frac{c}{m} + \frac{(m^2-1)c^3}{2\ 3.\ m^3} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ m^5}$
$+ \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ m^7}$
$+ \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)(49m^2-1)c^9}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ m^9} +$ ecc.

la qual serie va in infinito, nè mai si tronca, perchè m si suppone numero intiero. E' facile il vedere, che generalmente il termine r esimo sta al suo seguente, come $1 : \frac{(4r^2m^2 - 4rm^2 + m^2 - 1)c^2}{4r^2m^2 + 2rm^2}$, cioè come $4r^2m^2 + 2rm^2$: $4r^2m^2c^2 - 4rm^2c^2 + m^2c^2 - c^2$, dove è certo essere $4r^2m^2 > 4r^2m^2c^2$, perchè si suppone c una frazione, cioè $c =$ cos ϕ, e simil-

mente $2rm^2 > m^2c^2$, perchè r è sempre un intiero, e c, come si è detto, una frazione; dunque molto più $4r^2m^2 + 2rm^2 > 4r^2m^2c^2 - 4rm^2c^2 + m^2c^2 - c^2$: e però la serie è sempre convergente. Che poi converga verso il valore

$$\cos\frac{2\left(\frac{m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}$$

, credo che non si possa con brevità mostrare che colla seguente osservazione. Nell'equazion proposta supponendo $x = \sin z$, cioè $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, l'omogeneo di comparazione, quando m sia un numero della serie 5, 9, 13, 17 ecc. è il valor preciso di $\sin mz$, cioè di $\cos\left(\frac{\pi}{2} - mz\right)$, come si rileva dal canone esposto da *Euler Introd. ad analy.* T. I. pag. 199. Ma noi vogliamo $c = \cos\phi$: dunque abbiamo $\phi = \frac{\pi}{2} - mz$, e però $z = \frac{\pi}{2m} - \frac{\phi}{m}$, e conseguentemente $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} + \frac{\phi}{m}\right)$, cioè

$$x = \cos\frac{2\left(\frac{m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}.$$

Il che ne mostra, che se vogliamo che nell'equazione proposta l' omogeneo di comparazione sia attualmente $\cos\phi$, bisogna supporre

$$x = \cos\frac{2\left(\frac{m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}.$$

Infatti se in luogo di x supporremo messo nell' equazione proposta un altro dei valori compresi nella formola $\cos\frac{2K\pi+\phi}{m}$, l' omogeneo di comparazione darà attualmente il valore di $\cos\phi$ non più sotto quest' aspetto $\cos\phi$, ma sotto uno degli altri compresi nella formola $\cos(2K\pi+\phi)$. Dunque l'equazione proposta dà attualmente $\cos\phi$ per $\cos\frac{2\left(\frac{m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}$, e però la serie che

si è trovata pel valore di x, essendo cavata da quell' equazione, anzi essendo quell' equazione medesima messa sotto un' altra forma, e dando x per cos ϕ, se somministra attualmente qualcuno dei valori, che rappresenta di x, somministrerà quello, che è espresso per cos $\dfrac{2\left(\dfrac{m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}$. Ora questo valore essendo quello tra i valori compresi nella formola cos $\dfrac{2K\pi+\phi}{m}$, per cui si ha $K=\dfrac{m-1}{4}$, è appunto il minimo, ed è positivo, perchè è $\dfrac{2\left(\dfrac{m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}<\dfrac{\pi}{2}$, cioè $\dfrac{m\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}+\phi<\dfrac{m\pi}{2}$, cioè $\phi<\dfrac{\pi}{2}$, come per l' appunto si suppone.

Se l' equazione proposta fosse stata $c=-mx+\dfrac{m(m^2-1)}{2.3}x^3$ $-\dfrac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}x^5\ldots\ldots-\dfrac{m(m-4)(m-5)}{2.3}2^{m-7}x^{m-6}$ $+\dfrac{m(m-3)}{2}2^{m-5}x^{m-4}-m.2^{m-3}x^{m-2}+2^{m-1}x^m$, che, quando m sia un numero della serie 3, 7, 11, 15 ecc., e sia $c<1$, si fa aver anch' essa reali tutti i valori della x, e questi, ove si supponga $c=\cos\phi$, compresi nella formola medesima cos $\dfrac{2K\pi+\phi}{m}$, dei quali è noto che, supposto $\phi<\dfrac{\pi}{2}$, il minimo è negativo, e porta $K=\dfrac{3m-1}{4}$, sarebbesi avuto

$y=c$, $a'=-m$, $a''=0$, $a'''=\dfrac{m(m^2-1)}{2.3}$, $a^{iv}=0$,

$a^{v}=\dfrac{-m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}$, $a^{vi}=0$,

$a^{vii}=\dfrac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6.7}$, ecc. e però sarebbe stato

$b' = \frac{-1}{m}$, $b'' = 0$, $b''' = \frac{-(m^2-1)}{2.3.m^3}$, $b^{iv} = 0$,

$b^{v} = \frac{-(m^2-1)(9m^2-1)}{2.3.4.5.m^5}$, $b^{vi} = 0$,

$b^{vii} = \frac{-(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)}{2.3.4.5.6.7.m^7}$, ecc. Sarebbesi pertanto avuta la stessa serie $x = \frac{-c}{m} - \frac{(m^2-1)c^3}{2.3.m^3}$

$- \frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{2.3.4.5.m^5} - \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{2.3.4.5.6.7.m^7}$ ecc.

trovata di sopra, se non che i termini di questa sono tutti affetti del segno $-$. Or facendo un discorso simile a quel, che si è fatto per la serie precedente, s' intenderà, che il valore, verso di cui questa converge, è

$\cos \frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m}$. Imperocchè se nella nuova equazione proposta si supporrà $x = \sin z$, o vogliam dire $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, l' omogeneo di comparazione pel canone Euleriano di sopra citato diventa $- \sin mz$, che è lo stesso che $\cos\left(\frac{\pi}{2} + mz\right)$. Ma abbiamo l' omogeneo di comparazione $= c = \cos \phi$. Dunque l' arco z nel nostro caso è $\frac{\phi}{m} - \frac{\pi}{2m}$, e però

$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2m} - \frac{\phi}{m}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} + \frac{\phi}{m}\right)$

$= \cos \frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m}$. Pertanto la nuova equazion proposta dà attualmente $\cos \phi$ per $\frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi + \phi}{m}$, e perciò la serie trovata, che, come abbiam anche di sopra ac-

cennato, è l' equazione ſteſſa poſta ſotto un altro aſpetto, dando colla ſua convergenza attualmente uno dei valori di x per cos ϕ, darà appunto cos $\frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}$ che è quello, per cui è dato attualmente cos ϕ nell'equazione medeſima. Queſto valore eſſendo quello, pel quale ſi ha $K=\frac{3m-1}{4}$, viene ad eſſere appunto il minimo dei compreſi nella formola cos $\frac{2K\pi+\phi}{m}$, ed è negativo, perchè $\frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}>\frac{\pi}{2}$, cioè $m\pi+\phi>\frac{\pi}{2}$, e nello ſteſſo tempo $\frac{2\left(\frac{3m-1}{4}\right)\pi+\phi}{m}<\frac{3\pi}{2}$, cioè $\phi<\frac{\pi}{2}$. Converge dunque la ſerie trovata anche nel caſo della nuova equazione verſo il minimo dei valori dell' incognita.

VII. Sia ora l' equazione generale di ſecondo grado $c=bx+xx$. Avremo $y=c$, $a'=b$, $a''=1$, a''', a'''', a^{v} ec. $=0$. Quindi $x=\frac{1}{b}c-\frac{1}{b^3}c^2+\frac{2}{b^5}c^3-\frac{5}{b^7}c^4+\frac{14}{b^9}c^5-\frac{42}{b^{11}}c^6+\frac{132}{b^{13}}c^7-\frac{429}{b^{15}}c^8+\frac{1430}{b^{17}}c^9$ ecc. della qual ſerie l' andamento è chiariſſimo ſubito che ſia noto il coefficiente numerico di ciaſcun termine. Ora il coefficiente del termine n eſimo è $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-3)}{3.4.5.\ldots\ldots(n-2)}$ ſervendo queſta formola a tutti i termini della ſerie eccettuati i primi quattro, per li quali è chiaro, che non può ſervire. Ogni termine adunque della ſerie preſcindendo dal ſegno, ond' è affetto, ſta al ſuo ſeguente, come

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-3)\,b^2}{3.4.5\ldots\ldots\ldots(n-2)}:\frac{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(2n-4)c}{3.4.5\ldots\ldots\ldots(n-1)},$$

cioè

cioè come $(n+1)b^2 : \frac{(2n-2)(2n-1)c}{n-1}$, o ſia come $(n+1)b^2 : 2(2n-1)c$; e queſta proporzione vale anche ne' primi quattro termini. Sarà pertanto la ſerie divergente, ogni qual volta ſia $(n+1)b^2 < 2(2n-1)c$, cioè $n(4c-b^2) > b^2+2c$. Se $4c < b^2$, o ſia $\frac{b^2}{c} > 4$, la prima parte della comparazione è negativa, nè potrà mai eſſer maggiore della ſeconda, che è poſitiva: dunque allora la ſerie è ſempre convergente. Che ſe $\frac{b^2}{c} < 4$, allora la comparazione ſi riduce a $n > \frac{b^2+2c}{4c-b^2}$, il che dovendo n eſſere un numero intiero, ſi verificherà ſempre che ſia $\frac{b^2+2c}{4c-b^2} < 1$ cioè $\frac{b^2}{c} < 1$, e allora per conſeguenza la ſerie ſarà ſempre divergente. Se poi ſia $\frac{b^2}{c} > 1$, e inſieme < 4, la ſerie comincierà ad eſſer divergente immediatamente dopo il termine, che ha per indice il numero proſſimamente maggiore di $\frac{b^2+2c}{4c-b^2}$. Se foſſe $\frac{b^2}{c} = 1$, ſiccome la comparazione $n > \frac{b^2+2c}{4c-b^2}$ diverrebbe $n > 1$, il che ſi verifica ſempre dopo il primo termine, così la ſerie ſarebbe divergente ſubito dopo il primo termine. Che ſe foſſe $\frac{b^2}{c} = 4$, la comparazione ſuddetta diverrebbe $n > \infty$, e la ſerie non comincierebbe ad eſſer divergente che all' infinito, e però ſi riguarderebbe come tutta convergente.

VIII. Ma la ſerie, quando le quantità c, b, come fin ora ſi è ſuppoſto, ſieno poſitive, ha i termini ſuoi alternativamente poſitivi, e negativi. Se mai ſi ſoſpettaſſe, che ſommando ciaſcun termine poſitivo col ſuo ſeguente negativo, la ſerie formata di queſte ſomme poteſſe eſſer divergente nel

caſo di $\frac{h^2}{c} > 4$, e convergente nel caſo di $\frac{h^2}{c} < 1$, pongaſi nel termine generale trovato di ſopra $2r - 1$ in luogo di n, e ſi avrà il termine $(2r - 1)$eſimo

$$= \frac{2r(2r+1)(2r+2)\ldots\ldots(4r-5)c^{2r-1}}{3\cdot 4\cdot 5\ldots\ldots(2r-3)h^{4r-3}}$$

, che qualunque numero intiero s' intenda rappreſentato da r, è ſempre in ordine diſpari, e però è poſitivo: il ſuſſeguente termine $2r$ eſimo, negativo, ſarà $\frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)\ldots(4r-3)c^{2r}}{3\cdot 4\cdot 5\ldots\ldots(2r-2)h^{4r-1}}$,

e però la ſomma di queſti due termini riuſcirà

$$\frac{2(2r+1)(2r+2)(2r+3)\ldots(4r-5)c^{2r-1}}{3\cdot 4\cdot 5\ldots\ldots(2r-3)h^{4r-3}}\left(r-\frac{(4r-3)c}{h^2}\right).$$

Similmente ſi troverà la ſomma dei due termini $(2r+1)$ eſimo, e $(2r+2)$ eſimo

$$= \frac{2(2r+3)(2r+4)\ldots(4r-1)c^{2r+1}}{3\cdot 4\cdot 5\ldots\ldots(2r-1)h^{4r+1}}\left(r+1-\frac{(4r+1)c}{h^2}\right).$$

Queſti ſaranno due termini proſſimi della ſerie delle ſuaccennate ſomme, i quali per le coſe dette ſaranno amendue poſitivi, ſe $\frac{h^2}{c} > 4$, o ſe eſſendo $\frac{h^2}{c} < 4$, ma > 1, appartengono quei termini a quella parte della prima ſerie, che precede il paſſaggio dalla convergenza alla divergenza; ſaranno amendue negativi, ſe $\frac{h^2}{c} < 1$, o ſe eſſendo $\frac{h^2}{c} < 4$, ma > 1, appartengano eſſi termini alla parte della prima ſerie, che vien dopo il detto paſſaggio; potrà anche eſſer poſitivo il primo, e negativo il ſecondo, il che avverrà, ſe eſſendo $\frac{h^2}{c} < 4$, e inſieme > 1, appartengano que' due termini a quel luogo della prima ſerie, dove eſſa dall' eſſer convergente paſſa ad eſſer divergente. Ora è facile il vedere, che la prima ſomma ſta alla ſeconda, come $(2r^2 + 3r + 1)(rf^3 - 4rf^2 + 3f^2)$: $(32r^2 - 32r + 6)(rf + f - 4r - 1)$, dove f è in luogo di

$\frac{b^2}{c}$. Sottraendo il conseguente dall' antecedente, e disponendo i termini secondo la potestà di f, risulta

(A) $(2r^3 + 3r^2 + r)f^3 - (8r^3 + 6r^2 - 5r - 3)f^2 - (32r^3 - 26r + 6)f + 128r^3 - 96r^2 - 9r + 6$ quantità, che nel nostro caso è sempre positiva; perciocchè considerata come un' equazione si trova, che finchè r sia un numero positivo intiero, come noi lo supponiamo, ha due valori di f immaginarj, ed uno reale, ma negativo; posto poi zero in luogo di f assume un valor positivo: onde qualunque valore abbia f, purchè sia positivo, come appunto qui si suppone, perchè le quantita c, b si vogliono ora positive, non potrà mai acquistare la quantità (A) un valore negativo, non potendo ciò succedere se non allor quando si supponga ad f un valor negativo più lontano dal zero di quel che sia il valore negativo, che riduce la quantità stessa (A) a zero. Se dunque la serie delle somme suddette è tale, che sottraendo ogni termine dal suo precedente si ottiene sempre una differenza positiva, è segno evidente, che ove i termini della medesima serie sieno positivi, che è lo stesso che dire ove la serie prima sia convergente, convergente è ancora la serie delle dette somme; ed ove i termini della serie delle somme siano negativi, cioè ove divergente sia la prima serie, divergente è pure quella delle somme.

IX. Si può dunque conchiudere assolutamente, che la serie ottenuta col nostro metodo pel valore di x nell'equazione $c = bx + xx$, converge verso di un valore di x, quando sia $\frac{b^2}{c}$ non minore di 4; diverge in tutto quando sia $\frac{b^2}{c}$ non maggiore di 1; converge poi per un tratto, indi si fa divergente, quando sia $\frac{b^2}{c}$ minore di 4, e maggiore di 1. Pure qualora c sia quantità positiva, come fin qui si è supposto; i valori di x nell'equazione $c = bx + xx$ sono sempre reali. Questo caso basta per far vedere generalmente, che la serie, che si trova col proposto metodo pel valore di x in un'equazione, può essere divergente, quantunque il valore, che som-

miniſtrerebbe, ſe foſſe convergente, ſia reale. Del reſto tornando al caſo particolare dell'equazione $c = bx + xx$, è chiaro che, quando la ſerie trovata è convergente, converge ella verſo il minore dei due valori di x; poichè il maggiore è negativo, poſitivo è il minore; e la ſerie trovata, quando è convergente, appariſce dalle coſe dette di ſopra, che converge verſo una quantità poſitiva.

X. Stando nell'equazione medeſima ſuppongaſi ora b quantità poſitiva, ma c negativa. Altra mutazione non riſulta nella ſerie trovata, ſe non che tutti i termini diventano negativi. Seguita eſſa pertanto ad eſſer tutta convergente, quando ſia $\frac{b^2}{c}$ non minore di 4, ad eſſer tutta divergente, quando ſia $\frac{b^2}{c}$ non maggiore di 1, e ad eſſer prima convergente, poſcia divergente, quando ſia $\frac{b^2}{c} > 1$, ma < 4. Ora nel caſo di c negativa, l' equazione ha reali i ſuoi valori ſolo quando ſia $\frac{b^2}{c}$ non minore di 4. Però fuori del caſo che la ſerie ſia tutta convergente, non ſono reali i valori di x. Il valore poi, verſo di cui la ſerie converge, è il minore dei due valori di x; poichè ſe foſſe $c = \frac{b^2}{4}$, nel qual caſo ſi è veduto di ſopra, che la ſerie è anche tutta convergente, egli è certo, che allora eſſa convergerebbe verſo il valore negativo $\frac{-b}{2}$, diventando in tal caſo amendue i valori di $x = \frac{-b}{2}$: il che poſto è chiaro, che nel caſo di $c < \frac{b^2}{4}$ la ſerie, impicciolendoſi ogni di lei termine, convergerà verſo un valore negativo minore di $\frac{-b}{2}$: or tale è appunto quello dei due valori reali di x, che, preſcindendo dal ſegno prefiſſogli, è il minore.

XI. Se voleſſe ora nell'equazione $c = bx + xx$ ſupporſi ne-

gativa la quantità h, tornerebbero in campo le stesse riflessioni, se non che quei termini della serie, e quei valori della x, che erano positivi, diventerebbero negativi, e viceversa, come è per se manifesto. Lasciando dunque da parte l'equazione di secondo grado, facciamoci a considerare le equazioni in generale d'ogni grado, le quali sempre suppongo non essere deprimibili a grado più basso, ma portare intrinsecamente ne' valori dell'incognita l'asimmetria di quel grado, che viene indicato dall'esponente della massima potestà dell'incognita. Siccome si è veduto (§. IX.) poter succedere, che sia divergente la serie, che col nostro metodo si trova, non ostante che reale sia il valore, verso di cui converge, quando essa è convergente; così potrebbe a prima vista venir sospetto, che succeder possa, che sia ella convergente, quantunque il detto valore dell'incognita sia immaginario. Il qual sospetto implicitamente presuppone, che la serie in questione possa ora verso di un valor convergere, ora verso di un altro; poichè quando ella è convergente, il valore, verso di cui attualmente converge, è certamente reale, perchè è essa formata tutta di termini reali; nè potrebbe caratterizzarsi d'immaginario se non se un altro valore, verso cui in altri casi, cioè poste altre relazioni tra i coefficienti de' termini dell'equazione, potesse la serie convergere, perchè fosse egli, poste quelle tali relazioni, reale. Ora se è vero quel che da principio (§ V.) è stato notato, e abbiam veduto avverarsi negli esempj, che si sono addotti, cioè che la serie, quando è convergente, converga sempre verso il minimo dei valori dell'incognita, non potrà questo valore in certi casi, per le relazioni, che acquistano tra di loro i coefficienti dei termini dell'equazione, diventar immaginario, e seguitar la serie ad esser convergente, senza che nel diventar immaginario cessi insieme quel valore di vestir la natura di minimo; il che succedendo diventerà minimo un altro valore, che prima non era tale, e verso di questo convergerà la serie, che si suppone convergente, e così si verificherà sempre, che la serie, qualora è convergente, converge verso il minimo dei valori dell'incognita. Ammesso pertanto quel principio, che la serie trovata coll'esposto metodo, quando è convergente,

converga verso il minimo dei valori dell'incognita, si dovrà stabilire, che solo quando questo valore, che porta la natura di minimo, sia reale, possa quella serie esser convergente, e che divergente debba riuscire ogni volta che egli sia immaginario: e ciò appunto è quel che abbiam veduto (§. IX, e X.) succedere per l' equazione di secondo grado. Di queste due proporzioni poi la prima si può convertere, e si può dire, che ogni volta che la serie riesca convergente, il minimo dei valori dell'incognita è reale; ma non così la seconda, essendosi già notato (§. IX.) che può la serie esser divergente, e ciò non di meno esser reale il valor minimo dell'incognita.

XII. Il metodo proposto, come ognun vede, non può aver luogo, se l' equazione priva sia del termine penultimo. Ma in tal caso si può sempre assoggettarla al metodo, convertendola prima in un'altra, che abbia il penultimo termine. Si può anche col nostro metodo andar in traccia del valor massimo dell'incognita, sostituendo $\frac{1}{z}$ in luogo di x; poichè così, come tutti sanno, si converte ogni valore di x nel suo reciproco, e il reciproco del massimo diventa il minimo, onde quando si fosse trovato il minimo dei valori di z, si avrebbe nel reciproco di lui il massimo dei valori di x. Al qual proposito giova notare, che ove siasi trovata la serie, che quando è convergente, somministra il minimo dei valori di x, niente è più facile che mutarla in quella, che serve al minimo dei valori di z, bastando solo in essa dov' era l'ultimo termine dell'equazione proposta ridotta a zero, mettervi il coefficiente del primo, e dov' era il coefficiente del primo mettervi l' ultimo, in luogo poi del coefficiente di ogni altro termine distante comunque da un estremo mettervi il coefficiente del termine egualmente distante dall' altro estremo, coll'avvertenza però d' accompagnar questa commutazione di coefficienti col cambiamento del segno ogni qualvolta i due coefficienti, che si commutano uno coll' altro, sono nell' equazione proposta ridotta al zero affetti di segni contrarj. Per capacitarsi della legittimità di questa regola è abbastanza il riflettere, che proposta generalmente l'equazione $a^{\mu}x^{m} + a^{\mu-1}x^{m-1} + a^{\mu-2}x^{m-2} \ldots \pm a'x^{2} \pm a'x \pm c = o$ ponen-

do $\frac{1}{z}$ in vece di x ſi ricava l'equazione $\pm cz^{m} \pm a' z^{m-1} \pm a'' z^{m-2} \ldots + a^{\mu-''} z^{2} + a^{\mu-'} z + a^{\mu} = 0$, che è l'equazione ſteſſa propoſta, ſe non che i coefficienti dei termini eſtremi, ed equidiſtanti dagli eſtremi appunto coll'accennata regola ſi trovano tra di loro commutati.

XIII. Se pertanto ne' valori di b', b'', b''', b^{iv} ecc. deſcritti da principio s'intenderà fatta la teſtè indicata commutazione dei coefficienti a', a'', a''', a^{iv} ecc., per la quale diventino eſſi c', c'', c''', c^{iv} ecc. e ſe K denoterà la quantità, che ſecondo la eſpoſta regola dee porſi in luogo di y, la ſerie, che ſerve al minimo dei valori di z, ſarà $z = c'K + c''K^{2} + c'''K^{3} + c^{iv}K^{4}$ ecc. E perchè $\frac{1}{z}$, cioè x ſarà $= \frac{1}{c'K} - \frac{c''}{c'^{2}} + \frac{(c''^{2} - c'c''')K}{c'^{3}}$

$$- \frac{(c''^{3} - 2c'c''c''' + c'^{2}c^{iv})K^{2}}{c'^{4}} + \frac{(c''^{4} - 3c'c''^{2}c''' + 2c'^{2}c''c^{iv} - c'^{3}c^{v} + c'^{2}c'''^{2})K^{3}}{c'^{5}} \text{ ec.}$$

ſervirà queſta ſerie al maſſimo dei valori di x Sarebbe deſiderabile, che queſta ſerie quando il maſſimo dei valori di x è reale, foſſe convergente almeno in que' caſi, ne' quali è divergente la ſerie, che ſerve al valor minimo, non oſtante che reale pur ſia queſto valor minimo: così mediante il noſtro metodo, quando reali foſſero il maſſimo, ed il minimo valor di x, ſempre ſi potrebbe per approſſimazione aver o l'uno, o l'altro. Ma l'equazione di ſecondo grado conſiderata di ſopra (§. VII.) ne avviſa, che ciò non ſi può ſempre ſperare; poichè la ſerie, che con queſto metodo ſi trova pel valor maſſimo di x, è quella medeſima, che ſerve al valor minimo, ſottratta da $-h$.

XIV. Finalmente noterò, che ſiccome la ſerie $x = b'y + b''y^{2} + b'''y^{3} + b^{iv}y^{4}$ ecc. (§. I.) naſce pel ritorno della ſerie $y = a'x + a''x^{2} + a'''x^{3} + a^{iv}x^{4}$ ecc., così viceverſa naſce queſta pel ritorno di quella. La coſa è chiara per ſe ſteſſa; e ove ſi voleſſe pur dubitarne, baſta per convincerſene avvertire, che intendendo propoſta la ſerie $x = b'y + b''y^{2} + b'''y^{3} + b^{iv}y^{4}$ ecc, e ſupponendo che ella pel ſuo ritorno ſomminiſtri $y = a'x + a''x^{2} + a'''x^{3} + a^{iv}x^{4}$ ecc., ſi avrà

$$a' = \frac{1}{b''}$$

$$a'' = \frac{-a'^2 b''}{b'}$$

$$a''' = \frac{-2a'a''b'' - a'^3 b'''}{b'}$$

$$a^{iv} = \frac{-(a''^2 + 2a'a''')b'' - 3a'^2 a'' b''' - a'^4 b^{iv}}{b'} \text{ ecc.}$$

nelle quali equazioni ſeparando b', b'', b''', b^{iv} ecc. tornano a venire i valori

$$b' = \frac{1}{a'}$$

$$b'' = \frac{-b'^2 a''}{a'}$$

$$b''' = \frac{-2b'b''a'' - b'^3 a'''}{a'}$$

$$b^{iv} = \frac{-(b''^2 + 2b'b''')a'' - 3b'^2 b'' a''' - b'^4 a^{iv}}{a'} \text{ ecc.}$$

che ſono appunto quei , che competono ai coefficienti b', b'', b''', b^{iv} ecc. , quando la ſerie $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3 + b^{iv}y^4$ ecc. ſi ſuppone nata pel ritorno dell' altra $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{iv}x^4$ ec. Da ciò ne ſegue, che ſe ſia propoſta una ſerie, la quale poſſa rappreſentare i valori dell' incognita d' un' equazione, la ſerie, che ſi troverà pel ritorno di eſſa , ſi troncherà . e ſarà l' equazione ſteſſa , in cui l' incognita ha i valori dalla propoſta ſerie rappreſentati. Trovata poi che ſia queſt' equazione , ſe la ſerie propoſta ſarà convergente , dalle coſe notate di ſopra pare che debba poterſi conchiudere, che la detta ſerie converge verſo il minimo dei valori dell' incognita della medeſima equazione.

XV. Conviene però avvertire, che quando non ſi conoſca in qualche maniera il termine generale, o l' andamento della ſerie propoſta , per quanto ſien molti i termini conſecutivi, che nella ſerie di ritorno hanno i loro coefficienti $= 0$, non ſi potrà mai eſſer ſicuri , che queſta ſerie non riſorga poi di nuovo, e reſti veramente troncata, e ſia un' equazione. Data la legge, che regna nella ſerie propoſta, per uſcir di

di dubbio se il ritorno di essa fornisca veramente una tale equazione, o no, bisognerà vedere se l'equazione, su di cui cade il dubbio, maneggiata col metodo del ritorno delle serie, somministri la stessa serie sottoposta alla stessa legge; poichè se ciò avvenga, è certo, che l'equazione trovata è il vero risultato del ritorno della serie data, altrimenti converrebbe supporre ciò che è impossibile, cioè che l'aggiunta di nuovi termini all'equazione assoggettata all'esperimento non potesse alterare la legge della serie, la quale si suppone esser appunto quella della serie proposta. Per esempio data la serie $y = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{1000} + \frac{x^3}{50000} - \frac{x^4}{2000000} + \frac{7x^5}{500000000}$ ecc, che ha i termini alternativamente positivi, e negativi, e di cui ogni termine n esimo sta al suo seguente come $n+1 : \frac{(2n-1)x}{50}$, trovo $b' = 10$, $b'' = 1$, $b''' = 0$, $b^{v} = 0$, $b^{v} = 0$, $b^{v'} = 0$ di modo che comincio a credere, che pel ritorno di questa serie s'arrivi all'equazione $x = 1y + yy$, e che per conseguenza la serie medesima rappresenti i valori di y di quest'equazione, e quando è convergente, converga il valore $-5 + \sqrt{25 + x}$, che è il minore dei due valori di y. Ma per assicurarmene cavo la serie, che risulta dal ritorno della formola $x = 1y + yy$, e siccome ho $a = 10$, $a' = 1$, e tutti gli altri coefficienti a'', a^{v}, a^{v} ecc. $= 0$, così dopo d'aver cavato $b' = \frac{1}{10}$, $b'' = \frac{-1}{1000}$, $b''' = \frac{2}{100000}$ ecc., che sono appunto i coefficienti dei primi termini della serie proposta, rifletto che qualunque sia il numero dei coefficienti b', b'', b^{v} ecc., che osservano la data legge, il coefficiente seguente, che denoto per il b^{p}, il quale, quando sia $a^{p} = 0$, dipende dai precedenti secondo una legge, che è quella stessa, secondo cui ciascuno dei precedenti dipende da quei, che lo precedono, non potrà non esser sottoposto anch egli alla legge costante, che regna ne' suoi precedenti, e che questa legge non potrebbe anzi venir alterata se non appunto dal non essere $a^{p} = 0$; e così con questa semplice riflessione mi acqueto, e ammetto l'equazione $x = 10y + yy$ per il totale risultato del ritorno della serie proposta. Del resto chi vo-

lelle mediante il calcolo con rigorosa dimostrazione provare generalmente, che supposto che i coefficienti b', b'', b''', ecc. della serie provegnente dall'equazione $x = 10y + yy$ col metodo del ritorno delle serie osservino la legge della serie data fino al coefficiente $b^{\rho-1}$, la dovrà osservare anche il seguente coefficiente b^{ρ}, urterebbe in calcoli prolissi, e scomodi oltre modo. Per la qual cosa se tanta difficoltà s' incontra, quando l'equazione non oltrepassa il secondo grado, ognuno può figurarsi quanto più malagevole sarà la faccenda, allorchè l' equazione sia d' un grado alto. Gioverà sempre avere avvertito, che quando la serie proposta $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3$ ecc. non abbia che i termini denominati dai numeri d'una serie aritmetica $1, r, 2r - 1, 3r - 2, 4r - 3$ ecc., anche la serie $x = b'y + b''y^2 + b'''y^3$ ecc., che nasce pel ritorno di lei, non avrà che i termini denominati dai numeri della stessa serie aritmetica, come facilmente si raccoglie (§. I. e §. II.) dalla legge, che regna nei valori dei coefficienti b', b'', b''', b^{iv} ecc.

XVI. Riserbo ad un'altra Memoria il mostrare, come col metodo del ritorno delle serie si possono trovare per ogni equazione le altre serie, che quando sono convergenti, somministrano gli altri valori dell' incognita oltre il minimo, e il massimo. Ivi soggiugnerò alcune riflessioni non inutili per promuovere l' uso di queste serie, le quali ho incominciato a riguardare come non indegne d' essere particolarmente esaminate, dopo d' essermi accorto, che trovate col nostro metodo sono appunto quelle stesse, che s' incontrano applicando alle equazioni il metodo ingegnosamente inventato, e con singolar chiarezza esposto nelle Memorie della Reale Accademia di Berlino per l' anno 1768 dal prestantissimo Geometra Signor *de la Grange*.

MEMORIA

SULLE PRESSIONI ESERCITATE DA UN CORPO SOSTENUTO DA TRE O PIU' APPOGGI COLLOCATI NELLO STESSO PIANO.

Del Sig. Paolo Delanges.

Siano quanti si vogliano i punti o piedi su' quali un corpo si appoggia colla base in un piano immobile ed orizzontale, ragion vuole che la pressione sofferta da ciascun punto dipender deggia dalla posizione rispettiva che ha verso gli altri, e verso il centro di gravità dell' intero peso del corpo, come appunto avviene se sostenuto fosse in equilibrio da un solo, o due appoggi, de' quali casi la determinazione è comunemente nota. Di questo problema, che può essere utile in tutte le pratiche architetture, non abbiamo fin ora una soluzione generale, determinata e dipendente da' soli principj della Statica, di cui anzi preso generalmente ne forma l' ultimo e più difficile scoglio. Tale argomento diede motivo al celebre *Eulero* di tessere la Memoria col titolo " De pressione ponderis in planum cui incumbit,, (*) con quella perspicacia ed estensione propria a così sublime calcolatore. Tutto l' ingegnoso lavoro pertanto lo instituì egli sul principio, che concependo inalzate dagli appoggi, che sostengono il corpo, rette linee perpendicolari al piano che passa per essi, e proporzionali alle rispettive loro pressioni, le estremità di tali perpendicolari terminino tutte ad uno stesso piano,

(*) Novi Comm. Acad. scient. Imperialis Petropolitanæ, Tom. XVIII An. MDCCLXXIII.

e determinando quindi la posizione di questo piano, mediante due assi fissi presi ad arbitrio, trova l'espressione generale dello sforzo o della pressione sofferta da ciascun appoggio. Non istarò io qui esponendo le obbiezioni che m'insorsero nella mente contro il dichiarato principio, tra le quali non posso tacere quella, che qualora i punti d'appoggio sieno più che tre, deggia tuttavia ammettersi, che le estremità delle perpendicolari rappresentanti le pressioni esistano in uno stesso piano, e solo indicherò le difficoltà che possono opporsi a' risultati, che dalla sua applicazione va l'illustre Autore deducendo. Prendiamo in considerazione il caso più semplice, e sia *RST* (*Fig I.*) un corpo che insista sul piano soggetto con tre piedi *A B C*, e dal punto *O*, in cui cade la direzione che passa pel centro di gravità di tutta la massa, si conducano le *OP OQ* parallele alle rette *AB AC*, che congiungono i punti d'appoggio; fatta questa costruzione, deducesi dalla teoria euleriana che, essendo *G* la pressione o il peso totale del corpo *RST*, la pressione nel punto *A* è $= G\left(1 - \frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right)$, quella del punto $B = G.\frac{AP}{AB}$, e del punto $C = G.\frac{AQ}{AC}$. Ma siccome immaginandosi, come è lecito, che il centro *O* di gravità cadesse in qualsivoglia altro punto della parallela *QO* anche prolungata, e l'appoggio *B* fosse trasportato ovunque nella *AB*, rimane costante la pressione in *C*, variando solo quelle degli appoggi *A B*, e che rimarrebbe similmente costante la pressione in *B* cangiandosi quelle in *A C*, se il centro *O* situato fosse ovunque nella parallela *PO* e il punto *C* nella retta *CA*; così è chiaro, che la teoria euleriana non dà del problema che una soluzione in parte determinata ed in parte no, mentre se fosse determinata interamente, il cangiamento di luogo del punto *O*, o d'uno degli appoggi dovrebbe alterare il carico non di due, ma di tutti e tre insieme. Ciò che poi rende incerta la suddetta teoria si è, che sostituito all'appoggio *B* il *B*, ed al *C* il *C'* in modo che il centro *O* cadesse fuori delle rette *CB BC*, e che per conseguenza il corpo *RST* tendesse a capovolgersi, com'è manifesto, o sulla retta *CB*, ovvero sul-

la BC'; nulla ostante resterebbero determinate le pressioni de' punti $C\ A\ B'$, o $C'A\ B$ come se dovesse sostenersi in equilibrio. L'*Ab. Bossut* (*) parlando su questo soggetto dice: "il problema è ancora determinato quando vi sono tre appoggi, e che questi appoggi non sono in linea retta,,. Ecco la dimostrazione dell' assunto di lui. Congiunta la retta AP, (*fig. II.*) e prolungata in D, riguarda questo Autore la retta APD come un vette caricato nel punto P della pressione totale P, e sostenuto da due appoggi in A e in D, e sostituendo al D li $B\ C$ facilmente determina essere la pressione in $A = P \cdot \frac{DP}{AD}$, la pressione in $B = P \cdot \frac{AP}{AD} \cdot \frac{DC}{BC}$, e quella in $C = P \cdot \frac{AP}{AD} \cdot \frac{DB}{BC}$. Quindi dimostra che la ritrovata serie di proporzionali $P : A : B : C :: BC \times AD : BC \times PD : AP.\ DC : AP \times DB$ si trasmuta nella seguente $P : A : B : C :: ABC : PBC : PAC : PAB$; di modo che rappresentando il triangolo ABC il peso assoluto concentrato in P, il triangolo PBC rappresenta la pressione sofferta dal punto A, il triangolo APC quella del punto B, e per fine il PAB quella del punto C. Ciò dimostrato conchiude: " questo elegante teorema è del *Sig. Eulero*, che lo ha dato senza dimostrazione,, ma che deducesi però immediatamente dal risultato della soluzione di lui sopra riferito." Quando i tre appoggi $A\ B\ C$ sono in una linea retta, i triangoli ABC PBC PAC PAB s annullano, ed il rapporto delle forze $P\ A\ B\ C$ è indeterminato. Se il corpo s'appoggia con più di tre punti, il problema, considerato sempre secondo le leggi ordinarie della Meccanica, è indeterminato, qualunque sia la disposizione rispettiva degli appoggi. ecc.,, Quest' asserzione mi sembra poco fondata non iscorgendosi ragione alcuna per cui determinato dovesse esser il problema sino a tre punti, e non più; ciò poi, che è degno di osservazione, si è, che quantunque l'esposta soluzione pel caso de' soli tre appoggi abbia tutta l'apparenza di essere de-

(*) Trattato element. di Meccanica. Vol. primo. pag. 212 in Pavia MDCCLXXXVIII.

terminata, pure non lo è. Imperocchè ſuppoſto tolto uno degli appoggi, a cagion d'eſempio *C*, e ſoſtituito in ſua vece il C' ovunque o nel lato *CA* o nel lato *CB*, ſi rileva chiaramente, conſiderando pure eſpreſſe le preſſioni de' nuovi appoggi $A\ B\ C'$ o dalla ſerie delle loro quantità aſſolute, o dalla relativa de' triangoli ABC' PBC' PAC' *PAB*, che bensì variano le preſſioni ſu i due punti $B\ C'$, ma reſta coſtante la preſſione ſul terzo *A*; e che in oltre trasferendoſi comunque ſi voglia li *B C* in $B\ C''$, purchè la retta BC'' paſſi pel punto *P*, e ſieno le diſtanze DB' DC'' uguali alle *DB DC*, rimane la ſteſſa non ſolo la preſſione in *A*, ma anche in B' e C'', mentre per la diverſa poſizione riſpettiva acquiſtata da' punti in tutti ſiffatti caſi dovrebbe alterarſi la preſſione ſofferta da ciaſcuno nello ſteſſo tempo. Di più facendo girare la linea *BC* ſul punto *D* finchè s' adatti alla retta *AD*, è manifeſto che tuttavia i tre appoggi $B'\ A\ C'''$ collocati in una linea retta porterebbero le ſteſſe preſſioni come ſe collocati foſſero in un triangolo *BAC*, o qualunque altro $B'AC''$, il che quanto ſia ripugnante lo dimoſtreremo a ſuo luogo. Non v' ha dubbio che la ſoluzione propoſta dal *Sig. Ab. Boſſut* per li tre punti non dia il problema determinato alla ſua maniera anche qualora ſieno ſituati in linea retta, poichè ſeguendo il metodo di lui potrà ſempre trovarſi nel vette retto $C\ APB''$ il punto *D*, in cui immaginato un appoggio, e ripartito il peſo *P* tra gli appoggi *A D*, e quindi la parte portata dal *D* tra li C''' e B', ſia la ſomma delle preſſioni ne' ſoli tre appoggi eſiſtenti $C'\ A\ B''$ uguale alla totale preſſione *P*. Avrebbe concluſo lo ſteſſo anche il ſagace Autore ſe nel paſſare dal caſo generale a quello particolare aveſſe fatto rifleſſo ſulla ſerie delle quantità effettive delle preſſioni e non alla relativa eſpreſſa per mezzo de' ſopra indicati triangoli. E' poi vero che calcando la ſteſſa via, ſe quattro o più foſſero i punti di appoggio, il problema diventa indeterminato riguardo alla riſpettiva forza che dovrebbe ciaſcuno di eſſi portare, ma lo è ancora quanto alla relativa diſpoſizione loro, come ſi è dimoſtrato dei tre. Di fatti ſi conſideri al ſolito che il peſo da ſoſtenerſi ſu quattro appoggi *A B E C* (*fig. III.*) ſia raccolto nel punto P, da cui ſi conduca a qualſivoglia appoggio *A* la retta *AP*, e immaginandoſi eſſere un appoggio in *D*

nella ſteſſa direzione prolungata verſo *P*, ſi congiunga la *BD*, e ſi prolunghi, onde concorra in *F* colla retta *CE* che uniſce gli altri due appoggi *C E*. Ora determinando nel vette *AD* le preſſioni in *A* e in *D* prodotte dal peſo *P*, e dividendo quella di *D* ne' punti *B F*, e per ultimo quella di *F* ne' punti *C E*, ſi avranno le forze neceſſarie d'applicarſi a' punti *A B E C* per ſoſtenere in equilibrio l'intero peſo *P*. Eſſendo però arbitrario il punto *D*, ſaranno pure arbitrarie le preſſioni aſſegnate agli appoggi *A B C*, ch' è il primo genere d'indeterminazione; l'altro genere poi ſi manifeſta concependo girarſi la retta *CE* ſul punto *F*, o la retta *BD*, o le rette *BDF CE* inſieme ſul punto *D*. Non è queſta la ſola queſtione di Statica, di cui non ſi è potuto ſcoprire la ſoluzione direttamente, onde ſi è dovuto dar mano a ipoteſi o ſuſſidj ed immagini non convenienti alla naturale ſua coſtituzione, a ſegno di tramutarla in altra del tutto differente dalla propoſta. Mi riſervo pertanto di dimoſtrare eſſere accaduto ciò anche in altro ſoggetto ſtatico, che ſi reſe celebre per eſſervisi adoperati uomini illuſtri, e che non è meno importante di quello ſu cui ragioniamo: del quale eſporrò adeſſo quella ſoluzione che reputo ſoddisfacente alle condizioni ſopra dichiarate, ed a quelle che andrò dichiarando opportunamente.

PROBLEMA I.

Riposando un corpo ſu tre punti A B C (Fig. IV.) *ſituati in un piano orizzontale, determinare la preſſione che ſente ciaſcuno di eſſi.*

Dal punto *G*, in cui la verticale che paſſa pel centro di gravità del corpo incontra il piano orizzontale, ſi conducano agli appoggi *A B C* le rette *GA GB GC*, ed a queſte le perpendicolari *LAI DBE HCF*; indi ſi menino da' punti *B C* le *CL BI* parallele alla *GA*, da' punti *A C* le *AD CE* parallele alla *GB*, e da' punti *A B* le *AH BF* parallele alla *GC*.

Io riguardo *ABCG* come un vette angolare a tre braccia *AG BG CG*, aggravato nel punto *G* della loro unione del peſo intero, che ſi appoggia ſopra i tre punti *A B C*; e

considerando poscia le pressioni che essi soffrono, come tre potenze che agiscano dal basso all' alto perpendicolarmente al piano orizzontale ABC, è chiaro che per l' equilibrio supposto, prendendo il punto di appoggio A per centro del moto del peso del corpo e delle potenze o pressioni collocate in B e in C, intorno all'asse IAL, sarà il prodotto di esso peso nella sua distanza GA uguale ai prodotti insieme delle pressioni ne' punti B C nelle rispettive loro distanze BI CL dall' asse medesimo; similmente dovrà essere il momento del peso riguardo al punto d' appoggio B uguale alla somma de' momenti delle pressioni in A e in C rispetto all' asse DBE, e così il momento dello stesso peso sul punto d' appoggio C uguale alla somma de' momenti delle pressioni nei punti A B intorno all' asse HGF. Stabilito ciò, sia il peso del corpo sostenuto dal vette a tre braccia $ABCG = G$, la pressione sofferta dall' appoggio $A = A$, la pressione nel punto $B = B$, e quella del punto $C = C$; e sia poi il ramo $AG = a$, il ramo $BG = b$, ed il ramo $CG = c$. ed inoltre $AD = f$, $AH = g$, $BI = h$, $BF = l$, $CE = m$, e $CL = n$: avremo dunque per le cose dette le tre equazioni

$$aG = hB + nC$$

$$bG = fA + mC$$

$$cG = gA + lB$$

dalle quali si ricava che le ricercate pressioni sono rappresentate dalle seguenti formole (M) (N) (O)

$$A = G\left(\frac{bln + chm - alm}{fln + ghm}\right) \dots\dots (M)$$

$$B = G\left(\frac{agm + cfn - bgn}{fln + ghm}\right) \dots\dots (N)$$

$$C = G\left(\frac{afl + bgh - cfh}{fln + ghm}\right) \dots\dots (O)$$

Il che ecc.

SCOLIO.

SCOLIO.

Siccome in ognuna delle formole (*M*) (*N*) (*O*) entrano tutte le nove distanze *a b c f g h l m n* dai tre assi di moto, così è chiaro che la nostra soluzione è determinata, vale a dire che il carico sofferto da ciascun appoggio deriva dalla posizione rispettiva che ha verso gli altri due, e verso il punto in cui s'intende raccolto il peso o la pressione totale, di modo che qualsisia cangiamento in uno de' quattro punti *A B C G* altera il sistema delle forze in equilibrio. Dee però avvertirsi che le suddette formole vagliono finchè il punto *G* cade dentro il triangolo *ABC* costituito dai tre appoggi *A B C*, circostanza necessaria, perchè se cadesse fuori, il problema diventa impossibile, non potendo il corpo rattenersi in quiete sugli appoggi medesimi, come è per se evidente. Non occorre nella mia, come nella soluzione data dall'*Eulero*, far uso della condizione che la somma delle pressioni sugli appoggi sia uguale all' intero peso del corpo; il che certamente non può farsi, mentre nel considerare il problema generalmente, si ammetterebbe che in tutte le disposizioni possibili de' quattro punti *A B C G* deggia distribuirsi la pressione totale *G* in tutti e tre gli appoggi *A B C*: nè ho riguardato con *Bossut*, che torna lo stesso, che il punto *G* deggia essere il centro di potenze parallele collocate a punti fissi *A B C*; avvegnachè entrerebbesi così in questione diversa, e di natura sua indeterminata, come s' è veduto. E' vero già che la somma delle pressioni sugli appoggi dee pareggiare il peso intero del corpo, ma ciò dee servire di prova per così dire al risultato ottenuto, e non mai di condizione per ottenerlo. Così ora prima di passare mediante le nostre formole ad alcuni casi particolari, ove avremo più luogo a far conoscere la verità di tali obbiezioni, faremo vedere che la nostra soluzione quantunque indipendente dalla condizione accennata la comprende nel risultato finale da essa somministrato. Perchè la somma pertanto delle pressioni sopra gli appoggi *A B C* sia uguale al peso *G* dovrà essere la somma delle frazioni, che moltiplicano nelle tre formole (*M*) (*N*) (*O*) lo stesso peso *G*, uguale all' unità, cioè do-

vrà verificarsi l'equazione $afl + agm + bln + bgh + chm + cfn = alm + bgn + cfh + fln + ghm$, il che viene provato nel teorema seguente, di cui le due dimostrazioni, che qui espongo, e che deggiono riguardarsi come uno de' maggiori sforzi della sintesi, trovate furono dagli alunni *Bernardi* e *Romanò* di questo Collegio militare.

TEOREMA I.

Se da un punto G (fig. V.) *preso dentro il triangolo* RST *si conducano le perpendicolari* GA GB GC *ai tre lati* RT RS ST, *e dal punto* A *le* AD AH *parallele alle* GB GC, *dal punto* B *le* BI BF *parallele alle* GA GC, *e finalmente dal punto* C *le* CE CL *parallele alle* GB GA: *dico che*

$$GAD.BF + GAH.CE + GBI.AH + GBF.CL + GCE.BI + GCL.AD =$$

$$GA.BF.CE + BG.CL.AH + GC.AD.BI + AD.BF.CL + BI.CE.AH$$

DIMOSTRAZIONE PRIMA.

Dai punti A B C alle AG BG CG prolungate si conducano le perpendicolari $A\Delta$ AP BO BK CN CM; dai punti O P K alla BG le perpendicolari OQ PV KX, e dal punto P alla AG la perpendicolare PY; e la AP concorra colla BG nel punto Z.

Pertanto essendo $BG : GO :: GP : GV$, e $BG : AG :: KG : G\Delta$; sarà $GO . GP = BG . GV$, ed $AG . KG = BG . G\Delta$; dunque $GO . GP + AG . KG = BG . V\Delta$; ma $BG . V\Delta = AP . BO$, perchè si ha $AP : V\Delta :: PZ : VZ :: BG : BO$; quindi $GO . GP + AG . KG = AP . BO$, e quadrando

$$GO^2 . GP^2 + AG^2 . KG^2 + GO . GP . AG . 2KG = AP^2 . BO^2$$

si ponga comune la quantità $GO^2 . GP^2 + GO^2 . AP^2 + GP^2 . BO^2$; sarà dunque $GO^2 . GP^2 + GO^2 . AP^2 + GP^2 . BO^2 + GO^2 . GP^2 + AG^2 . KG^2 + GO . GP . AG . 2KG = AP^2 . BO^2 + GO^2 . GP^2 + GO^2 . AP^2 + GP^2 . BO^2$;
ma i primi quattro termini del primo membro sono uguali a $GO^2 (GP^2 + AP^2) + GP^2 (BO^2 + GO^2)$, ovvero $GO^2 . AG^2 + GP^2 . BG^2$; e quei del secondo sono uguali a $(GP^2 + AP^2)(BO^2 + GO^2)$, oppure $AG^2 . BG^2$; dunque

$GO^2.AG^2 + GP^2.BG^2 + AG^2.KG^2 + GO.GP.AG.2KG = AG^2.BG^2$,

e dividendo per $AG.BG$ si avrà

$$\frac{GO^2}{BG}.AG + \frac{GP^2}{AG}.BG + \frac{KG^2}{BG}.AG + \frac{GO.GP}{BG}.2GK = AG.BG;$$

ma $\frac{GO^2}{BG} = G\mathcal{Q}$, $\frac{GP^2}{AG} = G\Upsilon$, $\frac{KG^2}{BG} = GX$, $\frac{GO.GP}{BG} = GV$; quindi

$AG.G\mathcal{Q} + BG.G\Upsilon + AG.GX + 2KG.GV = AG.GB$, e moltiplicando per CG, si avrà $AG.G\mathcal{Q}.CG + BG.G\Upsilon.CG + AG.GX.CG + 2KG.GV.CG = AG.GB.CG$; si ha poi $G\mathcal{Q}.CG = GO.GM$, $G\Upsilon.CG = GP.GN$, $GX.AG = GK.G\Delta$, $GV.CG = GP.GM$; laonde $AG.GO.GM + BG.GP.GN. + CG.GK.G\Delta + 2KG.GP.GM = AG.GB.CG$. Di nuovo essendo $BG : GC :: GO : GM$, e $CG : GA :: GN : GP$; sarà $BG : GA$, ovvero $GK : G\Delta :: GO.GN : GM.GP$; dunque $KG.GP.GM = G\Delta.GN.GO$; e però $2KG.GP.GM = KG.GP.GM + G\Delta.GN.GO$; per il che

$AG.GO.GM + BG.GP.GN + CG.GK.G\Delta + KG.GP.GM + G\Delta.GN.GO = AG.GB.CG$, cioè $AG(BF-CG)(CE-BG) + BG(AH-CG)(CL-AG) + CG(BI-AG)(AD-BG) + (BI-AG)(AH-CG)(CE-BG) + (AD-BG)(CL-AG)(BF-CG) = AG.GB.CG$, e fatte le moltiplicazioni si troverà

$AG.BF.CE - AG.BF.BG - AG.GC.CE + AG.GB.CG + BG.CL.AH - BG.CL.CG - BG.AG.AH + AG.BG.CG + CG.AD.BI - CG.AD.AG - CG.BG.BI + AG.GB.CG + CE.BI.AH - CG.CE.BI - BG.BI.AH + CG.BG.BI - AG.AH.CE + AG.CG.CE + BG.AG.AH - AG.GB.CG + AD.BF.CL - CG.CL.AD - BG.BF.CL + BG.CL.CG - AG.AD.AF + CG.AG.AD + AG.BF.BG - AG.GB.CG = AG.GB.CG$, cioè

$AG.BF.CE + BG.CL.AH + CG.AD.BI + CE.BI.AH + AD.BF.CL$,

$-CG.CE.BI - BG.BI.AH - AG.AH.CE - CG.CL.AD - BG.BF.CL - AG.AD.BF = 0$;
dunque $AG.BF.CE + BG.CL.AH + CG.AD.BI + CE.BI.AH + AD.BF.CL = CG.CE.BI + BG.BI.AH + AG.AH.CE + CG.CL.AD + BG.BF.CL + AG.AD.BF$; il che ecc.

Dimostrazione Seconda.

Dal punto X (*fig. VI.*) si conduca la XP parallela alla CE, che concorra col lato ST in P; indi dal punto B si tiri $B\Delta$ parallela allo stesso lato ST, che concorra in Δ colla DA, e calata la DZ perpendicolare alla FB prolungata quanto occorre, si ponga $BV : VE :: BQ : R :: DQ : U$, e $BQ : BG :: BV : P$.

E poichè $BQ : BG :: BV : P$, sarà $BV . BG = BQ . P$, e perciò $BV . BG . BQ = BQ^2 . P$; ed essendo $BV : P :: BQ : BG$ ovvero AQ; e per li triangoli simili DQB AQI è $BQ : AQ :: DQ : QI$; dunque $BV : P :: DQ : QI$, e $BV . QI . DQ = P . DQ^2$. Similmente essendo $BQ : BV :: R : VE$, e $BQ : BV :: BG : P$; sarà $R : VE :: BG : P$, e $P . R = BG . VE = CVE$; ma per la somiglianza de' triangoli BVE CVF è $CVE = BVF$; dunque $P . R^2 = BVF . R$; e siccome $BV . R = VE . BQ$, cioè $BVF . R = VE . BQ . VF$; così si avrà $P . R^2 = VE . BQ . VF$: per esser poi $BG : P :: BQ : BV$, e $BQ : BV :: XH : XL$; sarà $BG : P :: XH : XL$, e $P . XH^2 = LXH . BG$. Di nuovo essendo per ipotesi $BV : DQ :: VE : U$: e si è dimostrato $BV : P :: DQ : QI$; sarà dunque $VE : U :: P : QI$, e quindi $2XH . P . U = 2XH . VE . QI$: avendo poi $BQ : BV$, ovvero $HX : XL$ ragion composta di $BQ : BG$ e di $BG : BV$, ed è $BG = QA$, $BG = CV$, $BQ : QA :: DQ : QI$, e $CV : BV :: FV : VF$; avremo $HX : XL :: DQ . FV : QI . VE$, ed $HX . QI . VE = XL . DQ . FV$; e perciò sarà $2XH . P . U = XL . DQ . FV + XH . QI . VE$. Di più stando per ipotesi $BV^2 : VE^2 :: BQ^2 : R^2 :: DQ^2 : U^2$; e come la differenza degli antecedenti alla

differenza de' conseguenti, così un antecedente al suo conseguente; si avrà $BQ^2 - DQ^2$, cioè $BD^2 : R^2 - U^2 :: BQ^2 : R^2 :: BV^2 . VE^2$; ed è $BV^2 : VE^2 :: BD^2 : DZ^2$; dunque $R^2 - U^2 = DZ^2$.

Ora i triangoli simili HXP BVE danno $PX : BV :: XH : VE$, ed è $PX = \Delta Q$, avvegnachè i triangoli PXC $B\Delta Q$ sono uguali e simili; si avrà perciò $\Delta Q . VE = BV . XH$, cioè $\Delta Q . VE = AXH$, e posto comune $DQ . VE$, sarà $\Delta D . VE = BV . XH + DQ . VE$; ma per la somiglianza de' triangoli $DB\Delta$ BVE si ha $\Delta D . VE = DBE$: dunque $DBE = BV . XH + DQ . VE$; e $DBE = VBZ$; dunque $VBZ = BV . XH + DQ . VE$, cioè $BV (BZ - XH) = DQ . VE$, e quindi $BV : VE :: DQ : BZ - XH$; ed è per ipotesi $BV : VE :: DQ : U$; dunque $U = BZ - XH$, e $XH = BZ - U$, $XH + 2U = BZ + U$, e però $BZ^2 - U^2 = XH (XH + 2U)$; ma $BZ^2 = BD^2 - DZ^2$, e si è dimostrato $DZ^2 = R^2 - U^2$; si avrà in conseguenza $BD^2 - R^2 = XH(XH + 2U)$, oppure $BQ^2 - QD^2 - R^2 - XH^2 = 2XH.U$, e quindi $BQ^2 . P - QD^2 . P - R^2 . P - XH^2 . P = 2\ XH . P . U = XL . DQ . FV + XH . QI . VE$ per ciò che poco fa abbiamo scoperto. Si è poi dal bel principio provato $BQ^2 . P = BV . BG . BQ$, $QD^2 . P = BV . QI . DQ$, $R^2 . P = BVF . R$, $XH^2 . P = LXH . BG$, cioè

$$BQ^2 . P - QD^2 . P - R^2 . P - XH^2 . P = BV . BG . BQ - BV . QI . DQ - EVF$$

$BQ - LXH . BG$, si avrà dunque, essendo $BV = GC$, $BQ = AG$

$$GC . BG . AG - GC . QI . DQ - EVF . AG - LXH . BG = XL . DQ . FV + XH . QI . VE$$

E perchè $CL - AG = XL$; sarà anche $CL . FV . DQ - AG . FV . DQ = XL . FV . DQ$, e perciò

$$GC . BG . AG - GC . DQI - EVF . AG - LXH . BG = CL . FV . DQ + XH . QI . VE - AG . FV . DQ$$

e posto comune $AG . FV . DQ + LXH . BG + GC . EV . QI - GC . BG . AG$, si otterrà

$$AG . FV . DQ + GC . EV . QI - GC . DQI - EVF . AG = CL . FV . DQ + LXH . BG + GC . EV . QI + HX . QI . VE - GC . BG . AG ;$$

ma il primo membro è $=(DQ-EV)$, cioè $(AD-CE)(AG.FV-GC.QI)$; e nel secondo $LXH.BG=BG.XH.CL-BG.XH.CX$: dunque

$$(AD-CE)(AG.FV-GC.QI)=CL.FV.DQ+BG.XH.CL+GC.EV.QI+XH.QI.VE-CGA.GB-BG.XH.CX;$$

ed essendo $AD-BG=DQ$, si ha $CL(FV.DQ+BG.XH)=CL(FV.AD-FV.BG+BG.XH)$: ed è in oltre $GC.QI.EV+XH.QI.EV=AH.QI.EV$, per essere $CG+XH=AH$, la quale uguaglianza dà ancora $CGA.GB+GB.XH.CX=AH.GA.GB$:

dunque $CG.QI.EV-CGA.GB+XH.QI.EV-BG.XH.CX=AH(QI.EV-GA.GB)$.

E poichè $EV=CE-BG$, e $GA=BI-IQ$; sarà $EV(BI-IQ)=GA(CE-BG)$, e posto comune $EV.QI-GA.CE$; si avrà $EV.BI-GA.CE=EV.QI-GA.GB$, e però $(AD-CE)(GA.VF-GC.QI)=CL(FV.AD-FV.BG+BG.XH)+AH(EV.BI-GA.CE)$. Ora essendo $FV+AX=BF$, posta comune HX, sarà $FV+AH=BF+XH$, ed $FV=BF+XH-AH$, e perciò $FV.BG=BG(BF+XH-AH)$, e aggiugnendo $FV.DQ$, sarà $FV.AD=FV.DQ+BG.XH+BG.BF-BG.AH$, ovvero $FV.AD-GB.BF+BG.AH=FV.DQ+BG.XH$; ma $FV=BF-CG$, e però $FV.AD=AD.BF-AD.CG$; dunque giacchè $DQ=AD-BG$, ed $FV.DQ=FV.AD-FV.BG$,

$$AD.BF-AD.CG-BGF+GB.AH=FV.AD-FV.BG+BG.XH.$$

E similmente essendo $CE-BG=VE$, sarà $BI(CE-BG)=BI.VE$, e tolto il comune $GA.CE$; sarà $BI.CE-GA.CE-GBI=BI.VE-GH.CE$; ed anche $AH(BI.CE-GA.CE-GBI)=AH(BI.VE-GA.CE)$; quindi $(AD-CE)(GA.VF-GC.QI)=AH(BI.CE-GA.CE-GBI)+CL(AD.BF-AD.CG-GBF+BG.AH)$ Finalmente essendo $BF-FV=GC$, e $BI-IQ=GA$; sarà $GA(BF-FV)=GC(BI-IQ)$, e posto comune $GA.FV-GC.BI$, sarà $GA.BF-GC.BI=GA.FV-GC.IQ$: dunque

$(AD - CE)(GA.BF - GC.BI) = AH(BI.CE - GA.CE - GBI)$
$+ CL(AD.BF - AD.CG - GBF + BG.AH)$

cioè $GAD.BF + GAH.CE + GBI.AH + GBF.CL + GCE.BI$
$+ GCL.AD = GA.BF.CE + BG.CL.AH + GC.AD.BI$
$+ AD.BF.CL + BI.CE.AH$; il che ecc.

Corollari

I. Se le tre braccia AG BG GC sieno fra di sè uguali ed ugualmente inclinate l'una all'altra, sì che sia $a = b = c$, ed $f = g = h = l = m = n = \frac{3a}{2}$, le formule (M) (N) (O) danno $\frac{1}{3}G$ per la pressione che aggrava ciascuno degli appoggi A B C, come necessariamente dee accadere in tale circostanza.

II. Cadendo o il punto G sopra uno degli appoggi, a cagion di esempio C, ovvero l'appoggio C sul punto G; sarà $GC = c = o$, $AG = a = CL = n$, e $BG = b = CE = m$, e perciò scopriremo esser nulle le pressioni sugli appoggi A B, e caricato solamente il C dell'intero peso del corpo.

III. Ma due rami AG GC sieno per diritto fra loro (*fig. VII*), ed il terzo BG sia inclinato sotto qualsivoglia angolo $BGC = \mu$. Si prolunghino le due rette DE AC, se fa d'uopo, e concorrano in O; e chiamato il seno tutto $= 1$, sarà $GM = b.\cos.\mu$, $GO = \frac{b}{\cos.\mu}$, $AO = a + \frac{b}{\cos.\mu}$, e $CO = \mp c \pm \frac{b}{\cos.\mu}$, secondo che la retta DE concorre colla AC o di là, come mostra la figura, o di qua dal punto C: e quindi avremo $AD = f = a.\cos.\mu + b$, $AH = AC = g = a + c$, $BI = h = a + b.\cos.\mu$, $BF = l = c - b.\cos.\mu$, $CE = \pm m = \mp c.\cos.\mu \pm b$, $CL = CA = n = a + c$. Sostituiti pertanto questi valori nelle solite formule (M) (N) (O), si trova che la pressione in A è $= G\left(\frac{c}{a+c}\right)$, in $B = G\left(\frac{o}{(a+c)b.\text{sen}^2.\mu}\right) = o$, ed in $C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$; cioè che l'intero peso G è portato dai soli due appoggi AC la cui direzione passa pel punto G, e nulla è la pressione sul terzo B.

IV. Supponendo l'angolo $AGC = \mu = o$, ſicchè il vette da tre rami ſi traſformi in un vette retto ABC, o ACB (*fig. VIII.*), avremo, eſſendo $sen.\, \mu = o$, e $cos.\, \mu = 1$, $AD = f = AB = a + b$, $AH = g = AC = a + c$, $BI = h = AB = a + b$, $BF = l = BC = \mp c \mp b$, $CE = m = CB = \pm c \mp b$, e $CL = n = CA = a + c$, ſervendo i ſegni ſuperiori qualora l'appoggio C cade fra gli $A\ B$, e gl'inferiori ſe il B cade fra gli $A\ C$. Surrogando gli eſpoſti valori nelle formule (M) (N) (O), ſi trova che nel primo caſo è la preſſione ſull'appoggio $A = G\left(\frac{c}{a+c}\right)$, ſopra il $B = G\left(\frac{o}{2(a+b)(b-c)}\right)$, e quella ſofferta da $C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$, nel ſecondo caſo poi, ſi ha la preſſione in $A = G\left(\frac{b}{a+b}\right)$, quella dell' appoggio $B = G\left(\frac{a}{a+b}\right)$, e dell'appoggio $C = G\left(\frac{o}{2(a+c)(c-b)}\right)$: di modo che ſi rileva che il peſo G è ſoltanto portato dai due appoggi tra quali eſercita la ſua azione, e rimane ſuperfluo il terzo ſituato al di là di uno di eſſi.

SCOLIO.

Eulero non parla nemmeno della diſpoſizione dei tre appoggi in linea retta, e *Boſſut* giudica non poterſi definire in tale diſpoſizione il carico portato da ciaſcuno. Ma ſieno ſottili quanto ſi vogliano le rifleſſioni che fa il Sig. *d'Alembert* (Opuſcoli Matem. Tom. VIII. pag. 36) onde ſoſtenere queſta ſentenza, la noſtra ſoluzione, che non è ſoggetta a contraddizioni, prova il contrario. Quantunque poi, come s'è veduto, poſſa col metodo del *Sig. Boſſut* ottenerſi una ſoluzione determinata anche per queſto caſo, eſſa non conviene alla naturale coſtituzione del problema, mentre non determinandoſi in fine che le quantità di tre forze parallele da ſituarſi a' punti $A\ B\ C$, delle quali la riſultante ſia collocata in G, e ſia uguale all'intero peſo G, ſi toglie la capacità, eſſendo gli appoggi immobili ed inconcuſſi, come dee ſupporſi, di ſofferire ciaſcuno di eſſi quanta preſſione può derivargli

rivargli dalla rispettiva posizione, che ha verso gli altri, e verso il centro di gravità del corpo sostenuto. Per intendere però ciò chiaramente immaginiamoci che un corpo omogeneo e di figura regolare venga poggiato colla sua base piana sopra la superficie orizzontale di una materia molle ed ugualmente cedevole, in cui vi sia un punto immobile e fisso, che corrisponda nella verticale, che passa pel di lui centro di gravità; è manifesto che rimarrà la superficie suddetta illesa e solamente in contatto con tutti gli altri punti della base del corpo, e sarà portato l' intero peso di esso dal solo punto medesimo, quand'anche nella superficie molle infiniti altri di quelli che sono in contatto si concepissero diventare del pari immobili ed inconcussi. Similmente se due fossero i punti fissi e situati in una linea retta su cui cadesse la verticale del centro di gravità, questi soli punti porterebbero il peso del corpo nella nota proporzione, sebbene o fuori, o in maggior distanza nella direzione de' medesimi, si concepisse in seguito fornita la superficie molle di altro punto egualmente resistente. Ho detto in maggior distanza riguardo a quello collocato nella direzione de' due primi, avvegnachè di due punti fissi dalla stessa parte il più vicino soltanto alla verticale del centro di gravità dee esser in azione coll' opposto, come quelli che sufficienti esser possono a sostenere il peso totale, per la ragione appunto che se uno di essi s' incontrasse nella verticale medesima, solo lo sosterrebbe interamente. Condizioni alle quali la nostra teoria soddisfa con tutta esattezza.

PROBLEMA II.

Poste le circostanze medesime si cerca la pressione sofferta da ciascuno de' quattro piedi A B C M (fig. IX.), *tra quali cade nel punto* G *la verticale condotta dal centro di gravità del corpo, che sopra di essi riposa.*

Si uniscano le rette *AG BG CG MG*, e si riguardi *ABCGM* come un vette a quattro braccia, che si congiungono ad un punto *G* comune; e condotte le rette *RI DE FP SQ* perpendicolari a dette braccia si calino dall' appoggio *A* le *AD AH AQ* normali alle *DE FP SQ*; dall' appoggio *B* le *BI*

BF BZ alle *RI FP SQ*; dal *C* le *CE CL CS* alle *DE RI SQ*; e per ultimo dall'appoggio *M* le *MR MN MP* perpendicolari alle *RI DE FP*.

Essendo date le lunghezze de' rami e la scambievole loro inclinazione, si chiami per semplicità di calcolo $AG = a$, $BG = b$, $CG = c$, $MG = d$, $AD = f$, $AH = g$, $AQ = \delta$, $BI = h$, $BF = l$, $BZ = \lambda$, $CE = m$, $CL = n$, $CS = \gamma$, $MR = p$, $MN = q$, $MP = \omega$. Sia poi il peso del corpo raccolto in $G = G$, la pressione sull'appoggio $A = A$, sul $B = B$, sul $C = C$, e sopra l'appoggio $M = M$.

Richiamando pertanto alla memoria le considerazioni fatte nel Prob. I. intorno al vette da tre braccia, avremo le quattro equazioni (*D*) (*E*) (*F*) (*G*)

$$aG = hB + nC + pM \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

$$bG = fA + mC + qM \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

$$cG = gA + lB + \omega M \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

$$dG = \delta A + \lambda B + \gamma C \quad \ldots\ldots \quad (G)$$

le quali danno le formule (*P*) (*Q*) (*R*) (*S*) per le pressioni ricercate.

$$A = G\left(\frac{(dh\omega + cp\lambda - a\omega\lambda - lpd)(m+q) + b\omega(n\lambda - h\gamma) + hlp\gamma}{(h\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)(m+q) + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma}\right) \ldots (P)$$

$$B = G\left(\frac{(a\omega\delta + dgp - cp\delta)(m+q) + n\omega(df - b\delta) + f\gamma(cp - a\omega) - bgp\gamma}{(h\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)(m+q) + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma}\right) \ldots (Q)$$

$$C = G\left(\frac{(h\delta - df)(h\omega - lp) + p\lambda(hg - cf) + af\lambda\omega}{(h\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)(m+q) + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma}\right) \ldots (R)$$

$$M = G\left(\frac{(ag\lambda + ch\gamma - al\delta - dgh)(m+q) + f\gamma(al - ch) + bg(h\gamma - n\lambda) + f\omega(c\lambda - dl) + bln\delta}{(h\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)(m+q) + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma}\right) \ldots (S)$$

Il che ecc.

COROLLARI.

1°. Supponendo che sotto il punto *G* fosse collocato l'appoggio *A*, o l'appoggio *B*, sicchè sia $AG = a = 0$, $AQ = \delta = GM = d$, $AH = g = GC = c$, $AD = f = GB = b$, oppure $BG = b = 0$, $BZ = \lambda = GM = d$, $BI = h = GA = a$, $BF = l = GC = c$; quantunque gli appoggi *B C M* nel primo caso,

e gli $A\ M\ C$ nel secondo si trovino situati come nel Problema I., nulla ostante le formole (P) $(\mathfrak{Q})$ (R) (S) danno a vedere, che il totale peso G è portato o dall' appoggio A, ovvero dal B, e che nulle sono le pressioni sopra i tre residui respettivi appoggi.

2.° Se oltre essere i rami $AG\ BG\ CG\ MG$ uguali fra loro, sia AG per diritto coll' opposto GC, ed MG col suo opposto BG, chiamato l'angolo $AGB = \mu$, e l' angolo $ABG = \pi$, il seno tutto $= 1$; sarà $AG = a = BG = b = CG = c = MG = d$, $AD = f = BI = h = CS = \gamma = MP = \omega = \frac{a.\ sen\ \mu}{Tang.\pi}$, $BF = l = CE = m = A\mathfrak{Q} = \delta = MR = p = 2a - \frac{a.sen.\mu}{Tang.\pi}$, ed $AH = g = BZ = \lambda = CL = n = MN = q = 2a$. Sostituiti questi valori nelle formule (P) $(\mathfrak{Q})$ (R) (S), si trova, che la pressione sopra ciascun appoggio è espressa dalla stessa quantità
$G\left(\frac{2.\ Tang.\ \pi - sen.\ \mu}{8.\ Tang.\pi - 4.sen.\mu}\right) = \frac{1}{4}\ G$, vale a dire che ognuno de' quattro appoggi $A\ B\ C\ M$ porta la quarta parte del peso G.

3.° Se ponganzi uguali le quattro braccia, ma le sole due $AG\ GC$ per diritto, e sia l' angolo $BGC = \mu$, e l' angolo $AGM = \pi$, ed il raggio o seno tutto $= a$; avremo $AG = a = BG = b = CG = c = MG = d$, $AD = f = BI = h = a \pm cos\mu$, $AH = g = CL = n = 2a$, $A\mathfrak{Q} = \delta = MR = p = a \mp cos\ \pi$, $BF = l = CE = m = a \pm cos.\ \mu$, $BZ = \lambda = MN = q = a + \frac{cos.\ \pi.\ cos.\ \mu + sen.\ \pi.\ sen.\ \mu}{a}$, $CS = \gamma = MP = \omega = a \pm cos.\ \pi$, e facendo per maggior semplicità $cos.\ \mu = b$, $cos.\ \pi = c$, ed $a + \frac{cos.\ \pi.\ cos.\ \mu + sen.\ \pi.\ sen.\ \mu}{a} = r$, le nostre formole (P) $(\mathfrak{Q})$ (R) (S) somministrano i seguenti valori per le ricercate pressioni.

$$A = G\left(\frac{(a^2 \pm ab \pm ac \pm bc)\ r \mp cr^2 - ab^2 - ac^2 \mp 2abc}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2)r + (a \mp c)r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)}\right)$$

$$B = G\left(\frac{(a^2 - c^2)\ r}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2)r + (a \mp c)r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)}\right)$$

$$C = G\left(\frac{(a^2 \pm bc)r - a(b^2 + c^2 \pm 2bc)}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2)r + (a \mp c)r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)}\right)$$

$$M = G\left(\frac{ar^2 + r(-a^2 \mp bc)}{(2a^2 \pm ab \pm ac \pm bc - c^2)r + (a \mp c)r^2 - 2a(b^2 + c^2 \pm 2bc)}\right)$$

valori che insieme pareggiano l' intero peso G. Volendo passare dal vette di quattro rami a quello di tre, basta supporre l' angolo $BGC = \mu = 0$, cioè $\cos.\mu = b = a$, e si troverà come nel Corollario III. del Problema I., che i soli due appoggi A C per diritto sostengono il peso G, nè soffre pressione alcuna il terzo M.

IV. Ma se oltre essere per diritto i due rami AG GC, lo sono pure con essi i due BG GM, onde $BACMG$ divenga un sol vette retto (*Fig. X.*), in cui il grave G abbia due appoggi A B da una parte, e due C M dall' altra, sarà $AD = f = BI = b = BA = b - a$, $AH = g = CL = n = AC = a + c$, $AQ = \delta = MR = p = AM = a + d$, $BF = l = CE = m = BC = b + c$, $BZ = \lambda = MN = q = BM = b + d$, $MP = \omega = CS = \gamma = CM = d - c$. Quindi le quattro equazioni generali surriferite (D) (E) (F) (G) si cangeranno per questo caso nelle seguenti

$$aG = C(a + e) + M(a + d) - B(b - a)$$
$$bG = C(b + c) + M(b + d) + A(b - a)$$
$$cG = A(a + c) + B(b + c) - M(d - c)$$
$$dG = A(a + d) + B(b + d) + C(d - c)$$

nella prima e terza delle quali l' ultimo termine è negativo, avvegnachè riguardando i punti A C come centri di moto, le potenze supposte ne' punti B M agiscono pel medesimo verso col grave G, e pel verso contrario le sole C M, ovvero A, B. Dallo sviluppo pertanto di tali equazioni trovasi

$$A = G\left(\frac{c}{a + c}\right)$$

$$B = G\left(\frac{d(a + c) - c(a + d) - a(d - c)}{(b - a)(d - c) + (b + d)(a + c) - (a + d)(b + c)}\right) = 0$$

$$C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$$

$$M = G\left(\frac{\big(b(a+c)-c(b-a)\big)(d-c)+\big(c(a+d)-d(a+c)\big)(b+c)}{\big((b-a)(d-c)+(b+d)(a+c)-(a+d)(b+c)\big)(d-c)}\right) = 0$$

Dal che rilevaſi che gli appoggi eſtremi $B\ M$ non portano alcuna parte del peſo G, ma tutto è ſoſtenuto dai due $A\ C$, che più da vicino l'abbracciano nel modo ſteſſo che accade nel vette ordinario a due ſoli appoggi.

V. Che ſe per ultimo eſſendo gli appoggi diſpoſti in linea retta tre di eſſi $B\ M\ A$ (*fig. XI*) ſieno da una parte, ed il quarto C dall'altra; avremo $AD = f = BI = b = BA = b-a$, $AH = g = CL = n = AC = a+c$, $AQ = \delta = MR = p = AM = d-a$, $BF = l = CE = m = BC = b+c$, $BZ = \lambda = MN = q = BM = b-d$, $CS = \gamma = MP = \omega = MC = d+c$, e però secondo lo ſtabilito principio le preſſioni ricercate dipenderanno dallo ſviluppo di queſte quattro equazioni

$$aG = C(a+c) - B(b-a) - M(d-a)$$
$$bG = A(b-a) + C(b+c) + M(b-d)$$
$$cG = A(a+c) + B(b+c) + M(d+c)$$
$$dG = A(d-a) - B(b-d) + C(d+c)$$

delle quali la prima ha due termini negativi, e la quarta ne ha uno, poichè nel ſupporre ſucceſſivamente i punti $A\ M$ centri del moto, le potenze, che s'immaginano applicate a' punti $B\ M$, ovvero al punto B, agiſcono in favore del peſo G; l'eſpoſte equazioni danno poi

$$A = G\left(\frac{c}{a+c}\right)$$

$$B = G\left(\frac{\big(d(a+c)-c(d-a)\big)(b+c)+\big(c(b-a)-b(a+c)\big)(d+c)}{\big((b-a)(d+c)-(b-d)(a+c)-(d-a)(b+c)\big)(b+c)}\right) = 0$$

$$C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$$

$$M = G\left(\frac{a(b+c)+c(b-a)-b(a+c)}{(b-a)(d+c)-(b-d)(a+c)-(d-a)(b+c)}\right) = 0$$

il che fa vedere come nel corollario antecedente, che i due appoggi $A\ C$, che immediatamente abbracciano il peſo G lo portano come ſe ſoli eſiſteſſero.

SCOLIO.

Crediamo necessario di aggiugnere qui delle riflessioni riguardo alle proprietà che ora abbiamo svolte intorno alle azioni esercitate da quattro appoggi nella diversa posizione loro, a maggior confermazione della nostra generale teoria. Il primo corollario dà un risultato, che è per sè evidente. I risultati del secondo e del terzo sembrano oppugnare con ciò che abbiam trovato nel caso analogo dei tre appoggi; ma ben considerando, si concepirà chiaramente, che se l' aggiunta di un solo appoggio, quando due sieno per diritto col centro di gravità del corpo sostenuto, diventa superflua; l' aggiunta di due o per diritto anch' essi secondo altra direzione col medesimo centro, o variamente collocati, influirà sempre nella medesima pressione sofferta da' primi: imperocchè se sono per diritto, non v' ha maggior ragione che la pressione totale deggia distribuirsi piuttosto ne' due primi, che ne' due secondi; e se non sono per diritto i due appoggi aggiunti, siccome tolto o l' uno, o l' altro de' primi i tre residui, cioè que' tre dentro de' quali cadesse il centro di gravità del corpo, sosterrebbero l' intera pressione, così niuno di essi può rimanere inerte colla presenza del quarto; oltre di che per la ragione appunto, che i tre appoggi rimangono tutti attivi finchè il centro della pressione intera cade dentro il triangolo da essi costituito, deggiono essere pure attivi tutti e quattro nella stessa circostanza. Finalmente i corollarj quarto e quinto confermano ciò che si è concluso intorno al vette retto poggiato su tre punti, nè v' ha cosa più conforme alla ragione di quella, che in questo caso ci fa conoscere la nostra teoria, cioè che il peso attaccato al vette deggia essere portato da' soli due appoggi che più da vicino lo tengono tra essi; mentre nel supporli anche atti soltanto alla pressione che può loro derivare dal peso suddetto, si trovano nella posizione conveniente, onde esercitare l' equilibrio ricercato senza il soccorso di altri appoggi che gli succedano. E qui cade a proposito di far nuovamente osservare, che se nell' accingersi alla soluzione di tal problema si stabilisce che il punto G (*fig. XII.*) dovesse essere il centro

di forze parallele collocate a' punti *B M A C*, con sì fatta ipotesi si cambierebbe in altro diverso, e di natura sua indeterminata: dico che risolverebbesi un problema diverso dal proposito. poichè non ammetterebbesi negli appoggi la capacità di sostenere la pressione competente alla rispettiva posizione loro e verso il centro *B* delle forze; e dico di natura sua indeterminata. avvegnachè dalla posizione arbitraria di due finti appoggi *H D*, il primo collocato tra gli *A C*, ed il secondo tra li *B M* verrebbero a determinarsi le quattro forze parallele da applicarsi a' punti *B M A C* per l'equilibrio del peso *G*.

TEOREMA II.

Qualunque sia il numero de' punti d' appoggio, se il punto G (fig. IX.), *in cui cade nel piano di essi la verticale che passa pel centro di gravità del corpo, è centro di gravità di supposti pesi uguali collocati ne' punti medesimi, gli appoggi sono aggravati ugualmente.*

Imperciocchè pel teorema del *P. Guldini*, la somma de' prodotti de' pesi uguali situati ne' punti *A M C* nelle distanze *AD MN CE* dall' asse *DBE* condotto dal restante punto *B* è uguale al prodotto del peso collocato nel centro *G* di gravità, che sia la somma di detti pesi uguali collocati in tutti i punti *A B C M*, nella distanza *GB* dall' asse medesimo; e così è pure riguardo agli assi condotti per qualsivoglia altro punto *C M A*: ma lo stesso dee verificarsi nell' equilibrio del vette *ABCMG* di molte braccia caricato nel punto *G* della loro unione di qualunque peso *G*: dunque in tal caso le pressioni sugli appoggi *A B C M* saranno rappresentate da pesi uguali fra sè, ed in somma uguali al peso *G*; il che ecc.

Scolio I.

Per far corrispondere a questo nostro teorema sì le formole (*M*) (*N*) (*O*) per li tre punti (*Prob. I.*), che le (*P*) (*Q*) (*R*) (*S*) per li quattro (*Prob. II.*), basta porre per quello del

Guldini nelle prime $a = \frac{1}{3}(h+n)$, $b = \frac{1}{3}(f+m)$, $c = \frac{1}{3}(g+l)$, e si ottiene da tutte e tre lo stesso valore

$$A = B = C = \tfrac{1}{3} G \left(\frac{fln + ghm}{fln + ghm} \right) = \tfrac{1}{3} G$$

e facendo nelle seconde $a = \frac{1}{4}(h+n+p)$, $b = \frac{1}{4}(f+m+q)$, $c = \frac{1}{4}(g+l+\omega)$, $d = \frac{1}{4}(\delta+\lambda+\gamma)$, si ha da tutte e quattro

$$A = B = C = M = \tfrac{1}{4} G \left(\frac{hm\omega\delta + gpm\lambda + hq\omega\delta + gpq\lambda + fn\omega\lambda + flp\gamma - lmp\delta - pql\delta - fh\omega\gamma}{hm\omega\delta + gpm\lambda + hq\omega\delta + gpq\lambda + fn\omega\lambda + flp\gamma - lmp\delta - pql\delta - fh\omega\gamma} \right) = \tfrac{1}{4} G.$$

Qui è da notarsi che il teorema sì famoso del *P. Guldini* è un caso particolare del nostro espresso generalmente nelle formole suddette, mentre, a cagion d' esempio, quanto ai tre punti, basta che il punto *G* (*Fig. IV.*) preso fra essi sia tale che stieno i corpi collocati negli *A B C*, come *GBF. CL + GCE. BI — GA. BF. CE : GAH.CE + GCL.AD — BG.CL. AH : GAD.BF + GBI. AH — GC.BI.AD.*

SCOLIO II.

Ognuno vede la facilità con cui il nostro metodo ci conduce a determinare le pressioni su gli appoggi di qualunque numero, impiegati a sostenere un corpo, nè occorre se non che l' attenzione, che se, come nel vette *ABCYXMG* (*Fig. XIII.*), delle perpendicolari condotte all' asse *DBV*, che passa a cagion d' esempio per l' appoggio *B*, alcune *AD MN XT* cadessero dalla parte del ramo *BG*, ed altre *CE YV* dalla parte opposta, nell' instituire l' equazione relativa al suddetto asse, deggiono prendersi positivi i momenti delle pressioni sopra gli appoggi *A M X*, e negativi quelli dei *C Y*. Così è chiaro ugualmente, che la stessa teoria vale anche se gli appoggi esistessero tutti in un piano comunque inclinato all' orizzonte, impedito essendo al corpo il momento alla discesa da qualche causa o potenza esterna. Anzi che dopo le cose esposte possiamo stabilire i seguenti canoni, la conoscenza de' quali può essere più di frequente utile nelle pratiche.

I. Poggiando un corpo sopra qualsivoglia numero di punti situati nello stesso piano, se uno si troverà nella direzione

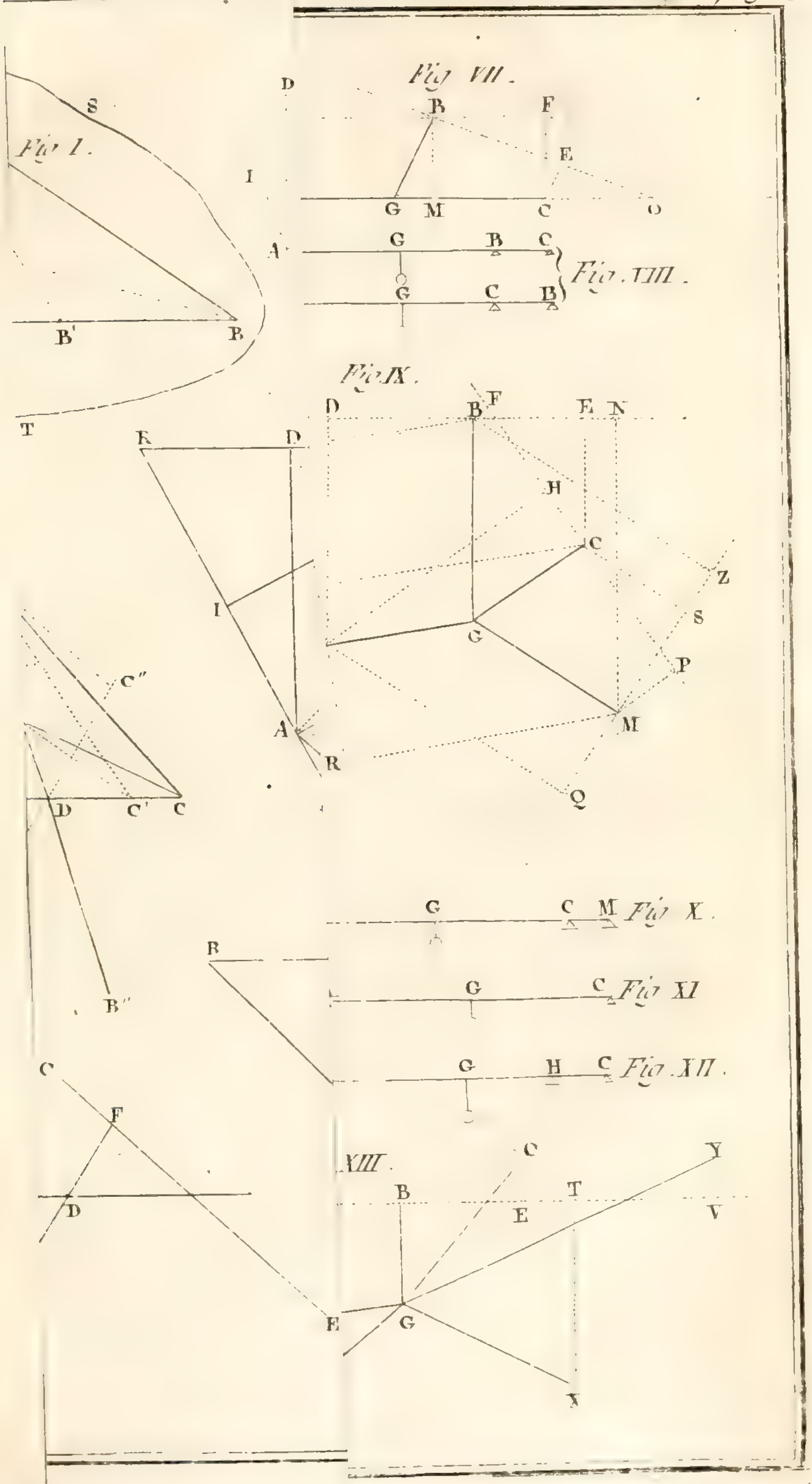


Fig. I.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
XIII.

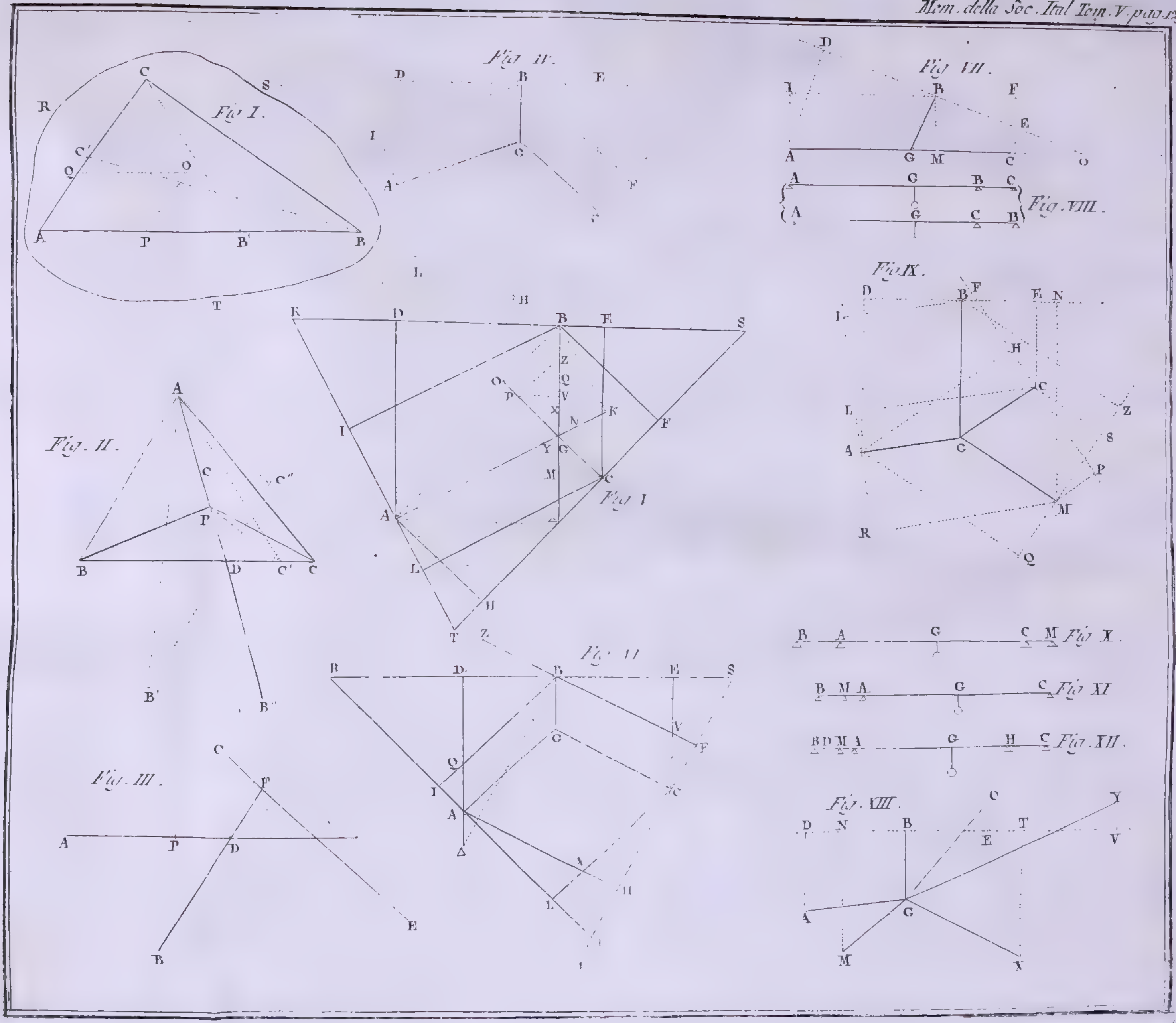


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.

ne della pressione totale, sarà da esso portato interamente, e tutti gli altri punti rimarranno inerti o superflui.

II. Cadendo la direzione della pressione totale dentro il poligono costituito da un qualunque numero di punti d'appoggio, si distribuirà essa in tutti, e sarà ciascuno caricato dipendentemente alla rispettiva posizione che avrà verso gli altri e verso il centro di gravità del corpo sostenuto.

III. Che se il punto, in cui la direzione della pressione totale incontra il piano del suddetto poligono, sia il centro di gravità de' punti d'appoggio, considerando in essi collocati de' pesi uguali, ciascun appoggio porta quella pressione, che risulta dal dividere la totale per il numero loro.

IV. Se essendo tre gli appoggi, e la direzione di due venga intersecata da quella della pressione totale, questi ne soffriranno tutto il carico nella proporzione già nota, ed il terzo non avrà influenza alcuna.

V. Ma se sieno più di tre, quantunque la direzione di due sia intersecata da quella della pressione totale, nondimeno tutti gli appoggi saranno soggetti a carico.

VI. Un numero pari di appoggi situati nelle estremità di varj diametri di un cerchio comunque tra sè inchinati, nel di cui centro cada la direzione della pressione totale, verranno aggravati ugualmente.

VII. Se quanti si vogliano appoggi disposti sieno in una linea retta in cui capiti la direzione della pressione totale, i soli due opposti e più vicini alla direzione medesima la sosterranno, come accade nel vette ordinario a due appoggi.

Queste regole suppongono inconcussi gli appoggi, o almeno capaci di resistere al carico loro dovuto; ma siccome nelle pratiche può temersi di ciò in alcune circostanze, così sarà sempre buona precauzione l'aggiugnere più del bisogno, sicchè nel cedere gli attivi agiscano i sussidiarj nel conservare il corpo sostenuto in equilibrio e nella sua primiera posizione.

PRODROMO

D' OSSERVAZIONI SOPRA IL TRATTATO DI CALCOLO INTEGRALE

Pubblicato in Parigi dal Sig. Marcheſe *de Condorcet* l' Anno M. DCC. LXV.

Di Pietro Ferroni.

Studiava ancora le Matematiche elementari quando nel M. DCC. LXVI. fui de' primi in Italia ad avere ſott' occhio l' opera veramente ſublime intitolata *Du Calcul Integral par M. le Marquis de Condorcet*. La più vaſta e completa raccolta, ch' io aveſſi letta, era allora il trattato di calcolo Integrale del Sig. de *Bougainville*, pubblicato in due parti negli anni M. DCC. LIV. e LVI.; imperocchè i tre volumi di calcolo Integrale del ſempre celebre Sig. *Leonardo Euler* furono, come ognun sa, ſtampati a Pietroburgo nel M.DCC.LXVIII. LXIX. e LXX. *(a)*.

Leſſi avidamente queſt' opera di *Condorcet*; ed alla prima lettura non ſolo mi parve che foſſe come nulla quel poco, ch' io ſapevo di calcolo Integrale, ma credei altresì di smarrirmi nel campo vaſtiſſimo di tante, e sì nuove, e profonde ſpeculazioni. Riavuto dalla prima ſorpreſa rileſſi l' opera; e come accade di chi trovandoſi in paeſe ſconoſciuto prenda a poco a poco domeſtichezza e piacere cogli oggetti, ch' egli ha d' intorno, così ancor io a forza di meditare finalmente raggiunſi il filo della ſcoperta, rintracciai nell' iſtoria mate-

---

(a) Preſſo a poco contemporanei ſi ſtamparono in Parma gli *Elemens du Calcul Intégral* dei PP. *Le Seur e Jacquier* colla data del 1768.; come pure non prima del cadere dell' anno 1767 vide la pubblica luce il Tomo II. delle *Inſtitutiones Analyticae* dei PP. *Riccati* e *Saladini* in Bologna.

matica tutti i paſſi, che avevano fatto altri grandi Analiſti avanti di *Condorcet*, e venni a conoſcere che la I. Sezione della I. parte di quell' opera era la conſeguenza immediata d'un ſolo teorema di *Leibnitz*. Queſto grand' uomo difatti in una Lettera da lui ſcritta a Hannover il 3. d' agoſto del M. DC. XCVII. al famoſo *Giovanni Bernoulli* ſcoperſe il metodo, ch' egli chiamò *differentiationis de Curva in Curvam*, (*a*), e che a mio giudizio è l'origine dei progreſſi poſteriormente fatti nell' Analiſi Infiniteſimale, e perſino del Calcolo delle Variazioni (*b*).

Dopo *Leibnitz* prima di tutti gli altri pubblicò e adoperò queſto metodo nuovo *Nicola Bernoulli* nella Sezione II. d'una ſua Diſſertazione *de Trajectoriis Orthogonalibus* ſtampata negli Atti degli eruditi di Lipſia del M. DCC. XXI. (*c*); e poi lo promoſſe e generalizzò ſommamente il profondo Geometra *M. Fontaine* verſo la ſine dell' anno M.DCC.XXXVIII. (*d*).

Colla guida del ſolo teorema di *Leibnitz* m' accorſi che

(*a*) Si veda l' Epiſtola LIX. a pag. 319. del Tomo I. *Virorum celeberrimorum Got. Gul. Leibnitii & Johannis Bernoullii Commercium Philoſophicum & Mathematicum* edito a Loſanna e Ginevra nel 1745. Parlano del metodo iſteſſo anche le Lettere ſeguenti LX. LXI. e LXIII. a pag 321. 323. e 337 della *Raccolta* medeſima.

(*b*) Due idee luminoſe, e foriere del *Metodo delle Variazioni* contiene l' Epiſtola ſopraccitata LIX. La prima è di far variare il parametro della Logiſtica; e dalla figura riſulta ſubito che l' Arco della Curva *primitiva* eſſendo $\int b dx$, abbiaſi $\delta\int b dx$ l' iſteſſa coſa che $\int\delta(b dx)$ nella Curva *variata*. Imperocchè avverte l' iſteſſo *Leibnitz* che la *variazione* di tutto l' Arco debba eſſere eguale alla ſomma delle *variazioni* parziali degli innumerabili Archetti infiniteſimi; e queſta è Propoſizione intuitiva. La ſeconda idea felice conſiſte nel vedere colla guida della figura e del principio poc' anzi eſpoſto che $\delta\int b' dx - \delta\int b dx$ ſia la coſa medeſima di $\int\delta(b' dx) - \int\delta(b dx)$, e perciò $\delta(\int b' dx - \int b dx)$ o ſia $\delta d(\int b dx)$ $= d\int\delta(b dx)$ o ſia $d\delta(\int b dx)$. Queſti ſono i due fondamenti, ſopra dei quali ſi ſoſtiene tutto il *Calcolo delle Variazioni*, elevato prima d' ogn' altro alla ſua generalità e perfezione dall' inſigne Analiſta M. de la *Grange* nel Tomo II. della Raccolta *Miſcellanea Taurinenſia &c.*, edito nel 1762. a pag. 173. e ſegg., e di cui poco dopo pubblicò gli Elementi *Leonardo Euler* nel Tomo X dei *Novi Commentarii &c.* dell' Accademia di Pietroburgo, ſtampato nel 1766, a pag. 51. e ſegg. Nulladimeno *M. Montucla* accenna ſolo di paſſaggio queſta ſcoperta veramente eccellente di *Leibnitz* a pag. 459. del Tomo II. dell' *Hiſtoire des Mathematiques*.

(*c*) Vedaſi il Tomo VII. dei *Supplementi* a pag. 439. §. XXV. e ſegg., come ancora il Tomo II. della Collezione intitolata *Opera omnia Johannis Bernoullii* al N CXVI.

(*d*) Teorema II. e ſegg. a pag. 26. delle *Mémoires donnés à l' Académie Royale des Sciences &c par M. Fontaine*. E' un Tomo in 4. ſtampato nel 1764. a Parigi; ma il ſuo *Calcul Integral* ha la data del 19. Novembre 1738.

ſi trovavano direttamente tutte l'*Equazioni di condizione* aſſegnate dal Marcheſe *de Condorcet*, e ricevevano ancora una facile e piana dimoſtrazione, ſebbene queſta per il contrario mancaſſe ſenza di quella guida nel metodo uſato dal Ch. Autore Franceſe. In oltre concepii agevolmente come facendo naſcere dal ſolo teorema di *Leibnitz* le predette generali *Equazioni di condizione*, veniſſero queſte a ricondurſi al vero ed unico loro principio fondamentale, da cui nacquero le meno univerſali *Equazioni* di *M. Fontaine*, onde appariſcano ſempre più la ſemplicità e fecondità delle regole matematiche.

Il riſultato di queſte mie rifleſſioni è quello appunto, che faccio adeſſo paleſe ai dotti Analiſti dopo d'averlo comunicato ad alcuni dei Matematici inſigni, i quali m'onorano della loro corriſpondenza. Nè credo che l'avvertire il principio unico e diretto, in cui ſi riſolve tutto il Trattato dell' *Equazioni di condizione*, che prendo a illuſtrare, poſſa mai diſpiacere al Marcheſe *de Condorcet*. Uomo ſommo com' egli è, degno allievo dell' immortal *M. d'Alembert*, Elogiografo grato alla memoria del ſuo Maeſtro, Segretario perpetuo dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi, e noto al mondo letterario per le ſue produzioni, che lo qualificano come uno dei primi Matematici di queſto ſecolo, neſſuno potrà mai penſare ch'egli abbia voluto far pompa di ſublimità maggiore nelle ſue formule anzichè confeſſarle come unicamente nate dalla ſcoperta di *Leibnitz*. Non è dei grandi ingegni, ma degli uomini mediocri togliere il vanto ed il nome alle ſcoperte degli altri (*a*). Le inavvertenze e gli errori medeſimi degli Autori veramente originali ſi diſtinguono ſubito da quelli degli Scrittori comuni (*b*), perchè hanno ſempre

(*a*) Quanto è da imitarſi per la ragione oppoſta il ſavio contegno del Ch. Profeſſore *Gian Franceſco Malfatti*, il quale parlando nella Nota (*a*) della pag. 749. della Parte 2. del Tomo II di queſti *Atti della Società Italiana* (edit. nel 1784.) dell'identità in un certo caſo della Lemniſcata del *Bernoulli* e dell'*Ovale* del *Caſſini*, ſi ſerve dell'espreſſione *E già noto &c.*, memore ch'io l'aveſſi dimoſtrato nell' Annotazione a pag. 512. della mia Opera *Magnitudinum Exponentialium &c.* pubblicata nel 1782.

(*b*) Un dilettante di Matematica, che voleva ſtampare un Opuſcolo intorno l'intenſità della luce, mi conſultava aſſai ſpeſſo nel 1778. e 79., e tra l'altre mi ſcriſſe dell'obliquità o inclinazione del raggio lucido ſopra

un non ſo che di grandezza, e formano parte della Storia iſtruttiva dello ſpirito umano: ma ſi diſtinguono moltopiù per l'accoglienza che abbia chi gli diſcuopra. Gli uomini di minor conto difendono ſempre i loro errori acerrimamente, e per farlo ne ſcrivon cent'altri. All' oppoſto *Iſacco Newton*, quel genio ſublime ed incomparabile, che ſi può dire con tutta ragione il miracolo della ſpecie umana, appena ebbe avviſo de' pochi errori trovati nei ſuoi *Principj* da *Giovanni Bernoulli*, fu così ſavio e modeſto da profittarne per la terza edizione (*a*). Con queſto eſempio veramente imitabile dava egli a conoſcere che il privilegio eſcluſivo di chi profeſſi le Scienze conſiſta ſopra di tutto nel praticare la ſentenza belliſſima di Pittagora ἀληθεύειν, che quel Filoſofo della Grecia opinava eſſere il principale eſercizio dell' iſteſſa *DIVINITA'*. (*b*)

---

d'un punto. Concepii fin d'allora (per quanto mi faceſſe l'onore non meritato di chiamarmi uno de' primi Matematici del ſecolo) ch'ei non poteſſe mai diventare un gran Matematico. L' Anonimo, che poco fa ha mandato in giro per l'Italia il Programma in iſtampa ſopra l'Eptagono con un paralogiſmo puerile a pag. 9. v 6., non ſarà mai Matematico. Queſti errori decidono, e decidono ſenz appello.

(*a*) Intendo di quella di Amſterdam del 1714. Del reſto ſi conſultino il Tomo I. *Opera omnia Johannis Bernoullii &c.* ai N I XXXVIII. e XC., *Mèmoires del' Acadèmie Royale des Sciences de Paris* del 1711. pag. 47. e ſegg. dell'edizione in 4., *Tractatus de quadratura Curvarum* nel Tomo I. della Raccolta degli Opuſcoli di *Newton* allo *Scelio* della pag. 241. e ſegg. *Hiſtoire des Mathematiques* di Montucla nel T. II. a pag 414. Ma ſoprattutto ſi leggano i due Volumi del *Commercium &c.* citato nella Nota (*a*) pag. 131.

(*b*) Due gran Miniſtri, i quali per la familiarità ſomma, che m'accordavano nella mia adoleſcenza, poſſo dir con ragione che ſiano ſtati i miei educatori, mi contarono due fatti inſigni, che ho ſempre a memoria. Il primo diceva che un Letterato, pieno di zelo di ſpargere nella ſua Patria la verità, foſſe ſolito di miſurare il merito degli uomini in ragione inverſa del credito Palatino, di cui godevano. Diceva l'altro come preſentatoſi certo Pittore a un Filoſofo per diſegnare il di lui Ritratto, onde poi farne Medaglia, e chieſtagli l'idea del *Roveſcio*, riſpondeſſe „ Figuratemi dirimpetto al Monarca in atto d'alzare un ſipario, e diſcuoprire la verità; ed intorno ſcrivete *NON AMICVS IN AVLA*. „

ARTICOLO I.

L'Equazioni di condizione assegnate da M. de Condorcet *sono mancanti di prova, e per provarle dipendono dal solo teorema di* Leibnitz.

1. Premetto che *Condorcet* quando ha dato il suo metodo generale per la ricerca dell'*Equazioni di condizione*, lo abbia dato per indipendente del tutto da qualunque altro principio o teorema, come per esempio da quello di *Leibnitz*, ch'è il medesimo, il quale universalmente vien conosciuto sotto nome di teorema di *M. Fontaine*. Tanto è ciò vero che *Condorcet* a pag. 14. 15., e 16. nella *Remarque III.* del suo Trattato deduca per corollario delle formule generali da lui ritrovate col proprio metodo il teorema di *Fontaine* (*a*).

2. Osservo in secondo luogo che data qualunque funzione finita o differenziale V, se $\frac{dV}{dx}$ rappresenti il coefficiente o fattore di dx nel caso, in cui si supponga solamente variabile x, debbasi necessariamente scrivere e differenziare di nuovo in quest'ordine preciso $\frac{ddV}{dydx}$ mentre si voglia dalla differenza parziale di $\frac{dV}{dx}$ passare ad altra differenza parziale facendo solamente variabile y. Mutare quest'ordine, e scriver piuttosto $\frac{ddV}{dx\,dy}$ vorrebbe dire supporre l'identità delle due espressioni $\frac{ddV}{dydx}$, $\frac{ddV}{dxdy}$. Ma questa identità, che si verrebbe a supporre, non è un assioma, non è una proposizione intui-

(*a*) Si corregga lo sbaglio a pag. 15. v. 5., dove in cambio di $\frac{dD}{dz}$ deve essere apposto $\frac{dD}{dx}$.

tiva, ed è all'incontro un teorema, che ha bisogno di prova, poichè è l'istesso teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine* (*a*). *Condorcet* a pag. 5. n. 4. dice, parlando di questa maniera d'esprimere i secondi differenziali di V, che *revient au même* il supporre $\frac{ddV}{dxdy}$ come differenziale di $\frac{dV}{dy}$ col far variare unicamente x (e sta bene), o come differenziale di $\frac{dV}{dx}$ col far variare unicamente y (ed ha bisogno di prova). Se *Condorcet* per ritrovar le sue formule si fosse mai servito di quella identità come derivata dal teorema di *Fontaine*, non vi sarebbe difficoltà ad accordarglielo in quel medesimo senso, nel quale l'assume l'istesso *Fontaine* a pag. 26. delle *Memorie* precitate, col dire però *comme nous le demontrerons bien tôt*, ed a pag. 27. lo dimostra di fatto (*b*). Adunque o il Marchese *de Condorcet* intende, quando l'annunzia ed adopera, l'identità delle due espressioni $\frac{ddV}{dydx}$, $\frac{ddV}{dxdy}$ come dedotta dal teorema di *Fontaine*, il quale finalmente consiste in quella indentità; ed allora sarebbe circolo vizioso o petizione di principio dedurre in prova della generalità e verità delle sue formule il teorema di *Fontaine*, col dire che i due metodi siano del tutto diversi tra loro, siccome egli fa a pag. 14. 15. e 16. O intende piuttosto che quell' identità non abbia bisogno di prova, ed allora ne verrebbe la conseguenza che fosse assioma analitico il teorema di *Fontaine*, e perciò fosse un inutile corollario delle sue formule generali.

3. Rifletto di più che l'esempio di *M. de la Grange*, il quale assume ancor esso senza provarlo, esser sempre $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$ &c. (*c*) non sia applicabile all'altro caso espo-

(*a*) Ved. Art. II. al §. 7.

(*b*) Anche nelle Formule di *Fontaine*, che sono a pag. 2. della Tavola Preliminare alle sue *Mèmoires &c.*, bisogna aver riguardo all'inversione d'ordine nel posto de' differenziali nei denominatori. Questa inversione, dipendente dalla prima scelta di notare i differenziali, può ancora accordarsegli, perchè suppone sempre quello, che poi dimostra, cioè $\frac{dd\mu}{dydx} = \frac{dd\mu}{dxdy}$.

(*c*) Tom II. *des Melanges &c.* citato nella not. *b.* pag. 131

sto di sopra. Imperocchè questa identità dei differenziali, comunque siano combinati e disposti i segni δ, d della differenziazione, *M. de la Grange* l'assume, è vero, come provata in principio del suo *Essai d'une nouvelle Methode &c.* a pag. 175. del volume citato, ma non la deriva poi, come fa nell'altro caso il Marchese di *Condorcet*, per corollario delle proprie formule. Deve in oltre osservarsi che dimostrare l'identità dei differenziali di *M. de la Grange* sia della maggiore facilità, perchè ognuno vede che $dx = x' - x$, e però $\delta dx = \delta x' - \delta x = d\delta x$. Parimente $d^2x = dx' - dx = x'' - x' - x' + x$, onde $\delta d^2x = \delta x'' - \delta x' - \delta x' + \delta x = d\delta x - d\delta x = d^2\delta x$ (*a*).

4. Finalmente convien sapere che tutte l'*Equazioni di condizione* somministrate da *Condorcet* si contengano nella sola formula del suo *Problema II.* Quanto al Problema I. non se ne dubita, essendo men generale del II. per la fattavi supposizione di dx costante. Il Problema III. ha di più del II. un numero qualunque di variabili x, y, u, z &c., mentre il II. n'ha sole due x, y. Tuttavia, posta mente alla fattura del calcolo, si rende chiaro che il maggior numero delle variabili non accresca in modo alcuno nè la difficoltà di ritrovare, nè la difficoltà d'esprimere l'*Equazioni di condizione*, siccome accorda a pag. 11. l'Autore medesimo. In oltre il Problema IV. si risolve unicamente nell'applicazione progressiva delle formule dei problemi precedenti all'effetto di assegnare di grado in grado l'*Equazioni di condizione* fino a quella dell'Integrale *finito* della data funzione differenziale. Ed in ultimo luogo i rimanenti Problemi V. VI. e VII., i quali s'occupano di ritrovare l'*Equazioni di condizione* non più delle funzioni, come gli anteriori, ma dell'equazioni differenziali di qualunque ordine e numero di variabili, sono ancor essi la replica delle formule del Problema II. (*b*)

(*a*) Si prova coll'istessa facilità $d^2\delta x = d\delta dx$; poichè $\delta dx = d\delta x$, e perciò $d\delta dx = dd\delta x = \delta ddx$ in tutte le tre combinazioni.

(*b*) Soprattutto s'attenda dopo il Problema V. alla *Remarque*, ch'è a pag 24. In proposito dell'*Equazioni di condizione* per l'integrabilità dell'Equazioni differenziali pare che *M. de Condorcet* alla pag. 29. dia il vanto

per la ragione che un' equazione differenziale debba esser sempre la differenza d' una funzione V moltiplicata per un fattore indeterminato ed incognito A, onde applicandovi l' istesso metodo adoperato nel Problema II. non vi sia di bisogno d'altro artifizio fuori di quello che somministra l' Algebra Cartesiana per l' eliminazione di A, dA, d^2A &c., fatta la quale si conseguiscono subito tante *equazioni di condizione*, tutte determinate, quante sono di numero le variabili meno l' unità, o meno 2, 3 &c. quando uno, due &c. dei differenziali si supponesser costanti. Di qui ne segue che sottoposto ad esame il solo Problema II., venga ad essere esaminata tutta intiera la teoriá del Marchese *de Condorcet*.

5. Questo Problema II. ricerca quali siano l' *equazioni di condizione* perchè la funzione differenziale V di qualunque grado, ma di due sole variabili x, y, e senza nessuna differenza costante, abbia per integrale l' altra funzione B del grado prossimamente inferiore. Seguiterò fedelmente il metodo tenuto da *Condorcet*, colle sue stesse denominazioni, nè farò altro che spiegarlo di più, affine di renderlo di maggior chiarezza per tutti (*a*).

Si facciano adunque $dx = p, d^2x = q, d^3x = r, d^4x = s$ &c.
$dy = p', d^2y = q', d^3y = r', d^4y = s'$ &c.

Fatte le debite sostituzioni, la funzione V si cambia in un' espressione *apparentemente* finita, perchè composta di $x, y, p, p', q, q', r, r'$ &c.

Per la natura del problema abbiamo quest' unica equazione $V = dB$, che va sviluppata nelle sue differenze parziali (*b*).

della prima scoperta a *M. Fontaine*; ma veramente *Nicola Bernoulli* sino dall' anno 172$\frac{0}{1}$. n' aveva dato un saggio nella sua *Memoria* intorno le Trajettorie ortogonali.

(*a*) Sia confrontato il Calcolo, che segue, con quello del Problema I., e degli altri che ne succedono.

(*b*) Il primo ad introdurre nel Calcolo Infinitesimale le differenze *parziali* si deve dire che fosse *Leibnitz* nel 1697. Il primo ad applicarle alla Fisico-Matematica, e nominatamente all' Idrostatica sublime, fu M. *Clairaut* nell' aurea sua Opera *de la Figure de la Terre* pubblicata nel 1743. Il primo, che integrasse coll' aggiunta di funzioni continue arbitrarie l' equazioni comprendenti delle differenze parziali, fu *M. d' Alembert* nel 1747. Ma il passo più grande lo fece l'*Euler* allora quando introdusse nel Calcolo le funzioni irregolari o discontinue poco dopo del 1752. (Ved. il Tomo I. *Miscellanea Taurinensia* edito nel 1759.)

Abbiamo ancora una conſeguenza immediata di quella equazione fondamentale, ed è $dV = ddB$; e ſe ne potrebbero avere quant'altre ſi vogliano mentre foſſero neceſſarie; ma baſtano le due ſole $V = dB$, $dV = ddB$, che ſono in ſoſtanza l'iſteſſa equazione.

Da $V = dB$ ſi ricava
$$V = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dq}dq + \frac{dB}{dr}dr + \text{ec.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr' + \text{ec.}$$

Da $dV = ddB$ s'ottiene
$$dV = d\left\{\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dq}dq + \frac{dB}{dr}dr + \text{ec.}\right\}$$
$$\left\{\frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr' + \text{ec.}\right\}$$

Ma V eſſendo una funzione data, ed eſpreſſa in tutti i ſuoi termini, che la compongono, ſaranno anche dati, ed eſpreſſi tutti i termini componenti il ſuo differenziale
$$Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ec.}$$
$$+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{ec.}$$

Adunque

$$Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ec.}$$
$$+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{ec.}$$

$$= \left(\frac{ddB}{dx^2}dx + \frac{ddB}{dxdp}dp + \frac{ddB}{dxdq}dq + \frac{ddB}{dxdr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dxdy}dy + \frac{ddB}{dxdp'}dp' + \frac{ddB}{dxdq'}dq' + \frac{ddB}{dxdr'}dr' + \text{ec.}\right)dx$$

$$+ \left(\frac{ddB}{dydx}dx + \frac{ddB}{dydp}dp + \frac{ddB}{dydq}dq + \frac{ddB}{dydr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dy^2}dy + \frac{ddB}{dydp'}dp' + \frac{ddB}{dydq'}dq' + \frac{ddB}{dydr'}dr' + \text{ec.}\right)dy$$

$$+ \left(\frac{ddB}{dpdx}dx + \frac{ddB}{dp^2}dp + \frac{ddB}{dpdq}dq + \frac{ddB}{dpdr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dpdy}dy + \frac{ddB}{dpdp'}dp' + \frac{ddB}{dpdq'}dq' + \frac{ddB}{dpdr'}dr' + \text{ec.}\right)dp + \frac{dB}{dx}dp$$

$$+ \left(\frac{ddB}{dp'dx}dx + \frac{ddB}{dp'dp}dp + \frac{ddB}{dp'dq}dq + \frac{ddB}{dp'dr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dp'dy}dy + \frac{ddB}{dp'^2}dp' + \frac{ddB}{dp'dq'}dq' + \frac{ddB}{dp'dr'}dr' + \text{ec.}\right)dp' + \frac{dB}{dy}dp'$$

$$+ \left(\frac{ddB}{dqdx}dx + \frac{ddB}{dqdp}dp + \frac{ddB}{dq^2}dq + \frac{ddB}{dqdr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dqdy}dy + \frac{ddB}{dqdp'}dp' + \frac{ddB}{dqdq'}dq' + \frac{ddB}{dqdr'}dr' + \text{ec.}\right)dq + \frac{dB}{dp}dq$$

$$+ \left(\frac{ddB}{dq'dx}dx + \frac{ddB}{dq'dp}dp + \frac{ddB}{dq'dq}dq + \frac{ddB}{dq'dr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dq'dy}dy + \frac{ddB}{dq'dp'}dp' + \frac{ddB}{dq'^2}dq' + \frac{ddB}{dq'dr'}dr' + \text{ec.}\right)dq' + \frac{dB}{dp'}dq'$$

$$+ \left(\frac{ddB}{drdx}dx + \frac{ddB}{drdp}dp + \frac{ddB}{drdq}dq + \frac{ddB}{dr^2}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{drdy}dy + \frac{ddB}{drdp'}dp' + \frac{ddB}{drdq'}dq' + \frac{ddB}{drdr'}dr' + \text{ec.}\right)dr + \frac{dB}{dq}dr$$

$$+ \left(\frac{ddB}{dr'dx}dx + \frac{ddB}{dr'dp}dp + \frac{ddB}{dr'dq}dq + \frac{ddB}{dr'dr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dr'dy}dy + \frac{ddB}{dr'dp'}dp' + \frac{ddB}{dr'dq'}dq' + \frac{ddB}{dr'^2}dr' + \text{ec.}\right)dr' + \frac{dB}{dq'}dr'$$

$$+ \left(\quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad + \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad\right) + \frac{dB}{dr}ds$$

$$+ \left(\quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad + \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad\right) + \frac{dB}{dr'}ds'$$

6. Questa equazione per la sua natura e qualità dovendo essere e nel tutto e nelle sue parti omologhe identica, dà l'origine a tante altre equazioni parimente identiche, quanti sono i termini del primo membro. Separati perciò i coefficienti o fattori dei respettivi differenziali dx, dy, dp, dp', dq, dq', dr, dr', ec., derivano dalla prima equazione le subalterne, che seguono,

$$N=\frac{ddB}{dx^2}dx+\frac{ddB}{dxdp}dp+\frac{ddB}{dxdq}dq+\frac{ddB}{dxdr}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dxdy}dy+\frac{ddB}{dxdp'}dp'+\frac{ddB}{dxdq'}dq'+\frac{ddB}{dxdr'}dr'+\text{ec.}$$

$$N'=\frac{ddB}{dydx}dx+\frac{ddB}{dydp}dp+\frac{ddB}{dydq}dq+\frac{ddB}{dydr}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dy^2}dy+\frac{ddB}{dydp'}dp'+\frac{ddB}{dydq}dq'+\frac{ddB}{dydr}dr'+\text{ec.}$$

$$P=\frac{ddB}{dpdx}dx+\frac{ddB}{dp^2}dp+\frac{ddB}{dpdq}dq+\frac{ddB}{dpdr}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dpdy}dy+\frac{ddB}{dpdp'}dp'+\frac{ddB}{dpdq'}dq'+\frac{ddB}{dpdr'}dr'+\text{ec.}+\frac{dB}{dx}$$

$$P'=\frac{ddB}{dp\,dx}dx+\frac{ddB}{dp'dp}dp+\frac{ddB}{dp\,dq}dq+\frac{ddB}{dp'dr}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dp'dy}dy+\frac{ddB}{dp'^2}dp'+\frac{ddB}{dp\,dq'}dq'+\frac{ddB}{dp\,dr'}dr'+\text{ec.}+\frac{dB}{dy}$$

$$\mathcal{Q}=\frac{ddB}{dqdx}dx+\frac{ddB}{dqdp}dp+\frac{ddB}{dq^2}dq+\frac{ddB}{dqdr}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dqdy}dy+\frac{ddB}{dqdp'}dp'+\frac{ddB}{dqdq}dq'+\frac{ddB}{dqdr'}dr'+\text{ec.}+\frac{dB}{dp}$$

$$\mathcal{Q}'=\frac{ddB}{dq\,dx}dx+\frac{ddB}{dq'dp}dp+\frac{ddB}{dq\,dq}dq+\frac{ddB}{dq'dr}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dq'dy}dy+\frac{ddB}{dq'dp'}dp'+\frac{ddB}{dq'^2}dq'+\frac{ddB}{dq'dr'}dr'+\text{ec.}+\frac{dB}{dp'}$$

$$R=\frac{ddB}{drdx}dx+\frac{ddB}{drdp}dp+\frac{ddB}{drdq}dq+\frac{ddB}{dr^2}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{drdy}dy+\frac{ddB}{drdp'}dp'+\frac{ddB}{drdq}dq'+\frac{ddB}{drdr'}dr'+\text{ec.}+\frac{dB}{dq}$$

$$R'=\frac{ddB}{dr\,dx}dx+\frac{ddB}{dr'dp}dp+\frac{ddB}{dr'dq}dq+\frac{ddB}{dr'dr}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dr'dy}dy+\frac{ddB}{dr'dp'}dp'+\frac{ddB}{dr\,dq'}dq'+\frac{ddB}{dr'^2}dr'+\text{ec.}+\frac{dB}{dq'}$$

ec. ec. ec. ec.

7. Sin qui tutto il calcolo è nuovo, e felice, e non apparisce d'aver bisogno di nessun'altra anteriore scoperta dell' Analisi infinitesimale. Ma *Condorcet* va più avanti, e dice a pag. 7. e 10. che riducendo ciascheduna delle precedenti equazioni (*& reduisant, en mettant pour les suites qui multiplient ec.*) siano le medesime che

$$N = d\frac{dB}{dx},\ P = \frac{dB}{dx} + d\frac{dB}{dp},\ \mathfrak{Q} = \frac{dB}{dp} + d\frac{dB}{dq},\ R = \frac{dB}{dq} + d\frac{dB}{dr}, \text{ec.}, \text{ec.}$$

$$N' = d\frac{dB}{dy},\ P' = \frac{dB}{dy} + d\frac{dB}{dp'},\ \mathfrak{Q}' = \frac{dB}{dp'} + d\frac{dB}{dq}\ R' = \frac{dB}{dq'} + d\frac{dB}{dr'}, \text{ec.}, \text{ec.}$$

In questa riduzione consiste appunto l'equivoco, e mentre pare al ch. Autore di non aver indizio di nessun altro soccorso di principio estraneo ed indipendente dall' algoritmo del suo calcolo generale, riduce tutto tacitamente senz' avvedersene al solo teorema di *Leibnitz*. Imperciocchè

$$d\frac{dB}{dx}=\frac{ddB}{dx^2}dx+\frac{ddB}{dpdx}dp+\frac{ddB}{dqdx}dq+\frac{ddB}{drdx}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydx}dy+\frac{ddB}{dp'dx}dp'+\frac{ddB}{dq'dx}dq'+\frac{ddB}{dr'dx}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dy}=\frac{ddB}{dxdy}dx+\frac{ddB}{dpdy}dp+\frac{ddB}{dqdy}dq+\frac{ddB}{drdy}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dy^2}dy+\frac{ddB}{dp'dy}dp'+\frac{ddB}{dq'dy}dq'+\frac{ddB}{dr'dy}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dp}=\frac{ddB}{dxdp}dx+\frac{ddB}{dp^2}dp+\frac{ddB}{dqdp}dq+\frac{ddB}{drdp}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydp}dy+\frac{ddB}{dp'dp}dp'+\frac{ddB}{dq'dp}dq'+\frac{ddB}{dr'dp}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dp'}=\frac{ddB}{dxdp'}dx+\frac{ddB}{dpdp'}dp+\frac{ddB}{dqdp'}dq+\frac{ddB}{drdp'}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydp'}dy+\frac{ddB}{dp'^2}dp'+\frac{ddB}{dq'dp'}dq'+\frac{ddB}{dr'dp'}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dq}=\frac{ddB}{dxdq}dx+\frac{ddB}{dpdq}dp+\frac{ddB}{dq^2}dq+\frac{ddB}{drdq}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydq}dy+\frac{ddB}{dp'dq}dp'+\frac{ddB}{dq'dq}dq'+\frac{ddB}{dr'dq}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dq'}=\frac{ddB}{dxdq'}dx+\frac{ddB}{dpdq'}dp+\frac{ddB}{dqdq'}dq+\frac{ddB}{drdq'}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydq'}dy+\frac{ddB}{dp'dq'}dp'+\frac{ddB}{dq'^2}dq'+\frac{ddB}{dr'dq'}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dr}=\frac{ddB}{dxdr}dx+\frac{ddB}{dpdr}dp+\frac{ddB}{dqdr}dq+\frac{ddB}{dr^2}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydr}dy+\frac{ddB}{dp'dr}dp'+\frac{ddB}{dq'dr}dq'+\frac{ddB}{dr'dr}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dr'}=\frac{ddB}{dxdr'}dx+\frac{ddB}{dpdr'}dp+\frac{ddB}{dqdr'}dq+\frac{ddB}{drdr'}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydr'}dy+\frac{ddB}{dp'dr'}dp'+\frac{ddB}{dq'dr'}dq'+\frac{ddB}{dr'^2}dr'+\text{ec.}$$

e così dell'altre. Fatto adunque il paragone di questi veri ed esatti differenziali coi differenziali, che s' incontrano nell'equazioni del precedente §. 6., si vede chiaro come all' effetto che i secondi coincidano con i primi sia necessario supporre verificata l' identità di tutte le seguenti equazioni

$$\frac{ddB}{dxdp}=\frac{ddB}{dpdx},\ \frac{ddB}{dxdq}=\frac{ddB}{dqdx},\ \frac{ddB}{dxdr}=\frac{ddB}{drdx},\ \frac{ddB}{dxdy}=\frac{ddB}{dydx},$$

$$\frac{ddB}{dxdp'}=\frac{ddB}{dp\,dx},\ \frac{ddB}{dxdq'}=\frac{ddB}{dq\,dx},\ \frac{ddB}{dxdr'}=\frac{ddB}{dr\,dx},\ \frac{ddB}{dydp}=\frac{ddB}{dpdy},$$

$$\frac{ddB}{dydq}=\frac{ddB}{dqdy},\ \frac{ddB}{dydr}=\frac{ddB}{drdy},\ \frac{ddB}{dydp'}=\frac{ddB}{dp'dy},\ \frac{ddB}{dydq'}=\frac{ddB}{dq'dy},$$

$$\frac{ddB}{dydr'}=\frac{ddB}{dr\,dy},\ \frac{ddB}{dpdq}=\frac{ddB}{dqdp},\ \frac{ddB}{dpdr}=\frac{ddB}{drdp},\ \frac{ddB}{dpdp'}=\frac{ddB}{dp\,dp},$$

$$\frac{ddB}{dpdq'}=\frac{ddB}{dq\,dp},\ \frac{ddB}{dpdr'}=\frac{ddB}{dr\,dp},\ \frac{ddB}{dp\,dq}=\frac{ddB}{dqdp'},\ \frac{ddB}{dp\,dr}=\frac{ddB}{drdp'},$$

$$\frac{ddB}{dp\,dq'}=\frac{ddB}{dq\,dp'},\ \frac{ddB}{dp\,dr'}=\frac{ddB}{dr'dp'},\ \frac{ddB}{dqdr}=\frac{ddB}{drdq},\ \frac{ddB}{dqdq'}=\frac{ddB}{dq\,dq},$$

$$\frac{ddB}{dqdr'}=\frac{ddB}{dr\,dq},\ \frac{ddB}{dq'dr}=\frac{ddB}{draq},\ \frac{ddB}{dq'dr'}=\frac{ddB}{dr\,dq'},\ \frac{ddB}{drdr'}=\frac{ddB}{dr'dr}.$$

La verificazione dell' identità di tutte queste equazioni, tante di numero, quanti sono i binarj possibili delle variabili x, y, p, p', q, q', r, r' della data funzione, cioè nel nostro caso particolare tante di numero quant' è $\frac{8.7}{1.2}=28$ come sono di fatto, non vuol dir altro che il teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine*, cioè non vuol dir altro che la verificazione dell' identità di quelle equazioni, che *Condorcet* dà più sotto nell' Osservazione III. del Problema III. come conseguenza delle sue formule.

5. Di ciò non potrà dubitarsi avvertendo che $V = dB$, e $dV = ddB = Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + Sds$ ecc. $+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds'$ ecc. laonde V dev' essere una funzione rappresentabile in questa forma $V = Adx + (B)dp + Cdq + Ddr$ ecc. $+ A'dy + B'dp' + C'dq' + D'dr' +$ ecc. Adunque $\frac{dB}{dx}=A$, $\frac{dB}{dp}=(B)$, $\frac{dB}{dq}=C$, $\frac{dB}{dr}=D$, ecc., $\frac{dB}{dy}=A'$, $\frac{dB}{dp'}=B'$, $\frac{dB}{dq'}=C'$, $\frac{dB}{dr'}=D'$, ecc. Ma l' equazioni, che nascono dal

teorema di *Fontaine*, sono $\frac{dA}{dp}=\frac{d(B)}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dpdx}=\frac{ddB}{dxdp}$, $\frac{dA}{dq}$ $=\frac{dC}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dqdx}=\frac{ddB}{dxdq}$, $\frac{dA}{dr}=\frac{dD}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{drdx}=\frac{ddB}{dxdr}$ ec., $\frac{dA}{dy}=\frac{dA'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dydx}=\frac{ddB}{dxdy}$, $\frac{dA}{dp'}=\frac{dB'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dp'dx}=\frac{ddB}{dxdp'}$, $\frac{dA}{dq'}=\frac{dC'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dx}=\frac{ddB}{dxdq'}$, $\frac{dA}{dr'}=\frac{dD'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dx}=\frac{ddB}{dxdr'}$; $\frac{dA'}{dp}=\frac{d(B)}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dpdy}=\frac{ddB}{dydp}$, $\frac{dA'}{dq}=\frac{dC}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dqdy}=\frac{ddB}{dydq}$. $\frac{dA}{dr}=\frac{dD}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{drdy}=\frac{ddB}{dydr}$, $\frac{dA'}{dp'}=\frac{dB'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dp'dy}=\frac{ddB}{dydp'}$, $\frac{dA'}{dq'}=\frac{dC'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dy}$ $=\frac{ddB}{dydq'}$, $\frac{dA'}{dr'}=\frac{dD'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dy}=\frac{ddB}{dydr'}$, $\frac{d(B)}{dq}=\frac{dC}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dqdp}$ $=\frac{ddB}{dpdq}$, $\frac{d(B)}{dr}=\frac{dD}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{drdp}=\frac{ddB}{dpdr}$, $\frac{d(B)}{dp'}=\frac{dB'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dp'dp}$ $=\frac{ddB}{dpdp'}$, $\frac{d(B)}{dq'}=\frac{dC'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dp}=\frac{ddB}{dpdq'}$, $\frac{d(B)}{dr'}=\frac{dD'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dp}$ $=\frac{ddB}{dpdr'}$, $\frac{dB'}{dq}=\frac{dC}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dqdp'}=\frac{ddB}{dp'dq}$, $\frac{dB'}{dr}=\frac{dD}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{drdp'}$ $=\frac{ddB}{dp'dr}$, $\frac{dB'}{dq'}=\frac{dC'}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dp'}=\frac{ddB}{dp'dq'}$, $\frac{dB'}{dr'}=\frac{dD'}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dp'}$ $=\frac{ddB}{dp'dr'}$, $\frac{dC}{dr}=\frac{dD}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{drdq}=\frac{ddB}{dqdr}$, $\frac{dC}{dq'}=\frac{dC'}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dq}=\frac{ddB}{dqdq'}$, $\frac{dC}{dr'}=\frac{dD'}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dq}=\frac{ddB}{dqdr'}$, $\frac{dC'}{dr}=\frac{dD}{dq'}$ cioè $\frac{ddB}{drdq'}=\frac{ddB}{dq'dr}$, $\frac{dC'}{dr'}$ $=\frac{dD'}{dq'}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dq'}=\frac{ddB}{dq'dr'}$, $\frac{dD}{dr'}=\frac{dD'}{dr}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dr}=\frac{ddB}{drdr'}$ ecc.

In

In conseguenza fa di mestiero che si convenga come le formule di *Condorcet* si risolvano finalmente nel teorema solo di *Fontaine* (*a*), e lo presuppongano trovato e dimostrato, affine di conseguire e provare ciò, che si ottiene da questo metodo nuovo ed universale.

6. Supposta unicamente provata quell' identità d' equazioni, allora si ricavano subito dalla medesima le formule generali di *Condorcet* per l' *equazioni di condizione*. E di fatti richiamate l' espressioni e denominazioni dei tre §§. antecedenti 5° 6.° 7.°, ognun vede che

$$d\frac{dB}{dx}-d\left(\frac{dB}{dx}+d\frac{dB}{dp}\right)+d^2\left(\frac{dB}{dp}+d\frac{dB}{dq}\right)-d^3\left(\frac{dB}{dq}+d\frac{dB}{dr}\right)+d^4\frac{dB}{dr}\text{ ecc.}=0$$

$$d\frac{dB}{dy}-d\left(\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}\right)+d^2\left(\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}\right)-d^3\left(\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}\right)+d^4\frac{dB}{dr'}\text{ ecc.}=0$$

siano equazioni perfettamente identiche a motivo dell' elisione di tutti i loro termini; e perciò ancora, sostituendo, verranno ad essere identiche in generale l' equazioni

$$N-dP+d^2Q-d^3R+d^4S-\text{ecc.}=0$$
$$N-dP'+d^2Q-d^3R+d^4S'-\text{ecc.}=0$$

per qualunque funzione differenziale. Sarà però sempre vero che non arrivi mai a dimostrarle con tutto il rigore, che esigono le verità matematiche, se non col presupporre il teorema solo di *Leibnitz*, siccome mi ero proposto sin da principio di far conoscere agli Analisti (*b*). In somma tutto il fondo della scoperta è il N. 4. della pagina 5 dove si stabilisce $\frac{ddV}{dxdy}=\frac{ddV}{dydx}$, senza del qual teorema precognito le formu-

(*a*) Si legga il N. 7. del seguente Articolo II.

(*b*) *L' equazioni di condizione* sono l' istessa cosa del teorema di *Leibnitz*, ma non così i logaritmi di *Neper*, veramente detti *Neperiani* o Iperbolici, e quelli d' *Archimede* come scrive a pag. 72 l' Autore della Dissertazione, che segue l' Elogio di *Amerigo Vespucci* pubblicato in Firenze nel 1788. Difatti i logaritmi d' Archimede combinano col sistema di Briggs, sebbene ancor esso immaginato da *Neper*. E poi il Tomo III. delle *Opere Matematiche di Vallis*, dove comparve per la prima volta il frammento del libro II. della Collezione di *Pappo*, in cui è riportato il metodo di *Archimede*, vide la pubblica luce nel 1699, quando la scoperta di *Neper* (intendo sempre dei logaritmi veri Neperiani, non dei Briggiani o *Tavolarj*) è del 1614.

le tutte di *Condorcet* mancherebbono di prova, perchè non contengono la condizione dell' integrabilità della data funzione.

ARTICOLO II.

Col solo teorema di Leibnitz, *anche diversamente dal metodo generale di* M. de Condorcet, *si trovano, e si dimostrano le sue equazioni di condizione.*

1. Quantunque abbiamo fino ad ora osservato come tutte l'*equazioni di condizione* dipendano nel nuovo metodo di *Condorcet* dal teorema di *Leibnitz*, e come presupposto unicamente questo, acquistino quella piena dimostrazione, che possa mai essere desiderata; tuttavolta non pare che le suddette formule nascano dal teorema medesimo con tanta chiarezza e semplicità, quanta dovrebb' esservi seguitando la naturale filiazione d'una cosa dall'altra, che forma il bello dei metodi matematici. Mi muove a così pensarne il vedere che nel caso semplicissimo della funzione differenziale di primo grado $Adx + Bdy$ il metodo di *Condorcet*, per conservare la sua generalità, sia obbligato a somministrare due equazioni identiche $N - dP = o, N' - dP' = o$, la seconda delle quali non è altro che la replica della prima (*a*), e che l'istesso segua rispetto all'altra funzione parimente di primo grado $Adx + Bdy + Cdu + Ddz$, dove in cambio di sei sole equazioni identiche, che darebbe il teorema di *Leibnitz* (perchè a quattro variabili corrispondono solamente $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ binarj) bisogna soffrire che il metodo di *Condorcet* ne dia quattro $N - dP = o, N' - dP' = o, N'' - dP'' = o, N''' - dP''' = o$, da cui se ne derivano dodici in apparenza, ma sei nella sostanza come quelle, che tutte si trovano replicate (*b*). Questa sorte di *pleonasmo* analitico, il quale s' incontrerebbe maggiore facendo il confronto dell'equazioni generali di *Condor-*

(*a*) Vedasi in fondo della pag. 15 *Du Calcul Intégral*.
(*b*) Pag. 15 al v. 5 e segg.

cet colle particolari dedotte naturalmente dal teorema di *Leibnitz* nel caso di funzioni differenziali di più alto grado del primo, oltrechè diminuisce l'eleganza delle formule, e soggetta il Calcolatore a fare una scelta o riduzione dell' equazioni identiche più semplici, onde separare le primitive e sostanziali dall'altre inutili, che le ripetano puramente, mi sembra ancora accennare ch'abbia da esservi nell' Analisi qualche compenso di risparmiare le repliche nella ricerca dell' *equazioni di condizione*, e conseguire nulladimeno il medesimo fine.

2. Ho adunque tentato di rintracciare questo compenso, e credo d'averlo trovato. Nè m'ha distolto da tentarlo il sapere che il gran Geometra *Leonardo Euler* nell' *Appendice* al Volume III. delle sue Instituzioni di calcolo integrale abbia detto essere appena sperabile trovar mezzo di dimostrare *l'equazione* generalissima *di condizione* $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{ec.} = o$ perchè sia integrabile $\int V dx$ quando non si ricorra, com'egli ha fatto per dimostrarla, al *metodo delle variazioni* applicato alla profonda teoria dei *massimi* e *minimi* (*a*). Imperciocchè primieramente avvertivo che senza l'ajuto del *metodo delle variazioni* e dei *massimi* e *minimi* era riuscito al Marchese *de Condorcet* ricavar quella formula universale, e le sue analoghe, dal puro fondo dell'Algebra Infinitesimale, ch'è quanto dire dal solo fonte (sebbene egli non lo pensasse) del teorema di *Fontaine* o sivvero di *Leibnitz*, il qual teorema non ha nessuna relazione coi *massimi* e *minimi*, nè tampoco nessun principio indiretto che perturbi l'ordine naturale del calcolo con alterare la dipendenza e successione delle sue parti, non meno che confonde-

(*a*) Questo Matematico sommo scrive così a pag. 520 nel §. 26. *Demonstratio hujus Theorematis omnino est singularis, cum ex doctrina variationum sit petita, quæ tamen ab hoc argumento prorsus est aliena: vix vero alia via patet ad ejus demonstrationem pertingendi*. E sembra che si riporti a ciò che egli aveva scritto nel Tomo X. dei *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* a pag. 134, pubblicato nel 1766.

re le matematiche aſtratte colle applicate, ſiccome fecero gli ſcrittori principalmente del ſecolo XVII., cui piacque perſino arricchire inopportunamente la geometria e l'algebra colle dimoſtrazioni dedotte dalla ſcienza dell'equilibrio e del moto (*a*). Forſe mentr' *Euler* ſcriveva quell' *Appendice*, che ſi pubblicò nell' anno M. DCC. LXX., o non ſapeva che *Condorcet* ſino dal M. DCC. LXV. aveſſe ſcoperto il metodo diretto di derivare dall' Analiſi pura l' *equazione di condizione* $N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S -$ ec. $= o$ come criterio d'integrabilità di SV, o non reputava poſſibile ricavarla, come ho fatt' io, dall' unico teorema di *Leibnitz*.

3. In ſecondo luogo andavo meco ſteſſo penſando che colla ſola inverſione dell' ordine tenuto da *Condorcet* nel derivare dal calcolo le ſue formule potevaſi agevolmente ottenere quella ſemplicità, naturalezza, e dimoſtrazione, che non ebbero uſcendo dalla mente ſublime del ch. Autore. Baſta che in cambio del metodo *analitico* da lui adoperato venga ſoſtituito il *ſintetico*, ed in vece di eſſere implicito il teorema di *Fontaine* ſia eſplicito e ſcoperto, come conviene al fonte primario, da cui prendono origine tutte quelle equazioni. Allora ogni paſſo ſarà miſurato, ſi vedranno grado a grado naſcere chiaramente dalle formule più ſemplici le più compoſte, e s' oſſerverà da chiunque il come e perchè debbano eſſere neceſſariamente identiche l' *equazioni di condizione*, nella qual nitidezza e natural progreſſione d' idee conſiſte appunto il pregio ſommo dei metodi matematici. Ed ecco l' eſempio del mio diſcorſo, adattato al ſolo Problema II. per i motivi addotti nel §. 4. dell' Articolo I.

4. Sia $Adx + Bdy$ la funzione generale del prim' ordine a due variabili. Il ſuo diretto differenziale è $dA \cdot dx + Addx + dB \cdot dy + Bddy$; ed eſſendo di più $dA = \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy}$, come

(*a*) Anche *M. Couſin* è dell' iſteſſo parere a pag. VI. VII. del diſcorſo preliminare delle ſue *Leçons* ecc. Ma dipoi a pag. 14. del diſcorſo medeſimo, ed a pag. 1 delle Lezioni ſi contradice coll' introdurre nelle quantità generali l' elemento del tempo.

parimente $dB = \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy}$, diventa dopo fatte le debite sostituzioni $\left(\frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy\right) dx + Addx + \left(\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy\right)dy + Bddy$. Secondo il vero differenziale, a cui corrispondono ancora le formule del §. 6. dell' Articolo I., abbiamo $N = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dB}{dx}dy$, $P = A$, e parimente $N' = \frac{dA}{dy}dx + \frac{dB}{dy}dy$, $P' = B$. Adunque, facendosi $(N) = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy$, $(P) = A$, $(N') = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy$, $(P') = B$, otterremo le due funzioni $\begin{matrix} Ndx + N'dy + Pddx + P'ddy \\ (N)dx + (N')dy + (P)ddx + (P')ddy, \end{matrix}$ le quali debbono essere identiche, e per esserlo conviene solo che sia identica l'equazione $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. Ma ora si torni a vedere che per mezzo del diretto ed immediato differenziale $(N)dx + (P)ddx + (N')dy + (P')ddy$ o sivvero $dA.dx + Addx + dB.dy + Bddy$ conseguirebben sempre l'equazione identica (inconcludente ed inutile) $dA - dA + dB - dB = o$, cioè $(N) - d(P) + (N') - d(P') = o$, come quella che non si parte dalla condizione d'integrabilità della data funzione $Adx + Bdy$. Affine di cambiare questa immediata, ma vana, equazione identica nell'altra equazione identica utile $N - dP + N' - dP' = o$, a cui si riporta il metodo di Condorcet. bisogna introdurvi la *condizione* dell' integrabilità della funzione data $Adx + Bdy$, la qual condizione importa, come abbiam visto, la sola equazione identica $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ o sia $\frac{ddV}{dydx} = \frac{ddV}{dxdy}$, ch'è il teorema di *Leibnitz*. E qui avverto primieramente essere di tal natura l'equazione identica $dA - dA + dB - dB = o$ che dividasi in due $dA - dA = o$. $dB - dB = o$ indipendenti affatto l'una dall'altra a motivo della nessuna relazione supposta tra le variabili x.

y, o loro differenziali. In secondo luogo rifletto come per il teorema d'altronde noto di *Leibnitz* non essendovi luogo che alla sola *condizione* $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, debbano con questa sola necessariamente verificarsi ambedue l'equazioni identiche $N - dP = o$, $N' - dP' = o$ assegnate per criterio dell'integrabilità da *Condorcet*, ed altri Analisti.

5. Passando adesso a ragionare delle funzioni differenziali di second'ordine comprese nella formula generale $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddx + Eddy$, e fattevi per comodo di calcolo le sostituzioni di $p = dx$, $p' = dy$, onde la funzione data si trasformi nell'altra $Fdx + Gdy + Hdp + Idp'$, dove F, G, H, I rappresentano funzioni delle quattro variabili x, y, p, p', è certo che avremo per differenziale della medesima

$$\begin{matrix} dF \,.\, dx + Fdp + dH \,.\, dp + Hddp & \text{ovvero } dF \,.\, dx + (F + dH)\, dp + Hddp \\ + dG \,.\, dy + Gdp' + dI \,.\, dp' + I\,ddp' & + dG \,.\, dy + (G + dI)\, dp' + Iddp' \end{matrix}$$

o sia $\begin{matrix}(N) dx + (P)\, dp + (Q)\, ddp \\ + (N)' dy + (P)' dp' + (Q)' ddp'\end{matrix}$. Da ciò viene ad essere manifesto che siccome sono identiche intuitivamente, e di loro natura ambedue l'equazioni

$$dF - (dF + ddH) + ddH = o, \quad dG = (dG + ddI) = o,$$

debbano ancora godere dell'istessa identità le due altre equazioni

$$(N) - d(P) + d^2 (Q) = o, \quad (N)' - d(P)' + d^2 (Q)' = o.$$

Queste equazioni identiche si verifican sempre, nè servono di criterio dell'integrabilità della formula data. Per ottenerlo, e trovare a questo effetto le due altre equazioni identiche, che siano il criterio dell'integrabilità, convien partire dal teorema di *Fontaine*, il quale, relativamente alla data formula $Fdx + Gdy + Hdp + Idp'$, somministra le sei equazioni identiche $\frac{dF}{dy} = \frac{dG}{dx}$, $\frac{dF}{dp} = \frac{dH}{dx}$, $\frac{dF}{dp'} = \frac{dI}{dx}$; $\frac{dG}{dp} = \frac{dH}{dy}$, $\frac{dG}{dp'} = \frac{dI}{dy}$, $\frac{dH}{dp'} = \frac{dI}{dp}$. Adunque essendo $dF - dF - d^2H + d^2H = \left(\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dp} dp\right.$

$+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dp'}dp'\Big)-\Big(\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dp}dp+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dp'}dp'\Big)-d\Big(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp$
$+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp'}dp'\Big)+d\Big(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp'}dp'\Big)=o$, s'avrà parimente $\Big(\frac{dF}{dx}dx+\frac{dH}{dx}dp+\frac{dG}{dx}dy+\frac{dI}{dx}dp'\Big)-\Big(dF+d\Big(\frac{dF}{dp}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dG}{dp}dy$
$+\frac{dI}{dp}dp'\Big)\Big)+d\Big(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp'}dp'\Big)=o$, cioè le due funzioni, una considerata di sopra $(N)-d(P)+d^2(\mathfrak{Q})$, e l'altra $N-dP+d^2Q$ disposta secondo il vero differenziale, comprovato altresì dalle formule spiegate nel §. 6. dell' Articolo I., saranno termine a termine perfettamente identiche. Di qui ne nasce che dal differenziale immediato ed indentico $(N)-d(P)+d^2(\mathfrak{Q})=o$ derivi la prova dell' identità dell' altro differenziale utile e vero $N-dP+d^2\mathfrak{Q}=o$, ch'è appunto l'*equazione di condizione* allegnata da Condorcet. Col medesimo metodo conseguirebbesi $dG-dG-d^2I+d^2I=(N)'-d(P)'$
$+d^2(\mathfrak{Q})'=o=\Big(\frac{dB}{dx}dx+\frac{dB}{dp}dp+\frac{dB}{dy}dy+\frac{dB}{dp}dp'\Big)-\Big(\frac{dB}{dx}dx+\frac{dB}{dp}dp$
$+\frac{dB}{dy}dy+\frac{dB}{dp}dp'\Big)-d\Big(\frac{dI}{dx}dx+\frac{dI}{dp}dp+\frac{dI}{dy}dy+\frac{dI}{dp'}dp'\Big)+d\Big(\frac{dI}{dx}dx+\frac{dI}{dp}dp$
$+\frac{dI}{dy}dy+\frac{dI}{dp'}dp'\Big)=\Big(\frac{dF}{dy}dx+\frac{dH}{dy}dp+\frac{dG}{dy}dy+\frac{dI}{dy}dp'\Big)-\Big(dG+d\Big(\frac{dF}{dp'}dx$
$+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dG}{dp}dy+\frac{dI}{dp'}dp\Big)\Big)+d\Big(\frac{dI}{dx}dx+\frac{dI}{dp}dp+\frac{dI}{dy}dy+\frac{dI}{dp}dp'\Big)=N-dP$
$+d^2\mathfrak{Q}=o$ secondo il vero differenziale, come confermano le solite formule del §. 6. sopraccitato. E si potrebbe proceder più oltre senza maggiore difficoltà alle funzioni degli altri gradi se i limiti di questo scritto lo permettessero.

6. In somma principia il mio metodo da far vedere che il differenziale *immediato* di qualunque data funzione, o integrabile, o no, debba sempre condurre ad un'equazione identica per ciascheduna delle variabili x, y ec. Fa dopoi l'altro passo importante, ed è quello che posto in ordine il differenziale medesimo (che gioverebbe dopo di ciò chiamare

re *mediato*) secondo dx, d^2x ec., dy, d^2y ec., abbiasi nel solo caso dell' integrabilità della funzione assegnata, cioè nell' unico caso che si verifichi a tutti i riguardi il teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine*, ognuna dell' equazioni identiche summentovate precisamente l' istessa (termine a termine) di quella di *Condorcet*, nella quale si viene allora a rendere manifesto che debba consistere il criterio della possibilità dell' integrazione. Con questa differenza però che mentre il criterio dell' integrabilità dedotto dal puro teorema di *Fontaine* risparmia le repliche dell' equazioni identiche, come s' è veduto poc' anzi nei §§. 4, e 5, l' altro criterio riduca l' *equazioni* identiche *di condizione* a minor numero delle prime (*a*), e comprenda spesso più coperte ed inviluppate le formule di *Fontaine* (*b*). Il primo risale dall' equazioni identiche di *Fontaine* all' equazioni identiche di *Condorcet*, e scuoprendo, e misurando, e dimostrando ogni passo, che faccia, conduce a vedere che le seconde dipendano dalle prime. Il secondo discende dall' equazioni identiche di *Fontaine*, ma coperte e nascoste, all' *equazioni di condizione* che sono il soggetto principale della bellissima opera di *Condorcet*, e senza discuoprire e diciferare le formule di *Fontaine* mancherebbe di prova (*c*). Perchè questo parallelo dei due metodi, uno diretto, e l' altro inverso, si scorga ancora meglio e nel massimo lume, vediamolo nella maniera più generale, ed invertendo soltanto il cammino tenuto da *Condorcet* (*d*).

$$V = \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s + \text{ec.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' + \text{ec.}$$

Dunque

(*a*) Ciò si conosce facilmente sino dalla *Remarque* III. del III. Problema dove son quattro l'equazioni identiche, in cambio di sei che dà il metodo di *Fontaine*.

(*b*) Basta fare il parallelo dei N. 8. e 9. dell' Articolo I.

(*c*) Ciò vuol dire che $V = dB$, e $dV = ddB$, non sono equazioni valevoli a determinare il Problema dell' integrabilità di V, come suppone questo celebre Autore.

(*d*) Confrontisi particolarmente nel metodo, che segue, il proceder del calcolo con quello del II. Problema.

Dunque $dV = d\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dx}q + \frac{dB}{dp}r + \frac{dB}{dq}s + \frac{dB}{dr}t +$ ec.

$+ d\frac{dB}{dp}q + d\frac{dB}{dq}r + d\frac{dB}{dr}s +$ ec.

$+ d\frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dy}q' + \frac{dB}{dp'}r' + \frac{dB}{dq'}s' + \frac{dB}{dr'}t' +$ ec.

$+ d\frac{dB}{dp'}q' + d\frac{dB}{dq'}r' + d\frac{dB}{dr'}s' +$ ec. } differ. immed.

ch' è come dire $\begin{matrix}(N) - d(P) + d^2(Q) - d^3(R)\ \text{ec.} = o \\ (N)' - d(P)' + d^2(Q)' - d^3(R)'\text{ec.} = o\end{matrix}$ equazioni identiche, le quali equazioni intuitivamente identiche, quando col soccorso unico delle formule di *Fontaine* vi siano surrogate in cambio di $d\frac{dB}{dx}$, $d\frac{dB}{dp}$, $d\frac{dB}{dq}$, $d\frac{dB}{dr}$ ecc. $d\frac{dB}{dy}$, $d\frac{dB}{dp'}$, $d\frac{dB}{dq'}$, $d\frac{dB}{dr'}$ ecc. le loro espressioni identiche, che risultano dal §. 8. dell'Articolo I., si convertono nelle vere ed utili *equazioni di condizione* $N - dP + d^2Q - d^3R +$ ec. $= o$

$N' - dP' + d^2Q' - d^3R' +$ ec. $= o$, come spiegano con tutta chiarezza i differenzio-differenziali di B nell' Articolo I. al §. 6. (*a*).

7. Che poi tutte l'*equazioni di condizione* assegnate da M. *Fontaine* siano in sostanza la sola formula data da *Leibnitz*, e che questa sia un teorema, e non già proposizione intuitiva, ognuno lo sa per poco che sappia l'istoria del calcolo differenziale e integrale. E difatti il teorema III. delle *Memoires* di *Fontaine* a pag. 26., il quale si riferisce alla funzione semplicissima di due variabili $Adx + Bdy$ differenziale del primo grado, è quello, sopra di cui si sostengono tutte l'*equazioni di condizione* da lui spiegate nel suo *Premiere*

(*a*) Gli chiamo differenzio-differenziali relativamente alla funzione B, ma in rigore possono ben essere differenze terze, quarte ecc. se la funzione data V fosse di secondo, di terzo grado ecc.

Methode fino alla pag. 84. Sebbene il ch. Autore applichi quel teorema all' equazioni differenziali di varj ordini, e non alle funzioni, tuttavia è facile argomentare dalla dimostrazione del Teorema IV, e suo Corollario a pag. 27., che per mezzo del fattore e coefficiente M, comune a tutti i termini, l' equazione diventi funzione di qualunque numero di variabili, e di qualunque grado (*a*). Ma il precitato Teorema III., che somministra il criterio dell' integrabilità della funzione $Adx + Bdy$ mediante l' equazione identica $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, deriva immediatamente dal teorema di *Leibnitz*, il quale stabilisce e dimostra che mentre s' abbia $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} . dx$, dove a, x siano due variabili del tutto indipendenti tra loro, venga ad essere $d\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} . dx$ facendo solamente variabile a, o sivvero la differenza parziale $\frac{d\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} . dx}{da} = \frac{ada . dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, ed in generale s' ottenga coll' istesso principio dato da *Leibnitz* $\frac{d\int \mu dx}{dy} = \frac{dy \int d\mu}{dy} dx$. Ora da quest' ultima equazione deriva appunto l' altra $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, siccome dimostra il confronto dei Teoremi II. e III. dell' istesso *Fontaine*. Tanto è ciò vero, quanto che gli Analisti quasi tutti, i quali hanno dovuto provare nelle loro opere l' *equazioni di condizione*, l' appoggino al prenotato teorema di *Leibnitz*. Di quelli, che ho adesso sott' occhio, si riscontrino la *Memoria* di M. *Clairaut* tra l' altre dell' Accademia Reale delle Scienze di

(*a*) L' istesso ho detto relativamente al metodo tenuto da *Condorcet* nel num. 4. dell' Articolo I.

Parigi nel volume per l'anno M. DCC. XL., pubblicato nel XLII., dove tratta dell'integrazione dell'equazioni differenziali di primo grado, e particolarmente ai §§. II. della Parte I., e VIII. del Cap. I. della Parte II., il Traité du Calcul Integral par M. *de Bougainville* Parte II. Sez. I. Cap. II. ai §§. XV. XVIII. e XXVIII., le *Institutiones Analyticae* di *Riccati* e *Saladini* al Lib. II. del Tomo II. Cap. XIII. §. 2. e segg., e le *Leçons de calcul differentiel & de calcul integral par M. Cousin*, impresse a Parigi nel M. DCC. LXXVII., segnatamente ai N. 52. del Cap. V. a p. 255. 264., e 58. del Cap. VI. a pag. 329. e 330. E riguardo a quei Matematici, ch' hanno voluto per dimostrare il teorema di *Fontaine* discostarsi da quello di *Leibnitz*, come per esempio *Leonardo Euler* nella Parte I. p. 191. e segg. delle *Institutiones calculi differentialis*, I PP. Minimi le *Seur* e *Jacquier* nel Cap. I. della Parte I. al §. XXIX. e segg. pag. 27. e segg. degli *Elemens du calcul integral*, e l'istesso *Cousin* nelle *Lezioni* precitate (Parte I. Cap. III. p. 83. e seg.) (*a*), si veda quanto più operosa e meno chiara comparisca la loro dimostrazione. Intanto non si può a meno di non inferirne come nel medesimo modo che non si sarebbe potuto mai indovinare che dall' *Aritmetica degli Infiniti* di Wallis l'Algebra infinitesimale fosse stata per essere nel corso d'un secolo condotta a così alto segno da produrre le *Instituzioni di calcolo differenziale* dell' *Euler* (*b*), egualmente non si potesse mai far prognostico ragionevole che il teorema di *Leibnitz*, il quale nasce dall' applicazione felice dell' assioma *il tutto è uguale alla somma delle sue parti*, avesse dovuto dar nascita alle differenze *parziali*, all' *equazioni di condizione*, ed al calcolo delle *variazioni* (*c*) in meno d'un secolo (*d*).

(*a*) Quantunque sia qui il primo luogo dove incominci a parlarne.

(*b*) L' *Aritmetica ecc.* è del 1655. (sebbene la data sia del 1656.), e le *Instituzioni ecc.* sono del 1755.

(*c*) Num. 5. del seg. Articolo III.

(*d*) Quel teorema è del 1697., mentre il metodo di M. de la *Grange* fu fatto di ragion pubblica nel 1762.

ARTICOLO III.

D'alcuni altri teoremi ſparſi nell' opera del Marcheſe de Condorcet.

1. Avanti di tutto gioverà ſperimentare il metodo adoperato nell' Articolo precedente, ch' è l' inverſo di quello di *Condorcet*, per conſeguire la prova del teorema belliſſimo, il quale ſi trova nella *Remarque II.* a pag. 21. del IV. Problema.

2. Sia perciò V una funzione integrabile, ed il ſuo integrale ſia una funzione differenziale del grado proſſimamente inferiore. L' eſpreſſione generale ſarà queſta

$$V = Adx + Bdp + Cdq + \text{ec.} + A'dy + B'dp' + C'dq' + \text{ec.}, \text{ laonde } dV = \begin{cases} dA.dx + Adp + Bdq + Ddr \text{ ec.} \\ + dBdp + dCdq \\ + dA'dy + A'dp' + B'dq' + D'dr' \text{ ec.} \\ + dB'dp' + dC'dq' \end{cases}$$

Ma in virtù del II. Articolo

$$dA = N, A + dB = P, B + dC = Q, C + dD = R, \text{ ecc.}$$
$$dA' = N, A' + dB' = P', B' + dC' = Q', C' + dD' = R', \text{ ecc.}$$

Adunque

$$N = dP - d^2Q + d^3R - d^4S \text{ ec.} = dA, \text{ onde } A = P - dQ + d^2R - d^3S \text{ ec.}$$
$$N = dP' - d^2Q + d^3R' - d^4S' \text{ ec.} = dA' \qquad A' = P' - dQ' + d^2R' - d^3S \text{ ec.}$$

Parimente

$$A + dB = P, \text{ e perciò } dB = dQ - d^2R + d^3S \text{ ec.}, B = Q - dR + d^2S \text{ ec.}$$
$$A' + dB' = P' \qquad dB' = dQ' - d^2R' + d^3S' \text{ ec.}, B' = Q' - dR' + d^2S' \text{ ec.}$$
$$B + dC = Q \qquad dC = dR - d^2S \text{ ec.}, C = R - dS \text{ ec.}$$
$$B' + dC' = Q' \qquad dC' = dR' - d^2S' \text{ ec.}, C' = R' - dS' \text{ ec.}$$
$$C + dD = R \qquad dD = dS \text{ ec.}, D = S \text{ ec.}$$
$$C' + dD' = R' \qquad dD' = dS' \text{ ec.}, D' = S' \text{ ec.}$$

Cumulando, ed ordinando le ritrovate espressioni, ne nasce

$$\begin{aligned} V = A\,dx + B\,dp + C\,dq + D\,dr \text{ ec.} &= (P - dQ + d^2R - d^3S \text{ ec.})\,dx \\ + A'dy + B'dp' + C'dq' + D'dr' \text{ ec.} &+ (Q - dR + d^2S \text{ ec.} \ldots)\,dp \\ &+ (R - dS \text{ ec.} \ldots)\,dq \\ &+ (S' \text{ ec.} \ldots)\,dr \\ &+ (\quad \text{ec.} \quad) \\ &+ (P' - dQ' + d^2R' - d^3S' \text{ ec.})\,dy \\ &+ (Q' - dR' + d^2S' \text{ ec.} \ldots)\,dp' \\ &+ (R' - dS' \text{ ec.} \ldots)\,dq' \\ &+ (S' \text{ ec.} \ldots)\,dr' \\ &+ (\quad \text{ec.} \quad) \end{aligned}$$

ch'è appunto il teorema da dimostrarsi *(a)*.

3. Altro teorema, ed ancor più elegante, si è quello della *Remarque* IV. dopo il III. Problema. *Condorcet* ha qui per oggetto di rintracciare il motivo *analitico*, in virtù del quale le medesime *equazioni di condizione*, che danno l'integrabilità della funzione $\int V$, diano ancora il *massimo* o *minimo* di $\int V$. Le due questioni non appariscono analoghe; e perciò non mancano di presentare ai Geometri un fenomeno raro, che non può a meno di non avere per causa la vera e reale *identità analitica* dei due problemi. Dopo le formule date da M. de la *Grange*, l'*Euler* spiegò indirettamente questa coincidenza di formule *(b)*, ed il Marchese *de Condorcet*, ch'è stato il primo di tutti a spiegarla in una maniera diretta, lo fa di tal sorte che sembri troppo elaborato e profondo il suo metodo *(c)*. Ciò mi ha dato motivo di pensare a semplificarlo, e dicifrare quell'*identità analitica* in una forma, che sia facile, chiara, ed a portata di tutti.

4. Io la discorro così

$$\int V = \int\int dV = \int\int \begin{matrix} N dx + P\,dp + Q\,dq + Q\,dr + \text{ec.} \\ + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{ec.} \end{matrix}$$

(a) Si vedano le *Lezioni* di M. *Cousin* nella I. Parte a pag. 108.

(b) Si consulti il Tom. X. dei Nuovi Commentarj dell'Accademia di Pietroburgo alle pag. 133. 34. come ho avvertito nella Nota *(a)* pag. 127.

(c) Lo contengono le pag. 16. 17. e 18.

Per il *maſſimo* o *minimo* dev' eſſere

$$\delta\int\!\!\int \begin{matrix} Ndx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{ec.} \\ + N\,dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{ec.} \end{matrix} = o\,.$$

L' equazione o equazioni che determinino il *maſſimo* o *minimo*, qualunque elle ſiano per eſſere (che non importa adeſſo cercarle), devono avere neceſſariamente queſti due requiſiti, 1°. cioè hanno da eſſer compoſte (nè ora giova di ſaper come) di N, P, Q, R, ec., N, P', Q', R', ec. e loro differenziali, 2°. hanno da eſſere le medeſime e della medeſima forma tanto nel caſo che $\int V$ ſia integrabile, quanto nell' altro che non lo ſia, perchè nella riſoluzione generale del problema del *maſſimo o minimo* l' Analiſi non riſguarda, nè deve mai riſguardare ſe $\int V$ ſia funzione integrabile, o piuttoſto un integrale *indefinito*. Ecco come l' equazione o equazioni di $\delta\int V = o$ ſia d' *analitica* neceſſità che debbano eſſere perfettamente conformi nelle due ipoteſi, colla ſola differenza che $\int V$ non eſſendo integrabile, quell' equazione o equazioni non ſaranno identiche, ma ſtabiliranno la relazione tra le variabili x, y ec. della curva ſuperficie ec., a cui ſpetti il *maſſimo* o *minimo* (*a*), e nel caſo contrario di $\int V$ integrabile, quell' equazione o equazioni ſaranno *identiche*, perchè eſclutive del *maſſimo* o *minimo*.

5. Anzi di qui ſi deduce che ſenza l' ajuto del metodo eccellente adoperato dall' *Euler* nella ſua grand' Opera pubblicata del M. DCC. XLIV. intorno il problema degli Iſoperimetri (*b*), e ſenza il ſoccorſo del Calcolo delle variazioni perfezionato da M. de la *Grange* (*c*), col teorema ſolo di *Lebnitz* o di *Fontaine* ſi poteſſero ſciogliere tutti i problemi de' *maſſimi* e *minimi*. Imperocchè, ſiccome queſto teo-

---

(*a*) Pare che *Condorcet* a pag. 17. v. 9. coll' eſpreſſione *qui doit être identique* dia a credere d' aver ſuppoſto che l' equazione determinante il *maſſimo* o *minimo* abbia ancor eſſa da eſſere *identica*, cioè debba eſſere $o = o$, quando al contrario deve fiſſare la relazione tra le variabili

(*b*) Intendo di quella intitolata *Methodus inveniendi Lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, ſive ſolutio Problematis Iſoperimetrici latiſſimo ſenſu accepti*.

(*c*) *Tomus alter* delle Miſcellanee di Torino.

Nè tolgono pregio a queſta bella parte del calcolo le Oſſervazioni fatte dal Cav. de *Borda* nel Tomo delle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1767.

rema a forma delle prove datene nell' Articolo II. ha prodotte l'equazioni identiche $N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S$ ec., $N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S'$ ec. $= o$ nel caso di $\int V$ integrabile, così in virtù del precedente num. 4°. le medesime equazioni $N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S$ ec., $N - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S'$ ec., ec. $= o$ son quelle che non altrimenti identiche risolvano ancora il problema di $\int V$ *massimo* o *minimo* quando $\int V$ non ammetta integrazione. Questo è un nuovo lustro ed elogio dell' importanza, universalità, e fecondità somma del teorema di *Lebnitz*; per modo che mentr' *Euler* credeva di dover derivare l' *equazioni di condizione* da quelle dei *massimi* e *minimi* (*a*), io abbia fatto conoscere per il contrario che le seconde si derivino dalle prime (*b*). Tanto è vero che un ritrovato solo d'un uomo grande faccia spesso cambiar d'aspetto le scienze, e le arti.

6. Taluna volta accade perfino che certi problemi di *massimi* o *minimi* non abbiano di bisogno di tutto l'apparato sublime del calcolo delle *variazioni*, e si risolvano senza di questo colla maggiore semplicità. Ero nella mia adolescenza, nè avevo sentore alcuno del metodo nuovo di M. *de la Grange* quando leggendo nei loro fonti le tante ed operose soluzioni, parte dirette, parte indirette, del famoso problema della curva *brachistocrona*, o come altri la chiamano *oligocrona*, mi venne in pensiero di scioglierlo col solito calcolo differenziale. Tentai la cosa più per ischerzo che per la speranza d'una felice riuscita, ben prevedendo che quel problema non si potesse, nè si dovesse trattare come il *massimo* o *minimo* d'una curva data, ma d'una curva variabile all'infinito. E poi se fosse stato possibile, l'avrebbero così risoluto prima di me i sommi Analisti *Bernoulli*, *Newton*, *Leibnitz*, e Marchese *de l'Hôpital*. Tuttavolta il fatto fu che il tentativo riescisse (*c*).

7. Mi provai dunque nella supposizione Galileana della

(*a*) Vedasi il n. 2 dell' Articolo II.

(*b*) Dal teorema di *Leibnitz* si deducono ancora (ved. Nota 3.) le formule conosciute del metodo delle *variazioni* $\int\int\delta B dx = \int\delta\int B dx = \delta\int\int B dx$, perchè tutte dipendono da $\delta\int B dx = \int\delta B dx$.

(*c*) M'accadde d'osservarlo nel 1764.

gravità coſtante a riſolverlo, facendo $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=o$; e poſto per comodo di calcolo dy coſtante, ottenni ſubito $\frac{dxd^2x \,.\, Vx}{x\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{2x\sqrt{x}}$, che vale a dire $2x=\frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$. Avvertii facilmente come eſſendo $\frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$ l'eſpreſſione generale del *Cor Raggio* oſculatore (*a*), veniva queſto ad eſſer duplo dell'ordinata x, ch'è appunto la proprietà della Cicloide primaria inverſa, ch'abbia l'eſtremo della ſua baſe orizzontale nel punto più alto dei due, per cui debba paſſare l'arco della Brachiſtocrona ricercata. Credendo che ciò derivaſſe da una combinazione meramente caſuale, paſſai a ſperimentare l'iſteſſo metodo nell'ipoteſi di gravità di *Gio. Battiſta Baliani*, ſebbene impoſſibile e aſſurda. Allora s'aveva $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=o$, cioè $\frac{xdxd^2x}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\sqrt{dx^2+dy^2}\,dx$, cioè $x=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2x}$, o ſia il *Cor Raggio* oſculatore eguale all'ordinata, ch'è quanto dire la Brachiſtocrona un arco inverſo di circolo (*b*). Andai più avanti, ma non volli altrimenti fidar-

(*a*) *Analyſe des infiniment petits* par de l'*Hopital* ediz. d'Avignone del 1768. a pag. 106.

(*b*) M. *Montucla* nel Tomo II. della ſua *Hiſtoire ecc.* a pag. 453. 457. accuſa il *Galileo* per aver ſuppoſto la Brachiſtocrona eſſere una porzione della periferia circolare. Queſto è uno sbaglio pari all'altro, ch'ei fa a pag. 456. 47., riſpetto alla Catenaria, dove afferma che il *Galileo* la ſupponeſſe l'iſteſſa della parabola Apolloniana. Ho dimoſtrato l'oppoſto nella mia Opera prenochè tutta ſtampata *intorno i Solidi Coclearj*. Oſſervo però che quanto ſon perdonabili agli Oltramontani degli errori d'Iſtoria ſul *Galileo*, altrettanto non ſiano ſcuſabili per gl'Italiani. In un libro d'Elogi d'illuſtri Italiani ſtampato in Pisa nel 1784 parlandoſi di *Galileo* (*Elogio del Perelli*) ſi dice a pag. 54. „ in quella ſcuola „ (*dello Studio di Piſa*) in cui il *Galileo* aveva il primo.......annunziato tante ſue celeſti ſcoperte, e l'uſo mirabile per „ la Geografia e Nautica di quelle dei Satelliti di Giove. „ Eppure ognun ſa che quaſi tutte le ſcoperte celeſti del *Galileo* foſſero fatte del 1609. e 1610 nello Studio di Padova, e non in quello di Piſa, ch'egli aveva laſciato ſino dal 1592. ſenza

fidarmi del mio risultato. Lo mostrai immantinente al mio grande amico Cav. *Felice Fontana*, e ne rimase ancor egli sorpreso (a). Adesso però egli è ben facile ravvisare il preciso motivo, per cui da quel metodo falso nascessero delle Brachistocrone vere.

8. Difatti, prevalendoci della legge di *Galileo*, $\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}$ dev'essere un *minimo*. Pongasi ora costante dx. Dal teorema di *Leibnitz* a forma del num. 5°. conseguiremo $N-dP' + d^2Q' - d^3R' + \text{ec.} = o$; ed essendo Q', R' ec. $= o$ per la natura della formula data, e di più ancora $N' = o$, converrà unicamente fermarsi a considerare dP', che in questo caso, avendosi $P' = \frac{dy}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2}}$ (b) somministra l'equazione $-dP' = o$, o sivvero (fatto per comodo dy costante) $dP' = o = -\frac{1}{2x} - \frac{d^2x}{dx^2+dy^2}$, di dove si ricava $2x = \frac{dx^2+dy^2}{-d^2x}$. Parimente surrogata l'ipotesi del *Baliani*, viene ad essere per l'istessa ragione $P' = \frac{dy}{x\sqrt{dx^2+dy^2}}$, e perciò $dP' = o = -\frac{1}{x} - \frac{d^2x}{dx^2+dy^2}$, ed in conseguenza $x = \frac{dx^2+dy^2}{-d^2x}$. Di qui n'avviene che tanto $dP' = o = d\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)$, quanto d

---

più ritornarvi. Quando l' Elogiografo non avesse avuto in pensiero quel titolo meramente d'onore di Matematico primario dello Studio di Pisa senza peso di leggervi, nè risedervi, ch' ebbe tra gli altri il gran *Galileo* fino dal mese di Luglio del 1610. richiamato da Padova dal Gran Duca *Cosimo II*. Ma allora la frase istorica meriterebbe uno schiarimento.

(a) Ben volentieri paleso qui al mondo la gratitudine ch' io debbo a questo Filosofo insigne, come quello che mi ha dato più volte e comodo e coraggio per applicarmi alle Matematiche, quando specialmente attendevo in Pisa allo Studio della Filosofia delle Leggi.

(b) Si consulti M. *Cousin* nella prima parte delle *Lezioni* precitate a pag. 547. 48.

$\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=o$, come ancora $dP'=d\left(\frac{1}{x\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=o$, e $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=o$ conducendo refpettivamente ad una medefima equazione tra le variabili x,y, s'intenda perchè il problema della Brachiftocrona riceva la fua foluzione dal femplice differenziale $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=o$, $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=o$. Nè potrebb'effere diverfamente: imperocchè in generale tanto $d\left(\frac{z}{v}\right)=o$, quanto $d\left(\frac{1}{vz}\right)=o$ danno l'iftefla equazione finale $vdz=\pm zdv$. E ciò fa conofcere che il problema della Brachiftocrona rifolverebbefi fempre col medefimo metodo fempliciffimo in qualunque ipotefi di gravità, dove la velocità della caduta veniffe univerfalmente rapprefentata da ϕx, funzione qualunque di x. La fola diverfità, che fi trovi, confifte nell'effere il fecondo membro dell'equazione pofitivo in un cafo, e negativo nell'altro, lo che appare ancora dal paragone del *Cor Raggio* trovato in quefto §. coll'altro trovato nel §. antecedente. Ma di quefte fingolariffime foluzioni d'alcuni problemi di *maffimi* o *minimi*, non meno che d'alcune particolarità intereffanti del metodo delle variazioni, e del rimanente dell'Opera ful *calcolo integrale* del Marchefe *de Condorcet* avrò in altro tempo occafione d'efporre al pubblico i miei penfieri.

SULLE RIVOLUZIONI

DEL GLOBO TERRESTRE PROVENIENTI DALL'AZIONE DELL'ACQUE.

MEMORIA GEOLOGICA

DI ERMENEGILDO PINI

PROEMIO.

NOn sì tosto il gusto mineralogico penetrò anche nella Fisica che molti si applicarono ad esaminare la fisica costituzione della terra. Le osservazioni però finora fattevi sono ancora poche in confronto della vastità del globo terrestre; e tra quelle, che finora furono prodotte, pochissime possono meritare la confidenza de' studiosi della natura. Perciocchè molti osservarono senza principj; altri produssero come generali quelle osservazioni che erano particolari a piccoli tratti; tutti finalmente, se pochissimi se ne eccettuino, mancano nella loro esposizione di quei dettagli che soli possono presentare ad un ragionatore i dati per farne un' atta applicazione.

In ogni modo sul fondamento di così scarse ed imperfette osservazioni molti si affrettarono a fabbricare de' sistemi geologici: onde non è maraviglia se al primo loro sorgere rovinarono; nè per altro motivo quello immaginato dal Sig. *Conte di Buffon* ha ancora nella mente di alcuni qualche sussistenza se non in quanto che egli seppe colla decorazione rendere apprezzevole un edifizio altronde rovinoso. Egli degli altri più animoso non solo formò una teoria della terra, ma spinse in oltre le sue specolazioni a stabilire le epoche della natura, pretendendo di appoggiarle ai monumenti residui della natura medesima, come a Diplomi i più autentici. Chi però si applica ad esaminare il corpo di questa sua

nuova Diplomatica ſenteſi tentato a paragonare queſto leggiadro Interprete della natura ad un deſtro Notajo, il quale ſu iſtromenti apocrifi, o conſunti, e non inteſi teſſe la genealogia di una famiglia che non mai eſiſtette, e cerca di renderla plauſibile col preſentarla in un albero elegantemente diramato e vagamente colorito. (*a*)

Certamente le tre oſſervazioni fondamentali, ſu cui egli appoggia la ſua teoria, ſono ora generalmente riconoſciute per falſe, e le altre acceſſorie o non ſono vere, o non ſono concludenti. Per lo che la Geologia, così come altre ſcienze fiſiche, non altro finora ſembra eſſere che un pelago di opinioni, in cui rare verità ondeggiano, nè in altro modo ſi può aumentare il numero di queſte, ſe non cominciando dal rettificare le oſſervazioni.

Ogni oſſervazione geologica ſi riduce a riconoſcere lo ſtato che ha una data porzione della ſuperficie terreſtre nel tempo che ſi oſſerva. Qualunque ſtato preſente di queſta ſuperficie è il riſultato di qualche variazione che vi è intervenuta; e le variazioni poſſono eſſere ſtate prodotte da moltiplici cagioni, come ſono l'azione del fuoco, dell'acqua, e ſimili. Il determinare la cagione, o anzi il compleſſo delle cagioni che produſſe una data variazione, e l'aſſegnare la mutua influenza di una variazione nell'altra, e la loro ſucceſſione, ſono gli oggetti di una teoria geologica; e poichè queſta ſulle oſſervazioni dee eſſere appoggiata, perciò, affinchè poſſa corriſpondere al vero, è neceſſario che eſſa non ſi eſtenda più di quel che le oſſervazioni ſteſſe comportano. Quelle, che ſino a' noſtri giorni furono fatte, ſembranmi oramai ſufficienti per decidere che il globo, dappoichè cominciò ad eſſere abitato da eſſeri organizzati, fu ſoggetto ad una generale inondazione, e per determinare ſe queſta ſia ſtata o permanente, o paſſaggiera. A tale oggetto

---

(*a*) Quanto arbitrarie ſieno le ipoteſi aſſunte dal *Conte di Bufon* ſu tale oggetto ſi può riconoſcere dalle oſſervazioni, che alle Epoche della natura fece uno de' più grandi, e più ſavi ingegni del ſecolo noſtro l'Emin. Cardinale *Gerdil*: come pure dal ſuo eſame dei ſiſtemi relativi all'antichità del mondo: i quali due ſcritti ſono inſeriti nelle di lui opere ſtampate in Bologna. Quanto vacillino le ipoteſi ſteſſe nella parte aſtronomica fu dimoſtrato dal ſublime Calcolatore *M. de Sejour*. Eſſai ſur les Cometes.

è diretta questa Memoria che è divisa in due parti, delle quali la prima contiene le relative osservazioni rettificate; la seconda si rivolgerà a determinare l'inondazione, a cui devonsi ascrivere le principali rivoluzioni che si riconoscono intervenute nel globo terrestre.

PARTE PRIMA.

Osservazioni sulla presente costituzione della superficie terrestre.

La terra, che da un Geologo può essere esaminata, si riduce soltanto a quella porzione, che dalla sommità dei monti si stende al più sino al fondo dei mari, e questa porzione può riguardarsi come la superficie geologica. Il rimanente, che stendesi a maggiori profondità, non è accessibile alle sue osservazioni, e però non deve formare un oggetto delle sue ricerche. La configurazione di questa superficie, le materie di cui è composta, la disposizione che queste vi hanno, e simili sono gli oggetti, che egli deve distintamente riconoscere; e dal complesso delle sue osservazioni potrà determinare quali cangiamenti vi sieno intervenuti, e da quali cagioni sieno derivati.

CAPO I.

Della figura della Terra.

I. La superficie geologica presenta una curva molto irregolare proveniente dalle sue ineguaglianze, e principalmente dalle elevazioni dei monti. Ma prescindendo da queste, e riguardandola come ridotta tutta al livello del mare, essa, secondo gli Astronomi, forma la superficie di una elisse, o sferoide compressa ai poli, ed elevata all'equatore. Secondo i risultati del *Sig. de la Lande* (*a*) il semiasse maggiore ossia il raggio corrispondente all'equatore è di 3281012 tese, ossia

(*a*) Astronomie Tom. 3. §. 2690.

di $1437\frac{1}{7}$ leghe comuni di Francia, ognuna delle quali è di tese 2283, il semiasse minore, o il raggio corrispondente al polo è 3262688 tese; onde la differenza dei due semiassi è di 18324 tese ossia di circa 8 leghe, la qual differenza chiamasi l'*appiatimento* della terra ai poli, ed è circa $\frac{1}{179}$, del semiasse maggiore.

2 I metodi finora usati per riconoscere la figura della terra, e per determinare le grandezze dei raggi corrispondenti ai diversi punti della sua superficie si riducono a due. Il primo è la misura di alcuni gradi di latitudine, o di longitudine; il secondo è la variazione della gravità indicata dai pendoli nelle diverse latitudini. Per dedurre dalle misure di alcuni gradi il rapporto dei raggi terrestri supponesi, che la curva sia un'elisse regolare, a cui appartengano almeno due dei gradi misurati. Ora siccome due, o anche più gradi possono appartenere non solo ad un'elisse regolare, ma anche ad una curva irregolare composta per esempio parte di archi elittici, e parte di curve di altra natura; perciò i risultati non hanno se non quella verisimiglianza, o anzi quella semplice possibilità, che ha l'ipotesi assunta. Altronde l'appiatimento stesso, che coll'indicato metodo si deduce, riesce anche diverso secondo la diversità dei gradi misurati, che si assumono nel calcolo. Così se si scelgono i due gradi di latitudine misurati l'uno all'equatore, e l'altro al circolo polare, quello riesce di $\frac{1}{210}$; ed assumendo i due gradi misurati l'uno all'equatore, l'altro in Francia, risulta di $\frac{1}{304}$. (a).

3 L'altro mezzo consistente nella variazione della gravità, che osservasi nelle diverse situazioni tra il polo e l'equatore, non è più atto del primo. Perciocchè quella può provenire da due cagioni, cioè dalla diversa distanza dal centro della terra, o dalla diversa densità delle parti del globo terrestre. Per lo che dall'aumento della gravità, che si osserva andando verso il polo, non può dedursi l'appiatimento della terra se non nel caso che questa sia omogenea,

(a) *La Lande*. Astron. §. 2678.

ed egualmente densa, oppure che si abbia il modo di determinare quale sia la densità del globo nei diversi siti per conoscere quanta influenza quella abbia nell' aumento della gravità.

4 Ora la terra, come nella superficie ci presenta nelle materie una diversa densità, così sembra dover essere anche nell'interno. Ma il determinare quale questa sia nelle diverse parti della massa terrestre sarà sempre un assunto superiore alle nostre cognizioni.

5 Quindi non è maraviglia, se gli Astronomi stessi, ai quali massimamente importa la determinazione dell'esatta figura della terra, molto disconvengano nell'assegnarne anche la quantità dell'appiatimento. Lo stesso Sig. *de la Lande*, il quale combinando la misura di alcuni gradi coll'ipotesi di una figura elittica regolare avea trovato l'appiatimento di $\frac{1}{179}$, (*a*), in seguito lo ridusse ad $\frac{1}{300}$, combinando cioè l'ipotesi stessa coll'aumento della gravità trovato dal Sig. *Lyons* a gradi 79. 50' di latitudine boreale (*b*). Ma anche questa correzione è fondata su diverse ipotesi, ed altronde sensibilmente si allontana dall' appiatimento risultante dai gradi misurati in Filadelfia, al Capo, a nella Lapponia.

6 Attese tali indeterminazioni il lodato Astronomo conchiuse già (*c*) che la terra o non è elittica, o non è omogenea. Avrebbe anzi dovuto conchiudere, che essa non è nè elittica, nè omogenea. Il difetto d'omogeneità risulta anche dalla considerazione della stessa superficie terrestre. Quanto alla figura noi sappiamo, che le misure dei gradi assunte per il calcolo furono tutte ridotte al livello del mare, e nulladimeno non si possono quelli riportare ad una stessa elisse, qualunque sia il rapporto che si ascriva ai due semiassi della medesima: il che dimostra che la terra considerata anche astronomicamente, ossia che la superficie stessa del mare non ha la figura di un elisse, quando pure non si vogliano ammettere sensibili errori nelle prese misure o per

---

(*a*) Astronomie §. 2690.
(*b*) Mem de l'Accadem. R. an. 1785. pag. 5.
(*c*) Astron. §. 2682.

inesattezza di osservazione, o per irregolarità intervenuta in esse a motivo dell'attrazione delle montagne. Che se la terra si considera geologicamente, tanto più essa si discosta dalla regolarità di un'elisse geometrica. In quella veggonsi sorgere montagne molto estese ed elevate, alcune delle quali giungono fino a 3220 tese sul livello del mare, inoltre dal mare ascendono diverse dolci pendenze, le quali talora giungono all'elevazione di 1460 tese: tale è il piano di Quito verso l'equatore (*a*); tale è pure l' immmenso deserto di Chamo nel Tibet situato a circa 45 gradi di latitudine boreale, il quale secondo il *Pallas* ha un' elevazione non minore di quella del piano di Quito (*b*). Ora queste elevazioni sono assai sensibili per rapporto al semiasse maggiore, che come ho detto si assume di tese 3281012, e queste inducono anche una sensibile diversità nel rapporto dei due semiassi terrestri considerati nello stato presente e reale della terra. Così se alla lunghezza di 3281012 aggiungansi le 3220 tese, che è l'altezza del Chimboraco sul livello del mare in vicinanza dell'equatore, risultano 3284232 tese per il semiasse corrispondente alla massima elevazione terrestre sotto l'equatore; e supponendo che ai poli non sorgano montagne, ossia che la superficie sia colà terminata dal mare o da pianure di ghiacci, come è nelle vicinanze de' poli stessi che finora si sono visitate, ne seguirebbe che la differenza tra il semiasse maggiore terminato alla massima prominenza montuosa ed il semidiametro minore corrispondente ai poli o almeno alle vicinanze loro, il quale è di tese 3262688, sarebbe di tese 21544, il che forma circa $\frac{1}{152}$ del semiasse maggiore.

7 Il motivo, per cui sì gli Astronomi, che molti dei Geologi insistono sulla figura elittica della terra, si è l'opinione, che questa originariamente sia stata fluida, e che perciò debba avere presa quella figura che conveniva ad un globo fluido sottoposto all' azione della gravità, e della forza di rotazione, la qual figura è appunto l'elittica. Questa opinione

(*a*) *Condamine* Voyage pag. 33.
(*b*) *Pallas* Observations sur la formation des montagnes pag. 19.

opinione però non ha verun ſondamento nelle oſſervazioni. Perciocchè in due modi può eſſere ſtato fluido quel globo che ora trovaſi in parte conſolidato, ed eterogeneo, cioè o per una compiuta fuſione, o per una ſoluzione di materie in un liquido come è l'acqua. Che il globo ſia ſtato in fuſione è un'ipoteſi che diſcorda dalla natura delle materie che la compongono, ſiccome altrove ſarà dimoſtrato; altronde è ſoggetta a quelle difficoltà che devono far eſcludere anche l'altro genere di fluidità.

8 Nella ſuppoſizione che il globo ſia ſtato fluido nel ſecondo modo, queſta fluidità può eſſere ſtata omogenea, e perfetta, ovvero eterogenea, ed imperfetta. Nel primo caſo ſarebbe riſultata un'eliſſoide regolare ſenza prominenza nella ſuperficie, e ſenza cavità nell'interno; inoltre l'appiatimento ſarebbe riuſcito di $\frac{1}{270}$ (*a*); e queſto ſarebbe ſtato il maſſimo, giacchè in quella ipoteſi le parti avrebbero potuto ſecondare compiutamente la forza centrifuga, o di rotazione. Nel ſecondo caſo può intenderſi l'eterogeneità del fluido o regolare, cioè diſtribuita nella maſſa ſecondo certe leggi riducibili a calcolo; ovvero irregolare; e ſupponendo che la fluidità eterogenea foſſe anche imperfetta, l'appiatimento ſarebbe riuſcito minore di $\frac{1}{270}$; inoltre ommettendo ora il caſo dell'eterogeneità irregolare ſiccome quello che ha innumerevoli indeterminazioni, ed aſſumendo ſoltanto il caſo che quella foſſe regolare, la ſuperficie ſarebbe pure riuſcita uniforme. Ora l'appiatimento della ſuperficie terreſtre conſiderata come è realmente è di circa $\frac{1}{172}$ (§. 6.) cioè maggiore di quello che riſulta ſecondo la teoria aſſunta da *Nevvton*; inoltre la ſua ſuperficie è aſſai irregolare (§. 6.), e vi ſi riconoſcono conſiderabili cavità. Per lo che la figura preſente del globo non corriſponde allo ſtato di un fluido nè omogeneo, e perfetto, nè regolarmente eterogeneo, ed imperfetto. L'eſiſtenza di caverne ſotterranee anche al diſotto del livello del mare è provata dai vortici, che in diverſi mari ſi riconoſcono. Tali ſono quelli di Scilla e Cariddi nella Sicilia, e quello di Maleſtroom nella Norvegia.

(*a*) *Newton* Princip. lib. III. prop. 19.

Lo ſteſſo viene confermato dai ſobbiſſamenti di diverſi tratti di terra che nelle ſtorie ſi rammemorano; dai diverſi fiumi che ſottoterra corrono, e dei quali alcuni per vie ſotterranee ſi ſcaricano in mare; e da que' vulcani che col mare comunicano. Frequenti, ed ampie caverne oſſervanſi pure nell' elevazione dei monti, e maſſime nei calcarei, e nei vulcanici. Tra le accennate cavità alcune certamente ſono poſteriori all' origine o alla conſolidazione del globo terreſtre, e queſte non hanno influenza ſulla queſtione, di cui ora ſi tratta. Altre però devono eſſere contemporanee alla prima eſiſtenza del globo conſolidato. Tali ſono almeno in parte le caverne vulcaniche, giacchè ſebbene debbaſi ammettere che alcune o ſi formarono, o ſi aumentarono in ſeguito, pure non può intenderſi, che abbiano cominciato le infiammazioni delle materie, ſe non in cavità già preeſiſtenti *(a)*.

9. Potrebbe altri dire che le prominenze, le quali rendono nella terra l' appiatimento maggiore, e la ſuperficie irregolare, non eſiſtevano nell' originaria formazione della figura terreſtre, ma che vi ſi formarono da ſeguenti mutazioni intervenutevi. Tali mutazioni però in una figura ſuppoſta uniforme e regolare poſſono eſſere accadute in due modi, cioè o per ſottrazione di materia in que' ſiti che ora ſono più baſſi, e che formano le valli, ovvero per aumento di materia ſopraggiunta in alcuni luoghi della ſuperficie. Il primo modo non potè aver luogo ſe non per un abbaſſamento della materia in que' ſiti che ora ſono più baſſi; e per ammettere tale abbaſſamento conviene ſupporre che al diſotto della ſuperficie eſiſteſſero grandi cavità, in cui poteſſe ritirarſi la materia abbaſſataſi, la qual ſuppoſizione è contraria alla ſeconda condizione che (§. 8) dovea aver luogo nell' ipoteſi di un fluido omogeneo, o regolarmente eterogeneo.

10 Ma neppure potettero le indicate prominenze formarſi nel ſecondo modo. Perciocchè queſto nelle fatte ipoteſi non potè effettuarſi, ſe non per l' eruzione di materie della maſſa terreſtre, a produrre il quale effetto noi non conoſciamo

(a) Le deſcrizioni di diverſe caverne ſi poſſono vedere preſſo *Buffon* Tom. I' Hiſt. nat., e preſſo *Bergmann* Phyſicaliche Beſchreibung der Erd Kugel t. 7. p. 264 ecc. *Pallas* Obſerv. ſur la formation des Montagnes.

altra atta cagione fuori dei vulcani; e se da questi fossero state prodotte o tutte, o almeno le principali prominenze terrestri, dovrebbero queste essere composte di materie vulcaniche, il che certamente non è.

11 Se ad altri piacesse di dire, che le ineguaglianze terrestri, compresivi i monti, sono deposizioni di acque; egli supporrebbe, che le acque avessero fatto lunga permanenza sulla terra ad una elevazione non minore delle più alte cime ora esistenti; e poichè al presente le acque sono ad una elevazione molto minore, perciò converrebbe dire che esse si sieno abbassate, ritirandosi in altre cavità, cioè in quelle cavità le quali non potevano esistere in un globo risultato dalla consolidazione di un fluido perfetto, ed omogeneo, o regolarmente eterogeneo. Oltre a che è manifesto, che la maggior parte dei monti non è una deposizione di acque.

12 Rimane pertanto a dire, che se il globo ebbe una fluidità, questa dovette essere irregolarmente eterogenea, e tale potè essere per innumerevoli maniere, le quali dipendono dai varj gradi di densità, di affinità, di attrazione, e di altre forze, che nelle diverse parti di un fluido supposto eterogeneo si possono intendere. Ora secondo i varj rapporti di queste forze tra loro, e colla gravità e rotazione poteva risultare nella terra tanto una figura elittica come un' altra di natura molto diversa. Ma l'investigare quale dovesse realmente risultare dipende del tutto da ipotesi; e tra quelle, che si assumessero per calcolarne i risultati, molte condurrebbero a calcoli irreducibili, altre ad una figura non elittica, ed irregolare.

13 E' dunque manifesto dalle cose esposte che la figura presente della terra non corrisponde all' ipotesi d' un fluido omogeneo, o regolarmente eterogeneo, e che l'ipotesi di un fluido irregolarmente eterogeneo conduce anche ad ammettere nella terra una figura non elittica. Per lo che l' ipotesi della fluidità originaria della terra non può somministrare una ragione della presente sua figura, come vicendevolmente la figura presente del globo non può servire per provare che esso sia stato fluido.

14 Che se pure si vuol riguardare come quasi sferoidale la presente figura della terra, e si cerca la ragione per cui

abbia tale figura, converrà a tal fine richiamare la cosa da altri principj: il che si farà nella seconda parte di questa Memoria.

CAPO II.

Sulla divisione generale della superficie terrestre.

15 La superficie ne' siti più esposti alle osservazioni si presenta divisa quasi in due parti, cioè in mari, ed in terra ferma, e sotto tal divisione si suole quella riguardare; ma propriamente vogliono aggiungere due altre divisioni cioè in ghiacci polari, ed in paludi. I mari sono un aggregato di acque raccolte nei siti più bassi della superficie terrestre. La terra ferma è quella porzione di materie solide, che circonda il mare o da esso è circondata. I ghiacci polari sono acque consolidate in ghiaccio che trovansi massimamente ai poli, e questi alternativamente a misura che di nuovo si liquefanno, e che si consolidano, equivalgono a mare o a terra ferma. Per paludi finalmente intendonsi que' vasti terreni coperti di poche acque che sono quasi medii tra il mare e la terra ferma; giacchè non hanno tanta altezza di acqua che basti a riguardarle come mare, nè hanno una fermezza di fondo sufficiente per considerarle come terra ferma.

16 La terra ferma per rapporto del mare distinguesi in due grandi continenti, quasi che da essi il mare sia contenuto, e l' uno di essi dicesi antico, l'altro che riducesi all' America chiamasi nuovo. Al polo antartico il primo di questi continenti è staccato dal secondo, ma all' artico sembrano essere uniti, e se sono uniti, essi non formano che una sola isola, ma se sono disgiunti vogliono riguardare come due grandi isole. Il nuovo continente è più lungo che l'antico, ma di questo meno largo; in complesso la superficie del nuovo è circa la metà di quella dell' antico, e la somma di ambedue ossia il totale della superficie di terra ferma è appena la terza parte della superficie occupata dal mare comprendendo in questo anche i ghiacci. I mari si estendono massimamente nell' emisfero australe, nel quale la superficie dell' acqua supera di molto quella della terra ferma;

laddove nell' emisfero boreale la superficie della terra ferma è maggiore di quella del mare. Nel totale la superficie del globo terracqueo computato al presente livello del mare è circa 26 millioni di leghe quadrate.

CAPO III.

Sui mari in generale.

17 Dei mari alcuni sono circondati da una porzione di terra, la quale in superficie è maggiore dei mari medesimi; altri circondano una porzione di terra minore della loro superficie. Tra i mari del primo genere è il Caspio; del secondo genere è l'Oceano. Il non trovarsi vortici nel Caspio fu dal Sig. Conte di *Buffon* assunto come argomento che quello non comunichi coll'Oceano, e sia di questo più elevato. Alcuni seguiti anche dal Sig. *Bergmann* lo reputano più elevato di 120 piedi svezzesi. Al presente però è dimostrato, che quello è anzi più basso del livello (*a*): e tale circostanza somministra una più fondata ragione, per cui tra loro non possano comunicare; giacchè, posta la comunicazione, dovrebbero press' a poco essere allo stesso livello. Un altro argomento, per cui può provarsi, che quei due mari non comunicano tra loro, si è che nell'anno 1730, in cui in quelle regioni caddero straordinarie nevi, il Caspio si alzò circa 6 braccia, ed in seguito rimase almeno fino al 1769 costantemente due braccia più elevato di quel che fosse per innanzi (*b*). Ora se il Caspio avesse tal comunicazione, avrebbe dovuto per la legge d'equilibrio diminuirsi tale altezza scaricandosi nell'Oceano, o almeno questo avrebbe dovuto alzarsi proporzionatamente: il che certamente non è intervenuto.

18 Le coste, e le spiagge dei mari sogliono essere ritagliate molto irregolarmente, e vi formano golfi, baje, stret-

(*a*) Nota al Proemio dei viaggi di *Pallas* edizione di Parigi 1788., ove si accenna l'errore preso dal Sig. Abbate *Chappe* nell'assegnare l'elevazione del Caspio, e del Volgo.

(*b*) *Pallas* Voyages t. 1. pag. 680. ediz. Par.

ti, e seni. In questa irregolarità il Sig. *Conte di Buffon* s'immaginò di trovar certe regole, cioè 1. che le grandi punte di terra ferma sono rivolte verso il polo australe, 2. che le coste occidentali sono generalmente più ripide delle orientali, 3. che gli stretti, e seni sogliono essere diretti da levante a ponente. Quanto però queste regole debbano valutarsi, sarà detto a suo luogo.

19 La profondità dei mari è varia secondo i diversi siti. Se le coste sono montuose, la profondità in vicinanza di esse suol essere assai grande; ma se avvi spiaggia o piana, o in dolce pendenza, la profondità delle acque ad una certa distanza è mediocre, e va diminuendosi a misura che si accosta alla spiaggia. In molti siti, come in America sulle coste del mare del Sud, la profondità è tanto grande, che collo scandaglio non si può riconoscere (*a*). Sulle coste della Norvegia, che sono occupate da scogli, il mare è profondo dalle 100 fino alle 400 tese (*b*). Al nord di Schetland il Capitano *Phips* non trovò verun fondo alla profondità di 780 braccia francesi; nella quale anche riconobbe che la temperatura dell' acqua era gradi $2\frac{1}{2}$ di *Reaumur* al disotto del punto di congelazione, quando che l'atmosfera ne avea 7 al disopra del punto medesimo (Viag. al Nord 1773). Generalmente secondo l'opinione di M. *Buffon* il mare di rado ha una lega di profondità, ed ordinariamente è profondo circa 60 tese. Finora però troppo poche sono le osservazioni su tale oggetto per poter formare un verisimile adequato.

20 La profondità, e vastità dei mari fa, che anche il loro fondo non possa essere bene esaminato. In ogni modo le isole, e gli scogli che sorgono fuori delle acque, e le rupi che collo scandaglio si riconoscono sott'acqua, ci fanno vedere, che se il mare si asciugasse, esso presenterebbe una superficie con disuguaglianze press'a poco simili a quelle, che ora si osservano sulla terra ferma; e quelle isole sarebbero come i suoi più alti monti.

(*a*) Memoires philosophiques ecc. concernents la decouverte de l'Amerique. Paris 1787.

(*b*) Pontoppidan Hist. nat. de la Norvege. Journ. etrang. Aout 1755.

21 Quanto alle materie componenti il fondo del mare, in diverſi ſiti ſi trovò, che quello è compoſto di varj generi di pietre. Avvi pure un' immenſa eſtenſione di madrepore, di coralli, e di altri zoofiti di ſtirpe fiſſa, come pure di oſtriche *(a)*, e di altre conchiglie che ſogliono ſtare aderenti agli ſcogli. Dalle ſpoglie di queſti animali riſultano fondi permanenti, i quali ſi vanno aumentando a miſura che vi ſi moltiplicano gli animali ſteſſi; e la loro moltiplicazione è tanto copioſa che quantunque molti di eſſi ſieno vermi microſcopici, pure col tempo dalle loro ſpoglie ne riſultano ſcogli, e rupi di vaſtiſſima mole. Sonovi inoltre de' fondi mobili, e queſti preſentano talora una grande quantità di punte di echini, di conchiglie frantumate, di ſelci arrotondite *(b)*; i quali corpi vengono continuamente traſportati dalle correnti, e da altri moti del mare.

22 Le acque marine diſtinguonſi per la loro ſalſedine. Queſta o proviene, o è mantenuta dalle materie ſaline, che vi vengono introdotte dalle acque di terra ferma, e da quelle che ſi ſviluppano maſſimamente dagli animali, e dalle piante che in mare naſcono, e ſi putrefanno *(c)*.

23 La ſalſedine non è dappertutto eguale. Verſo il polo boreale, come ſulle coſte della Norvegia, le acque ſono meno ſalſe che quelle dell' alto mare, e così deve eſſere in ogni altra ſituazione di freddo clima: perciocchè nelle regioni circumpolari, e lungo le fredde coſte, ove le acque gelano, i ſali per la congelazione ſi ſeparano, e ſi precipitano; oltre a che l' acqua nei climi freddi deve tenere in diſſoluzione una minore quantità di ſali *(d)*.

(a) Il Sig. ***Bartram*** dice eſſere immenſi i banchi di oſtriche vive, e morte, che ſi formano in mare. Phil. Trans. an. 1744.

(b) *Dicquemar* Journal de Phyſique dec. 1775. Il *Donati* nel Saggio della Storia nat. dell Adriatico ſcrive che il fondo di queſto mare è fangoſo miſto con madrepore, conchiglie ecc.

(c) Le Ricerche del Ch. Sig Cavaliere ***Lorgna*** ſull' origine del Natro, o Alkali minerale nativo inſerite nelle Memorie della Società Italiana tomo III. meritano di eſſere ſtudiate per rintracciare una più proſſima origine della ſalſedine del mare, e della conſervazione della medeſima.

(d) Le belle eſperienze del lodato Sig. Cav. ***Lorgna*** ſulla dolcificazione dell' acqua del mare inſerite nel citato Tomo III. dimoſtrano, che quella per la congelazione realmente ſi dol-

24 Anche in vicinanza delle coste e spiagge, ove sono gli sbocchi de' fiumi, la salsedine del mare per la continua mischianza colle acque dolci deve generalmente essere minore che in alto mare, ove l' acqua de' fiumi non perviene se non dappoichè si è diffusa nella grande massa delle acque salse, partecipando della salsedine loro.

CAPO IV.

Dei Ghiacci polari, ed alpini.

25 I ghiacci sono una consolidazione che per difetto di calore interviene nella sostanza acquea. Questo cangiamento influisce in molte variazioni terrestri, e massime nel cangiamento del clima. I ghiacci che così si formano sono permanenti, o passaggieri. Permanenti trovansi in grande quantità sì nelle parti più basse in vicinanza de' freddi poli, come nelle parti più elevate delle alpi de' climi anche più caldi. I primi noi chiameremo polari, i secondi alpini. I ghiacci delle alpi osservati dal Sig. *de Saussure* sono propriamente una neve penetrata da acqua gelata; e di simile natura devono essere anche i polari all' eccezione di quelli, che si formano in mare, e nei fiumi dalla immediata congelazione dell' acqua medesima. (*a*)

26

cifica; ma che per congelarsi richiede un freddo molto maggiore di quello, a cui l' acqua pura si agghiaccia; e che inoltre la dolcificazione compiuta delle acque marine molto impure, come sono quelle della laguna di Venezia, non avviene se non dopo quattro successivi agghiacciamenti, in ognuno de' quali si separa una porzione del sale marino, sì che all' ultimo ne rimane del tutto priva. Da che devesi conchiudere, che siccome nei mari circumpolari dominano eccessivi freddi, i quali in certe stagioni alternano con sensibili calori, così devono intervenirvi quelle circostanze, che per gli esperimenti indicati trovansi necessarie alla dolcificazione dell'acqua marina in virtù dell' agghiacciamento, così che non dovrebbe riuscire strano il trovarsi dolce l' acqua proveniente da' ghiacci polari, ma anche il trovarsi qualche parte di que' mari formata almeno in certi tempi di acqua dolce, e pura.

(*a*) Stimarono già alcuni, che nissuna parte dei ghiacci polari fosse proveniente da agghiacciamento di acqua marina, riputando che questa in nessun modo possa gelare. La vanità però di questa opinione è dimostrata dalle immediate esperienze sopraindicate del Sig. Cav. *Lorgna*, e del Sig. Ab. *Mann* (tom. I. mem. de l' Acad. R. I. de Bruxelles); e quella ebbe forse il suo fondamento nell'

26 Nelle vicinanze sì del polo artico che dell' antartico i viaggiatori riconobbero un' immenſa quantità di ghiacci anche al livello del mare ſteſſo; e le congetture conducono a credere che quelli ſieno continui ſino ai poli medeſimi. Di queſti ghiacci alcuni ſono fiſſi, ed altri mobili o galleggianti. Intorno al polo boreale i fiſſi trovanſi già ſtabiliti ſino alla diſtanza di 9 gradi dal medeſimo, oſſia a gradi 81 di latitudine boreale. In alcune longitudini ſi ſtendono anche di più, cioè ſino alla latitudine di gr. 77, come ſi trovò il *Barentz* nello ſtretto di Waigatz, ed il *Vood* tra lo Spizbergo e la nuova Zembla, anzi ſul capo Piaſida il banco di ghiaccio ſolido già eſtendeſi ſino a 76 gr. di latitudine boreale. Tutto all' intorno del polo auſtrale i ghiacci fiſſi ſono ſtabiliti ſino alla diſtanza di 20 gradi dal medeſimo, oſſia a gradi 70 di latitudine, ſiccome dalle Relazioni del Capitano *Cook* è manifeſto, ed in alcuni ſiti ſi ſtendono anche ſino a gr. 60 di latitudine auſtrale.

27 Dagli accennati banchi di ghiaccio ſtaccanſi ſpeſſo immenſi maſſi, che quaſi iſole galleggiano pel mare. Nelle regioni boreali queſti, che talora ſono lunghi 200 teſe, larghi 80, ed alti 12, pervengono ſino al grado 58 di latitudine, ove dall' *Ellis* furono trovati all' Eſt del capo Farewel. Nelle regioni auſtrali i ghiacci mobili giungono in alcuni ſiti ſino al gr. 48 di latitudine. Eſſendo queſti ſtati oſſervati anche nell' eſtate di que' climi, furono perciò riguardati dal Sig. di *Buffon* come permanenti. Tali oſſervazioni però non altro provano ſe non che in que' ſiti trovanſi ghiacci anche in eſtate, ma non già, che quelli, i quali furono oſſervati in un' eſtate, ſieno quelli ſteſſi che vi eſiſtevano negli anni antecedenti. Atteſa la loro mobilità quelli, che negli anni antecedenti all' oſſervazione, erano nell' accennata latitudine di 48 gr., devono almeno in gran parte eſſere ſtati dai venti e dalle onde ſucceſſivamente traſportati in climi atti a liquefarli; anzi a motivo del calore che domina in quella latitudine una porzione de' medeſimi

avere oſſervato, che l'acqua marina non ſi agghiaccia al grado di freddo, a cui ſi congela l'acqua comune, ſenza averne tentata la congelazione a gradi di freddo maggiore.

deve essersi liquefatta nei siti stessi. Per lo che que' ghiacci non devon riguardarsi come permanenti ma come passaggieri, in quanto che vi esistono solo per una successiva sostituzione.

28 La profondità degli accennati ghiacci è molto varia. In alcuni siti il mare sembra ghiacciato sino al fondo (*a*), altrove i ghiacci danno una profondità soltanto di 12 piedi. Generalmente i galleggianti, che si formano in terra ferma, e che vengono in mare o per rilascio interveniente ne' ghiacci di terra ferma, o per trasporto che ne fanno i fiumi, sono assai più grossi di quelli che si formano nel mare stesso. Tali sembrano essere quelle isole di ghiacci che il Sig. *Lade* dice trovarsi nei mari di Frisland, le quali sott'acqua s'immergono alla profondità di 80 tese, ed hanno di circuito una mezza lega e più. Aggiugne lo stesso Scrittore (*b*), che alcuni ghiacci sono alti fuori d'acqua come l'altezza degli alberi de' più grandi vascelli. Allo Spizbergo, dove si va per la pesca delle balene in luglio, e d'onde il freddo costringe a partire in agosto, trovansi ghiacci grossi 80 tese fuori d'acqua. Ora posto che questi massi sporgenti fuori d'acqua vi galleggino, conviene che sott'acqua abbiano una profondità molto maggiore.

29 Le osservazioni ci persuadono, che i ghiacci polari si vanno aumentando. L'antica Groenlandia al presente è perduta tra' ghiacci. Il *Forbicher* nello stretto chiamato dal suo nome trovò già de' ghiacci, i quali però lo lasciavano accessibile, ed al presente è da quelli ostrutto. La baja di Repulse, che per innanzi era praticabile, al presente secondo il *Midleton* è ripiena di ghiacci. Presso la nuova Zembla nello stretto di Waigatz il passaggio a motivo de' ghiacci è divenuto più difficile e quasi impraticabile.

30 E ciò vale dell'aumento de' ghiacci al polo boreale. Quanto a quello del polo australe non si possono avere altrettante osservazioni per essere le vicinanze di esso meno frequentate. Alle osservazioni però si può supplire coll'argo-

(*a*) Recueil des Voyag au Nord. t. 1. p. 154.
(*b*) Voyag trad. per M. *Prevot* t. 2. p. 303.

mentazione. Abbiamo veduto che intorno al polo auſtrale i ghiacci permanenti ſono più avanzati verſo l'equatore che intorno al boreale. Tale avanzamento non può eſſere ſtato che ſucceſſivo cioè equivalente ad un aumento, onde è da dire che l'aumento de' ghiacci al polo auſtrale ſia maggiore che al boreale. Due cagioni inoltre appajono, per cui i ghiacci al polo auſtrale devono anzi aumentarſi più che al boreale. La prima è che il ſole nell'emisfero auſtrale ogni anno ſoggiorna ſette giorni, e tre quarti meno che al boreale: il che deve produrre un freddo maggiore nell'emisfero auſtrale. L'altra cagione di maggior freddo in queſto emisfero è la minore eſtenſione di terra ferma in confronto di quella che eſiſte nell'altro. La terra ferma per l'azione de' raggi ſolari ſi riſcalda più dell'acqua, e ritiene per più lungo tempo il loro calore; così che rimane anche all'inverno una porzione del calore che vi penetrò nell'eſtate; e queſto diffondendoſi per l'atmosfera anche nella fredda ſtagione ne rende la temperatura più mite ſino ad una certa eſtenſione. Per tal motivo al polo boreale i freddi devon eſſer minori che all'auſtrale, e però in queſto devono i ghiacci aumentarſi più che in quello.

31 Secondo le oſſervazioni di *Cook* i ghiacci al polo auſtrale ſono in ſuperficie circa ſei volte maggiori di quegli eſiſtenti al polo boreale; e calcolando i ghiacci d'ambedue i poli ſecondo la diligente carta formata dal Sig. *de Buffon* ſulle relazioni di diverſi viaggiatori, trovai la loro ſuperficie di circa un millione di leghe quadrate, che ſono circa $\frac{1}{26}$ della ſuperficie totale del globo terreſtre.

32 La permanenza di così vaſta mole di ghiacci è accompagnata in que' climi da eccеſſivi freddi (*a*). Queſti nella Groenlandia cominciano al principio dell'anno, ed in febbrajo, e marzo divengono così aſpri, che le pietre talora ſi ſpaccano; l'acqua ſul fuoco s'agghiaccia prima di bollire; nelle baje, e negli ſtretti tra le iſole vicine ſi forma ſul mare un pavimento paſſeggiabile, ed il terreno gela ſino alla profondità di 17 piedi (*b*). Fu però oſſervato, che an-

(*a*) Hiſt. gen. des Voy. p. 20. t. 19.
(*b*) Ellis Hiſt. Voy. t. 15. p. 188.

che in quelle regioni il clima in qualche anno riesce assai meno rigido che all'ordinario, e prende una temperatura contraria a quella d'Europa. Così alla fine del 1739 l'inverno fu sì dolce alla baja di Disko, che le oche selvatiche passarono nel seguente Maggio dalla Zona temperata alla glaciale, siccome quella che allora avea una maggiore temperie. Parimenti nel 1740 non si vide ghiaccio a Disko sino al Marzo, nel mentre che nel generale d'Europa dominò il gelo dall'Ottobre sino al Maggio. Finalmente nel 1763 il freddo, che fu sommamente grande in Europa, si fece sentire così poco nella Groenlandia che la stagione d'inverno vi sembrava più dolce di quel che vi riesca in alcune estati.

33 Non ostanti gli eccessivi freddi, e ghiacci, che nelle regioni circumpolari sogliono generalmente dominare massime nell'inverno, si osservò che di sotto de' ghiacci medesimi scorrono costantemente diverse acque. Nel mentre che gli Olandesi nell'anno 1596 lottavano contro i ghiacci, di cui si andavano coprendo i mari della nuova Zembla, il fianco d'una vicina montagna ghiacciata forniva nell Agosto copiosa acqua, e questa al giorno 5 di Settembre seguitava a scorrere, sebbene que' mari si fossero per l'agghiacciamento consolidati (*a*). Il *Wood* dopo aver dipinti i freddi, che rendono i ghiacci perpetui sino molto addentro nelle terre della Zembla, aggiugne che ad ogni quarto di miglio s'incontrano de' ruscelli, i quali scorrono sino al ghiaccio che cuopre i vicini mari (*b*). Il Capitano *Phips* attesta pure, che allo Spizbergo l'acqua è abbondante, e prodotta solo dalla fusione delle nevi ossia de' ghiacci, che nella sottoposta loro parte interviene; giacchè la temperatura dell'atmosfera non è sufficiente a produrre nella loro superficie un corrispondente squagliamento.

34 Venendo ora ai ghiacci alpini questi pure trovansi permanenti in ogni clima, ed in vaste estensioni; ma cominciano ad un'elevazione maggiore secondo che il clima per la

(*a*) Voy. des Hollandois à la nouvelle Zemble an. 1596.
(*b*) Hist. des Voy. t. 15. p. 167.

situazione geografica è più caldo, ossia più vicino all'equatore. Nelle Cordilliere, che sono situate sotto all'equatore stesso, le nevi, ed i ghiacci permanenti cominciano ad un'elevazione di circa 2434 tese sul livello del mare, e continuano sino alle cime di quelle altissime montagne, di cui la più elevata è di tese 3220 sul livello medesimo. Nei monti situati tra il polo e l'equatore la linea, ove cominciano le nevi permanenti, non può abbastanza determinarsi sì per difetto di sufficienti esservazioni, come anche a motivo delle molte cagioni fisiche che fanno variare il calore nei siti posti ad un'eguale latitudine. In ogni modo prendendo la cosa in una certa generalità si può stabilire, che tal linea nella Zona torrida è elevata sul livello del mare dalle 2434 tese sino alle 2000, nella Zona temperata dalle 2000 tese fino a 1500, e nella Zona fredda dalle 1500 fino a zero.

35 Fra i ghiacci alpini delle regioni temperate sono celebri quelli della Savoja sì per la loro singolarità, e sì anche per essere stati illustrati dai viaggi, e dalle osservazioni del sublime, ed instancabile Fisico il Sig. *de Saussure*; e quello, che egli rapportò su' medesimi, può applicarsi ad altri ghiacciaj di simile natura. Formansi questi o nelle valli, o sulle non ripidissime pendenze dei monti. Nelle valli sogliono essere molto più profondi, atteso che in quelle si accumulano in gran parte anche le nevi cadenti dalle alte cime, e dalle pendenze superiori. Oltre a che vi ristagnano più copiose le acque, le quali si agghiacciano insieme colle nevi medesime. A Chamonix, che è al piede del monte Bianco, l'altezza de' ghiacci fu estimata di 100 tese, ma nelle valli forse giugne anche a mille.

36 Se questi ghiacciaj vadano aumentandosi, o diminuendosi, finora non si è potuto decidere con una certa generalità. Allora che io mi trovava a Chamonix fui da molti di quegli abitatori assicurato, che tempo fa esisteva un passaggio da quella valle sino a Courmajeur, e che al presente quello è ostrutto da ghiacci. Parimenti il Sig. de *Saussure* in que' contorni riconobbe diversi piccoli ghiacciaj di recente formazione, e vide sensibilmente aumentato il ghiacciajo di Jaconay dall'anno 1760 al 1778. Sonovi però altre osservazioni che provano una diminuzione in alcune parti sì

di questi ghiacciaj, come di altri ancora. Così il Sig. de *Saussure* conghiettura che il ghiacciajo di Bois situato in vicinanza di Chamonix, e l'altro vicino a Montdolent siasi sensibilmente diminuito (*a*) ed il *Grouner* stima lo stesso per riguardo al ghiacciajo di Grindelwald (*b*). Per lo che a decider la quistione converrebbe vedere se gli aumenti prevalgono o no alle diminuzioni: il che non si può riconoscere se non per osservazione, e per una valutazione delle cagioni che tendono parte ad aumentare, e parte a diminuire i ghiacci già esistenti.

37 La cagione principale della formazione dell'aumento de' ghiacci alpini è la grande elevazione de' monti, per cui in que' climi le nuvole in vece di acqua vi mandano neve per quasi tutto il corso dell'anno; e di notte verso le cime gela anche nell'estate. Le cagioni di squagliamento, e di diminuzione dei medesimi sono sei massimamente cioè 1. l'azione del sole nei mesi estivi, e temperati, 2. i venti caldi, 3. le acque scorrenti dai ghiacci squagliati nelle parti superiori, le quali inferiormente vi scavano profondi solchi, 4. la svaporazione, la quale, per essere l'aria in quelle altezze più rarefatta, e più rinnovata dai venti, deve produrre maggior effetto, 5. il calore della terra, 6. l'abbassamento, e la discesa de' ghiacci.

38 Di queste cagioni le ultime tre richiedono qualche dichiarazione. E primamente quanto alla svaporazione, l'osservazione immediata ci manifesta il suo effetto massime sulle nevi, ed è visibile verso la cima di quel monte della Lombardia Austriaca che Legnone si chiama, ed altrove da me fu descritto (*c*). Allorachè la sua cima è coperta di neve (il che è per la massima parte dell'anno) spesso si vede a cielo serenissimo quasi come una nuvoletta o fumo, che si parte dalla cima stessa, ed ascendendo va poc'a poco sfumando, e svanendo nella direzione dell'aria, che allora domina. Questa nuvoletta, la quale dura per lunghissimo tem-

(*a*) Sauss. Voyag. aux Alpes t. I. p. 465. & tom. 2. pag. 292.

(*b*) Dei ghiacciaj degli Svizzeri tom. 3. p. 153. ediz. tedesca.

(*c*) Dell'elevazione dei principali monti della Lombardia Austriaca.

po, certamente non è che neve in attuale ſvaporazione, giacchè non ſi preſenta che quando la cima è coperta di neve maſſime recente, ed altronde non ſi può dire, che quella ſia compoſta di piccoli fiocchi, che la forza del vento ſtacchi dalla maſſa nevoſa: il che facilmente ſi riconoſce paragonando la direzione del vento con quella dell'indicata nuvoletta. Il vento, quando è permanente, ſuole avere una direzione quaſi orizzontale, laddove quel vapore ha una direzione ſempre aſcendente, la quale tanto meno potrebbe aver luogo nel caſo che i fiocchi di neve foſſero ſtaccati dal vento, giacchè eſſendo queſti più peſanti dell'aria dovrebbero dopo di eſſerſi elevati nuovamente abbaſſarſi e diſcendere: il che certamente non interviene. Un'altra prova della ſvaporazione de' ghiacci ci viene ſomminiſtrata da quella ſpecie di fumo, che ſi alza dai ghiacci polari e che è viſibile maſſime nell'inverno, atteſa la maggiore condenſazione che dal maggior freddo viene prodotta.

39 Quanto al calore della terra, il ſuo effetto ſi manifeſta maſſimamente nelle acque, che anche nei più rigidi inverni ſcorrono al diſotto de' ghiacci medeſimi, nel mentre che alla loro ſuperficie non ſolo non ſi ſquagliano, ma anzi gelano maggiormente. Tale ſquagliamento come intervenga ne' ghiacci polari già fu accennato più ſopra; negli alpini lo ſteſſo fu parimenti oſſervato. Il fiume Arveron, che nel piano della valle di Chamonix eſce continuamente di ſotto de' ghiacci, ne è uno de' più rimarchevoli eſempj. Il Ticino parimenti, che ha la ſua origine da diverſi ghiacciaj eſiſtenti alla montagna del S. Gotardo, continua a ſcorere anche in inverno mantenendo il ſuo corſo al diſotto delle nevi, che ſopra al ſuo letto in diverſi ſiti ſi accumulano. Altri molti eſempj di ſimile natura furono raccolti dal Sig. *de Carla* (*a*).

40 Affinchè però abbia luogo lo ſquagliamento de' ghiacci e delle nevi in quella parte, in cui toccano il terreno, è neceſſario che la loro mole ſia tanto alta ed ampia, che preſervi il terreno dal freddo dell'aria eſterna. Queſta condizione indica, che non d'altronde può provenire queſto ef-

(*a*) Du Feu ſouterrain.

ſetto, ſe non da un calore proprio della terra, la cui temperatura ſia ſuperiore a quella del ghiaccio. Il lodato Scrittore nel citato opuſcolo oſſervò che le acque eſcenti di ſotto de' ghiacci alpini nell' inverno hanno una temperatura di 10 gradi di *Reaumur*. Da che raccoglie che altrettanta ſia la temperatura del globo terreſtre. Poſto però che il calore di tali acque ſia di gr. 10, conviene che ſia conſiderabilmente maggiore quello del globo. Perciocchè primamente il ghiaccio alpino ſuole eſſere ad una temperatura minore dello zero, onde per ridurlo in acqua che abbia 10 gradi di calore, conviene che s' impieghi un calor maggiore; inoltre tra il terreno e la parte inferiore de' ghiacci una certa quantità d'aria ſempre s' inſinua per quelle aperture ſteſſe per cui eſcono le acque, la quale perciò deve parimenti eſſere mantenuta alla temperatura indicata; e ſiccome l'aria ſteſſa comunicando col rimanente dell' atmosfera traſmette continuamente a queſta una porzione di calore, perciò affinchè il globo mantenga nell' aria interpoſta tra il ghiaccio ed il terreno un calore di 10 gradi deve ſomminiſtrarne continuamente una quantità maggiore.

41 Dall' indicato ſcioglimento della parte inferiore de' ghiacci deriva un altro curioſo fenomeno, ed è che avendo perciò poca, o niſſuna coerenza col ſottopoſto terreno, eſſi allorachè queſto ha una certa pendenza, ſcendono pel proprio loro peſo come ſu di un piano inclinato; e così quelli che erano più elevati, e perciò in una ſituazione più fredda vengono poc'a poco ſcendendo in una ſituazione più favorevole alla liquefazione anche della loro maſſa eſterna (*a*): il che forma l' ultima delle accennate cagioni della diminuzione de' ghiacciaj alpini. Da ciò anche proviene che in certi ſiti baſſi, i quali all' eſtate ſarebbero liberi dai ghiacci, ſpeſſo da queſti ſieno o perpetuamente o per lungo tempo occupati: il che avviene quando quelli vi ſcendono in maſſe tanto grandi che non poſſano eſſere compiutamente liquefatte dal calore eſtivo di un certo numero di anni.

42 Dal-

(*a*) *Sauſſure* l. c.

42 Dalle cose esposte rilevasi, che i ghiacci alpini si vanno continuamente rinnovando, e che perciò non sono propriamente perpetui sebbene perpetuamente si trovino ghiacci in un dato sito. 2. che l'aumento de' ghiacci in un tratto di paese talora è congiunto colla diminuzione de' medesimi in un altro vicino tratto. 3. che l'aumento annuo de' ghiacci in un dato sito riducesi alla differenza tra la quantità che annualmente vi si va formando, e quella che vi si scioglie.

43 Quindi per decidere se le cagioni d'aumento prevalgano alle cagioni di diminuzione de' ghiacci alpini converrebbe calcolare quale sia l'effetto di ciascuna di esse; il che da troppi, e non determinabili elementi dipende. In ogni modo pare che in generale finora la massa dei ghiacci, che si va aumentando, prevalga a quella che si va diminuendo. Considerando però le cagioni sì dell'un che dell'altro effetto, sembra che l'aumento debba finalmente avere certi limiti, giacchè i ghiacci aumentandosi devono avvicinarsi a quelle situazioni, in cui prevalgono le cagioni di diminuzione. Così nel dilatarsi pervengono dalle più elevate, e più fredde regioni alle più basse, e più calde, nelle quali i ghiacci non possono perpetuarsi. Parimenti col crescere essi in altezza diverranno finalmente superiori alle nuvole, cioè giugneranno a quella regione, in cui i vapori non più si possono condensare in acqua, o neve; onde non più potrà essere somministrata materia all'aumento della loro altezza: ed allora prevalerà la diminuzione proveniente dallo squagliamento della parte inferiore de' ghiacci medesimi.

44 Quello che ho detto dei limiti de' ghiacci alpini vale con proporzione anche dei polari; e posto che sì gli uni, che gli altri debbano avere certi limiti nell'aumento, non sarà da temere quell'universale agghiacciamento del globo terrestre, che il Sig. Conte *de Buffon* ci minaccia in conseguenza del suo sistema, il quale per altro incontra ne' ghiacci medesimi un' insuperabile opposizione. Secondo tale sistema la terra ha un calor centrale che è residuo dell'infuocamento, in cui suppone essere stato il globo; e poichè quella verso i poli è meno elevata, perciò stima che colà siasi raffreddata più rapidamente, e che perciò verso i poli il calore proprio della terra sia minore che verso l'equatore.

Ma noi abbiamo veduto, che il calor sotterraneo nelle regioni circumpolari fa liquefare la parte inferiore delle grandi masse ghiacciate, come avviene anche verso l'equatore. Ora posto che le acque scorrenti dal disotto dei ghiacci polari nell'inverno abbiano una temperatura di 10 gradi, cioè eguale a quella che si osservò nelle acque scorrenti dal di sotto dei ghiacci alpini, ne seguirebbe che il calor sotterraneo verso i poli fosse maggiore che verso l'equatore. Perciocchè colà il freddo esterno proveniente dalla situazione geografica è maggiore che altrove, e però que' ghiacci devono essere d una temperatura più fredda che quelli di altre regioni. Per lo che se il calore centrale nello squagliarli comunica all'acqua una temperatura di 10 gradi, conviene che esso sia maggiore verso i poli, che altrove. Finora non fu riconosciuta la temperatura delle acque scorrenti da' ghiacci polari, ma conservandosi esse fluide da terra ferma sino al mare, non ostanti gli eccessivi freddi esterni, conviene che quella sia almeno di 10 gradi. Il che così essendo è chiaro che il calor sotterraneo verso i poli non è minore, anzi è probabilmente maggiore di quello, che altrove si manifesta in maggiore distanza dai medesimi.

CAPO V.

Sul Livello del Mare.

45 Il livello del mare è un termine che si riguarda come fisso, e da cui si suole prendere regola per determinare l'elevazione dei monti, e le cadute delle acque correnti. Alloraquando però si cerca di fissare ciò che debbasi intendere per livello del mare troviamo mancanti i dati per formarne un termine costante. In generale si può dire che quello è la superficie, a cui termina l'acqua del mare, quando da estranee cagioni, come sono i venti, non è alterata. Ma coll'escludere le cagioni estranee supponesi che per altre non estranee cagioni il mare si disponga in una determinata superficie; e nel determinare tali cagioni, e la superficie da queste risultante trovansi difficoltà insuperabili.

46 Quindi per formare un' idea del livello costante con-

viene ricorrere ad ipotesi. La più semplice è di supporre, che l'acqua sia perfettamente fluida, e tenda per la gravità ad uno stesso punto come centro, escludendo l'intervento di ogni altra forza. In tale ipotesi è facile il dimostrare, che ogni mare, o aggregato di acqua distesa sulla superficie terrestre deve terminarsi alla superficie di una sfera, la qual superficie formerà una sfera compiuta, quando l'acqua non sia rattenuta da continenti, e possa liberamente diffondersi per ogni parte; ma quando i mari fossero contenuti dalla terra ferma, e non avessero fra loro comunicazione, come sembrano essere il Caspio, e l'Oceano, allora la superficie di ciascuno formerebbe bensì un segmento sferico, ma questi segmenti potrebbero essere di diverse sfere concentriche. Quindi la linea, o la superficie di livello di ogni mare sarà una curva sferica, il cui raggio sarà eguale a quello, che dal centro della terra giugne alla superficie stessa, e però ogni punto della superficie medesima sarà egualmente distante dal centro stesso; inoltre la linea o la curva di livello sarebbe quella a cui è perpendicolare la direzione della gravità de' corpi terrestri, quando pure questa fosse diretta allo stesso punto, a cui supponesi tendente la gravità dell'acqua. Finalmente la curva di livello sarebbe anche la curva di equilibrio, in quanto che per essere l'acqua a livello sarebbe anche in equilibrio, ossia stagnante. Queste verità però non possono aver luogo nello stato reale della terra: perciocchè primamente avendo un moto di rotazione la superficie dell'acqua deve tendere a disporsi in una figura elittica; di più a motivo della diversa densità, e della irregolare configurazione delle parti del globo terrestre sembra che il centro di gravità, verso cui tende l'acqua ed ogni altro corpo terrestre, sia diverso dal centro della figura; e forse che diversi anche sono i centri, ai quali è diretta la gravità de' corpi medesimi. Per lo che rimane primamente indeterminata la curva, a cui termina la superficie del mare, la quale sembra dover essere irregolarmente ondeggiata. Inoltre la superficie del mare non deve essere una superficie d'equilibrio, siccome è provato dalle molte correnti, che vi esistono; ed è bensì vero che queste sono sensibili soltanto in certi siti, ma per la comunicazione, che hanno tra loro le acque, il moto

particolare delle correnti deve essere accompagnato più o meno da un movimento generale delle acque stesse. Ma quand' anco fosse una curva d'equilibrio, non sarebbe possibile il determinarne la natura, giacchè le moltiplici forze, che concorrono a produrla, non potrebbero ridursi a calcolo. D'onde parimenti deriva che non possano determinarsi le condizioni che devono avere due punti per essere riguardati come posti tra loro a livello. Nelle ipotesi sopraccennate due punti allora sono a livello, quando sono egualmente distanti dal centro della terra, come per contrario uno è più basso dell'altro, quando il primo è più vicino al centro di quel che sia il secondo. Ma questo non può aver luogo fuori di quella ipotesi, e neppure al caso, che la superficie terrestre fosse esattamente sferoidale. In questo caso tutti i punti situati nella superficie sarebbero allo stesso livello, e nulladimeno non tutti sarebbero egualmente distanti dal centro della sferoide; e quantunque gli uni fossero più vicini al centro stesso, non perciò sarebbero più bassi di livello degli altri più lontani.

47 Queste indeterminazioni non possono produrre un sensibile errore, alloraquando si tratta del livello di due punti che tra loro abbiano una insensibile distanza per rapporto alla circonferenza della terra, onde è che da esse si può prescindere nelle pratiche livellazioni. Ma i principj, che possono valere nel caso di due punti poco tra loro distanti, non possono assumersi per determinare quale debba essere la costituzione generale delle acque marine, e tanto più quanto che oltre alle cagioni indicate di alterazione del supposto livello del mare altre ne sono, le quali sebbene per un certo riguardo possano dirsi estranee, nulladimeno attesa la loro costanza, variata però in diversi siti e tempi, e nella efficacia della loro azione, vogliono riguardare come intrinseche alla reale costituzione del mare medesimo. Tra queste cagioni sono 1. la svaporazione più copiosa che in certe parti della superficie marina interviene in un dato tempo, a motivo della quale può in quella estensione diminuirsi di più l'altezza dell'acqua senza che per l'espansione naturale del rimanente venga nel tempo stesso ristabilita la precedente altezza. 2. L'influenza di copiosi fiumi, le cui acque richiedo-

no un certo tempo per diffonderſi equabilmente in tutta l'eſtenſione del mare; e ſiccome quelle ſono continue, così devono mantenere la ſuperficie del mare più elevata a miſura che è più vicina al loro sbocco 3. La diverſa denſità che le acque marine hanno in diverſi ſiti, la quale è varia per diverſe cagioni, e maſſime pel calore, e per la maggiore, o minore quantità di materie ſaline che tiene ſciolte. 4. Le anguſtie degli ſtretti di mare e gli avanzamenti di terra ferma, per cui le acque ſoffrono maggiori reſiſtenze all'equabile loro diffuſione. 5. Il fluſſo, e rifluſſo. 6. I venti, per cui le acque ſi accumulano nella direzione, in cui quelli ſpirano, e col ceſſare di queſti ritrocedono formando una corrente. Queſte ed altre cagioni fanno che ſebbene il mare tenda continuamente a metterſi in equilibrio, pure queſto rimanga in diverſe parti sbilanciato. Onde vi hanno luogo diverſi moti, e correnti, per cui eſſo ſi può riguardare come un compleſſo di fiumi a ſponde mobili formate da quella porzione di acqua, che rimane o ſtagnante, o con inſenſibile moto.

CAPO VI.

Sulle Paludi.

48 Le paludi ſono tratti di terra miſti con acqua, che non hanno nè la conſiſtenza di terra, nè la fluidità propria dell'acqua. Queſte formano vaſte pianure, maſſime colà dove intervengono interrimenti prodotti da materie traſportate o da' fiumi, o dal mare.

49 Le più celebri paludi d'Europa ſono quelle della Moſcovia in vicinanza del Tanais, e quelle di Savolax, ed Enaſak nella Finlandia. Grandi paludi ſono pure nella provincia di Lincoln lungo il mare, e nella Scozia allo sbocco del fiume Neſſ. L' Ingria è parimenti occupata da paludi, che verſo il Baltico formano una ſpecie di golfo, d'onde ſi comincia ad aſcendere all'alto paeſe della Ruſſia. Nella Veſtfalia, e in diverſe parti de' Paeſi baſſi le paludi ſono frequenti, e tutta l' Olanda ſarebbe una palude ſe l' induſtria non preveniſſe le inondazioni.

50 Nell' Asia tra le principali paludi sono quelle dell' Eufrate, e della Tartaria, e la Meotide. Avvene parimenti in Africa, ma l' America è in gran parte quasi come una continua palude. Tale nell' America meridionale è la Gujana nell' estensione di 120 leghe, cioè dallo sbocco del fiume Cajenna sino a quello delle Amazzoni, il qual tratto è a livello del mare e per fondo ha una fanghiglia. Anche al piede delle Cordilliere e nelle vaste pianure di Buenos-aires sono molti bassi terreni esposti alle inondazioni, ed a ristagni d' acque (*a*). Ma l' America Settentrionale, ove i paesi piani sono in maggiore quantità che gli elevati, è nella massima parte de' terreni non montuosi occupata da paludi. Così è sulle basse coste orientali che si stendono da Honduras, e bordano l' Yucatan ed il Golfo del Messico, portandosi poi verso la Luigiana, e la Florida, come pure sulle coste situate quasi a livello del mare che stendonsi lungo il canale di Bahama sino alla nuova Inghilterra. La Florida, ed i terreni, che di là si stendono verso il Nord, compresa la nuova Inghilterra sino al fiume S. Lorenzo, sono paesi piani, che per più leghe si stendono sino ai monti detti *Apalaches*. All' Havana, ed al lato detto Caies, e nelle baje di Pansacola, e di Luigiana i terreni dalle maree sono sommersi a grande distanza; ed all' imboccatura del Missisipi l' inondazione del mare si stende sino alla distanza di 15 leghe (*b*). In questi, ed altri paesi piani, su cui le maree si estendono, l' acqua sempre ristagna a più o meno altezza, e forma terreni paludosi.

51 Le cagioni d' onde le paludi derivano si possono ridurre alle seguenti, cioè l' elevazione o anche l' abbassamento delle acque marine, le escrescenze de' fiumi, le sorgenti, e le acque piovane. Affinchè però queste cagioni producano l' impaludamento di un dato terreno conviene che questo manchi di quella elevazione, e pozione che lasci luogo allo scolo delle acque che vi pervengono.

(*a*) Ulloa. Memoires philosophiques.
(*b*) Ulloa l. c.

CAPO VII.

Su i varj movimenti del mare.

52 I principali movimenti del mare, che o si conservano o si alternano con una certa costanza, si riducono ai seguenti. Il primo è un moto generale, che le acque marine sotto all'equatore, ed a qualche distanza da ambe le parti del medesimo conservano da oriente verso occidente: il qual moto forma quasi una lenta corrente atta a far tre leghe in ventiquattro ore (*a*).

53 Tra l'Africa e l'America il mare ha una corrente verso il nord-ovest, per cui quel tratto si può quasi riguardare come un vastissimo fiume. Altre correnti sono pure nell'Atlantico, tra le quali le principali sono presso la Guinea, ed hanno una direzione da occidente in oriente, cioè contraria al moto generale delle acque sotto all'equatore: esse però si stendono solo a 20 leghe di distanza dalle coste.

54 Dalla Gujana alle Antille sono correnti così veloci che coi venti appena si possono superare, quando che in cinque o sei giorni si perviene dalla Gujana alle Antille andando a seconda del loro corso. Questa rapidità di corso fece credere a *Cristoforo Colombo* che il mare colà ascendesse, ed il Sig. *Conte di Buffon* riguardando l'opinione di quello scopritore di nuovo mondo come un errore a que' tempi escusabile attribuisce tali correnti alla velocità de' molti fiumi influenti nel mare la quale si conservi, e si comunichi alle acque marine anche in molta distanza. A ben considerare però l'influenza di que' fiumi, i quali per se non sono molto veloci, ma però copiosi di acque per la ragione sopra arrecata (§. 47), deve mantenere fino ad una certa distanza dalle coste le acque assai più elevate, e produrre per conseguenza rapide correnti; ed in ogni modo è manifesto, che l'acqua di una continua corrente deve verso l'origine del suo corso avere una maggiore elevazione; onde è anzi erro-

---

(*a*) *Soncrat* Voyag. aux Ind. Orient.

re inescusabile in ogni secolo il riguardare come falsa l'accennata opinione del *Colombo*.

55 Tra le correnti alcune hanno una direzione alternativa, cioè ora tengono una direzione, ed ora un'altra contraria. Così alle Maldive, e tra mezzo a tutte le isole del mare delle Indie le correnti vanno come i venti, cioè a dire per sei mesi sono dirette da oriente in occidente, e per altri sei mesi vanno in contraria direzione.

56 In alcuni siti trovansi anche due, o più correnti opposte, e ciò in due modi, in quanto che talora una è a fianco dell'altra, ovvero l'una è al di sotto dell'altra. Le correnti laterali opposte osservansi spesso anche nei laghi, e nei fiumi massime lungo le rive. Il *Conte Marsigli*, e prima di lui *Procopio* riconobbe simili correnti al passaggio dei Dardanelli, altre pure ne osservò al canale di Costantinopoli. Parimenti allo stretto di Gibilterra entra dall'Oceano una corrente verso la costa d'Africa, e va proseguendo per tutte le coste del Mediterraneo sortendo dal medesimo stretto sulla costa d'Europa. *(a)* Le correnti soprapposte furono diligentemente riconosciute dal Sig. *Des landes* nelle vicinanze del Capo Gonsalves, e di S. Catterina verso la Guinea in Africa. Egli alla distanza di sette leghe da terra trovò in un'altezza d'acqua di 50 braccia francesi varie correnti contrarie, la cui velocità era di mezza lega, ed anche di una lega per ora. Queste però non sono permanenti, giacchè nel corso di due mesi e mezzo, in cui continuò le osservazioni, solo si manifestarono per lo spazio di un mese in diversi tempi, e nelle interruzioni la marea discendeva totalmente nel golfo della Guinea.

57 Le cagioni delle correnti sono in gran parte quelle stesse, che impediscono nel mare un esatto livello, ed equilibrio. Tali cagioni in diversi tempi, ed in certi tratti di mare producono nell'acqua una maggior elevazione, e pressione, per cui prevale in forza, e prende un certo corso; e dagli ostacoli che nel suo corso incontra, e dagli stretti, per cui

(a) V. sulle Correnti l'opera di M. *Marcadier*.

cui deve paſſare, è determinata a prendere una direzione anzi che l'altra. Se avvenga che l'acqua nella direzione principale incontri qualche oſtacolo, eſſa ſi riflette, e per tal rifleſſione ſi ha nella prima corrente la cagione di altra contraria. Le correnti indicate tanto più facilmente devono intervenire colà dove vaſti mari comunicano per uno ſtretto anguſto, come ſono l'Oceano, ed il Mediterraneo, onde non oſtanti i dubbj del Sig. *de Buffon* (*a*) non può negarſi ciò che molti hanno ſcritto, cioè che allo ſtretto di Gibilterra ſieno correnti contrarie.

58 Da cagione del tutto particolare dipende un altro moto del mare conſiſtente nel fluſſo, e rifluſſo. L'attrazione della Luna è il principale agente. L'effetto è di far per un certo tempo rialzar il mare in una certa eſtenſione, dopo del qual tempo torna ad abbaſſarſi. Le maree che per queſto moto vengono prodotte ſi diffondono maſſime dall' Oceano, e rieſcono più o meno ſenſibili in altri mari ſecondo che è più o meno ampia la comunicazione che queſti hanno con quello: onde è che nel Mediterraneo, e nel Baltico non ſono molto ſenſibili; eſſe inoltre in circoſtanze eguali giungono più tardi nei ſiti più lontani. La loro altezza in diverſi ſiti è varia. La media è di circa 15 piedi, ma per l'anguſtie degli ſtretti, e per oppoſizione degli ſporgimenti di terra ferma talora ſi alzano con violenza ſino a 100, ed anche 200 piedi (*b*).

CAPO VIII.

Su i cangiamenti di mare in terra, e di terra in mare.

59 Egli non è da dubitare, che le acque ſieno un tempo pervenute ſino alla ſommità de' più alti monti. Una pruova convincente ſi preſenta nelle conchiglie, ed altri corpi

(*a*) Hiſt. nat. Vol. I.

(*b*) *Pallas* obſervat. ſur la formation des montagnes pag 43. ſul fluſſo V. *la Lande* Aſtronomie lib. XXII. dell' ediz. 2.

marini, che trovanſi ſino all'altezza di 2200 teſe ſopra il livello del mare preſente; la quale altezza nel generale dei monti è tra le maggiori. Ed è bensì vero, che ſonovi alcuni monti, i quali ſono ſuperiori di circa 1000 teſe all'indicata altezza, ma è facile ad attenderſi che le acque dovettero avere una elevazione molto maggiore di quella in cui trovanſi que' corpi marini. Queſti per lo più ſono ſparſi, ed inſeriti dentro a materie calcaree al preſente indurite in pietra, le quali in origine dovettero eſſere ſtemprate, e ſoſpeſe nell'acqua, da cui finalmente ſi ſepararono per depoſizione. Ora affinchè le acque poteſſero depoſitare in que' elevati ſiti gl' indicati corpi eſſe dovevano eſſere aſſai più elevate; dovettero cioè que' luoghi eſſere come fondi di mare, e ſiccome al preſente le acque del mare ſono generalmente elevate ſul fondo circa 1000 teſe, così d'altrettanto dovettero allora eſſere elevate al di ſopra delle depoſizioni che laſciarono.

60 Tra queſte propoſizioni, le quali hanno tutta l'apparenza di veriſimiglianza, alcune certamente avrebbero biſogno di pruove per eſſere ridotte ad una certa evidenza: queſte però, ſiccome dipendono da altri principj non ancora da me ſtabiliti, perciò io riſervo ad altro luogo.

61 Tra queſti è la determinazione del modo, con cui le acque pervennero all' indicata altezza di 2200 teſe, ed anche maggiore, e due ſono le maniere, con cui potettero pervenirvi. Primamente ſi può ſupporre che la terra ferma in origine foſſe occupata dalle acque, e che quelle vi ſieno rimaſte per lungo tempo, nel corſo del quale ſi ſieno poco a poco ritirate, ed abbaſſate ſino al livello preſente. In ſecondo luogo ſi può dire che anteriormente all'accennata elevazione delle acque il mare foſſe molto più baſſo di livello, e che per una ſtraordinaria inondazione ſianſi rapidamente elevate, e quindi in breve tempo ritirate. La prima maniera riduceſi ad una tranquilla e permanente, la ſeconda ad una ſtraordinaria e paſſaggera inondazione.

62 Il Sig. Conte di *Buffon* ſi ſtudiò di dare alla prima tutte le più efficaci pruove; e ſe quella aveſſe avuto luogo, ne ſeguirebbe in riguardo all'oggetto preſente, che la terra ferma ora abitata dall' uomo ſarebbe dovuta ad un ſucceſſivo cangiamento di mare in terra.

63 Ma a ſuo luogo ſarà dimoſtrato, che le pruove di quella ipoteſi ſono appoggiate a falſe oſſervazioni, e che realmente intervenne una ſtraordinaria, e paſſaggera inondazione: nel qual avvenimento intendeſi che la terra fu ſoggetta a due rapidi cangiamenti, l'uno di terra in mare, e l'altro di mare in terra.

64 Queſti cangiamenti però furono generali a tutto il globo, ed ebbero ſingolari cagioni. Ma oltre a queſti ſonovi de' cangiamenti parziali derivanti da generali cagioni, e di queſti, i quali poſſono eſſere oggetto di oſſervazioni locali, è qui luogo di parlare.

65 In tale propoſito comincierò a dire di que' cangiamenti, che ſono confermati da fatti ſtorici, o da poſitive oſſervazioni, quindi ne eſporrò le diverſe cagioni, e finalmente eſaminerò ſe certe mutazioni da altri congetturate o immaginate ſieno conformi al vero.

66 Tra i cangiamenti di terra in mare ſi rammemorano dal Sig. Conte di *Buffon* i ſeguenti. L' iſola di Ceylan dal lato di nordoveſt ha perdute 30 a 40 leghe di terreno che furono occupate dal mare. Il mar Baltico ha guadagnato poc' a poco una conſiderabile parte della Pomerania, ed ha coperto, e rovinato il famoſo porto di Vineta. Il mar di Norvegia ha formate varie piccole iſole, e ſi è avanzato nel continente. Un avanzamento verſo l' Olanda preſſo di Catt ha pure fatto il mare di Alemagna, così che le ruine di un' antica cittadella de' Romani, che già era ſulle coſte, ora ſono molto addentro nel mare. Nell' anno 1446 una grande inondazione fece perire più di 10 mila perſone nel territorio di Dodrecht, e più di cento mila nella Friſia, e nella Zelanda, nelle quali due provincie furono ſommerſi circa 300 villaggi, le torri dei quali ſpuntano ancora colle loro ſommità fuori dell' acqua. Le terre di Godwin nell' Inghilterra, che erano coltivate, ora ſono ſabbie coperte dal mare. Platone nel Timeo racconta che gli antichi ſacerdoti dell' Egitto (600 anni avanti l' era criſtiana) aſſicuravano, che preſſo le colonne d' Ercole era un' iſola detta Atlantide più grande dell' Aſia, e della Libia preſe inſieme, e che queſta per un grande tremuoto fu ſobbiſſata, ed inondata dal mare per un' alluvione che durò un giorno, ed una notte.

Su di ciò il Signor *de Buffon* osserva che queste terre sommerse sono forse quelle che univano l' Irlanda colle Azorie, e queste al continente dell' America: giacchè in Irlanda trovansi gli stessi fossili, e le stesse conchiglie, e produzioni marine che sono nell' America, delle quali alcune sono diverse da quelle che osservansi nel resto d' Europa.

67 Più copiose, e certe sono le mutazioni di mare in terra, attesa la grande moltitudine di fiumi che ai loro sbocchi in mare conducono immensa quantità di materie terrestri ricolmandone i vicini fondi, e rialzandone le spiagge. L' isola di Faros, che secondo *Omero* era distante dall' Egitto il cammino di 24 ore, al presente vi è quasi contigua a motivo de' prolungamenti delle spiagge prodotte dal Nilo. Il terreno d' Olanda che ora è quasi a livello del mare, e che secondo *Buffon* altre volte in diversi siti era più basso di circa 50 piedi, fu pure sottratto al mare per mezzo degl' interrimenti condottivi dalla Mosa, dal Reno, e da altri fiumi. Il Missisipi al di sotto della nuova Orleans formò una vasta punta di sabbie e terre, che già fu osservata dal *P. Charlevoix* (Voy. p. 440. t. 3.), il quale aggiugne che allo sbocco di altro fiume dell' America vide arrestarsi gli alberi in grandissima quantità, i quali ricoperti di fanghiglia non solo mutano il mare in terra ferma, ma dopo dieci anni lo popolano di boschi che germogliano dagli alberi seppelliti. Un simile trasporto di alberi ha ricolmato alla profondità di 50 piedi e più un tratto di mare vicino a Bruges nelle Fiandre, ed un altro a Youl nella provincia di Yorck. Ma non è necessario aggiugnere esempj di cangiamenti di mare in terra prodotti da interrimenti de' fiumi. La cosa è manifesta dalla fisica costituzione de' fiumi, e può essere da ognuno verificata in qualunque fiume che sbocchi non solo in mare, ma in qualunque lago: e se il prolungamento delle spiagge agli sbocchi talora non è molto sensibile, ciò deriva massimamente dall' azione delle acque marine, le quali corrodono le spiagge stesse, e trasportano altrove le materie depositatevi. Dai trasporti delle terre depositate dal Pò al suo sbocco è probabilmente stata aumentata la spiaggia di Ravenna, che ora non è più città marittima, sebbene già v' esistesse un porto degli Esarchi.

68 Nella provincia di Kent nell'Inghilterra un porto di mare a Hith si è ricolmato di sassi, conchiglie ec. non ostanti le diligenze e premure per tenerlo espurgato. Parimenti la gran palude di Lincoln, e l'isola d'Ely si riguardano come terre abbandonate dal mare. *Uberto Thomas* nella descrizione del paese di Liegi scrive, che il mare al presente è distante 35 leghe dalla città di Tongres, quando che gli anelli esistenti nelle mura di quella città destinati ad attaccarvi le navi pruovano che le acque giugnevano fino alle mura stesse. *M. Barrere* (presso *Buffon* t. 1. p. 597.) scrive che Aigues-mortes era un porto ai tempi di S. Luigi Re di Francia, e che ora è distante dal mare più di una lega e mezza. Parimenti Psalmodi era un'isola nell'anno 815, ed ora è in terra ferma in distanza di più di due leghe dal mare. Lo stesso è di Maguelone.

69 Sonovi pure de'terreni, i quali alternativamente sono coperti di acqua, e scoperti: nel qual caso sono varie isole della Norvegia, della Scozia, e delle Maldive, come pure al golfo di Cambaje ec. Questa alternativa dipende dalle escrescenze de' fiumi, ed anche del mare, le quali in certi tratti intervengono o per l'azione dei venti, o pel flusso, e riflusso.

70 I cangiamenti esposti sono una minima parte di quelli che devono essere realmente accaduti; e molte pur sono le cagioni che possono, e sogliono concorrere a questi effetti, le quali io qui verrò esponendo, e serviranno anche alla spiegazione di que' fatti, che dagli Storici furono raccontati senza esporne le circostanze.

71 Un tratto di terra può divenir mare 1. se l'acqua si alza di livello. 2. se quel tratto di terra si abbassa al di sotto del livello precedente del mare. 3. per corrosioni operate dalle acque marine.

72 L'alzamento di livello può essere prodotto 1. da aumento dell'acqua marina. 2. da diminuzione del recipiente dell'acqua stessa, la qual diminuzione può provenire o da rialzamento del fondo, o da ristringimento delle sponde del recipiente.

73 L'abbassamento dei terreni non di rado accade, e ciò per più motivi, cioè 1. per tremuoti. 2. per cedimen-

ti ſotterranei. 3. per riſtringimento della materia terreſtre in altezza, come avviene nei terreni torbivi. 4. per corroſioni prodotte in ſuperficie dalle acque marine, e dai fiumi. 5. per detrazione di terre, e ſabbie operate dai venti.

74 Le corroſioni operate dalle acque marine provengono dai diverſi moti che quelle hanno, e che più ſopra furono eſpoſti.

75 Tutte le cagioni che nei §§. 71 72 73 ho accennate come atte a produrre cangiamenti di terra in mare hanno realmente luogo in diverſi ſiti e tempi, eccetto quella che conſiſte nell' aumento dell' acqua marina, giacchè, come più ſotto ſarà provato, ſembra anzi che queſta tenda a diminuirſi.

76 Dalle cagioni ſteſſe per contraria ragione ſi poſſono rilevare quelle, per cui alcuni tratti di mare ſi poſſono mutare in terra ferma. Queſto può intervenire 1. ſe il mare ſi abbaſſa di livello. 2. ſe un tratto di terra, che per innanzi era più baſſo di livello del mare, ſi alza al di ſopra del medeſimo.

77 L' abbaſſamento di livello nel mare può intervenire 1. per diminuzione della maſſa acquea. 2. per aumento del recipiente. 3. per l' una, e l' altra cagione inſieme.

78 Al rialzamento di un tratto di terra poſſono concorrere 1. gl' interrimenti prodotti dalle materie terreſtri, che i fiumi continuamente conducono al mare. 2. le ſabbie, e terre che dai venti vengono traſportate e depoſitate ſulle ſpiagge marittime. 3. le materie che il mare traſporta, e depoſita in certi ſiti. 4. le eruzioni vulcaniche. 5. gli aumenti della vegetazione intervenienti maſſimamente nelle vaſte torbiere, quali ſono nei Paeſi baſſi.

79 I depoſiti delle materie traſportate dal mare ſi fanno maſſimamente colà dove le maree, le correnti, ed altri movimenti del mare o ſi rallentano, o s' incontrano in contrarie direzioni (*a*).

(*a*) All' incontro delle maree oppoſte, che depongono ſabbie, e fanghiglia, meritamente attribuiſce il Sig. Ab. *Mann* la formazione dei banchi eſiſtenti ſulle coſte dell' Olanda, e del gran Banco chiamato Doggers-banc, che trovaſi tra l' Inghilterra e l Jutland, e che traverſa quaſi tutto quel mare. Mem. de l' Acad. R. I. de Bruxelles t. 2.

80 Tra le cagioni esposte come atte a produrre un cangiamento di mare in terra ferma alcune richiedono qualche dichiarazione. Primamente è da vedere quali sieno le cagioni, per cui debba intervenire una diminuzione nella quantità delle acque marine. Una di queste è l'aumento de' ghiacci sì alpini, che polari. I ghiacci alpini sono formati da vapori acquei, che in massima parte si alzano dal mare, e che alle alpi si mutano in nevi, e ghiacci, di cui una considerabile porzione vi si perpetua, e non più ritorna al mare. I polari in parte sono formati in simile maniera, ed in parte dall' immediato agghiacciamento dell' acqua marina. Per lo che i ghiacci alpini sono una reale sottrazione di acqua del mare, per cui questa deve diminuire di altezza; ma i polari sebbene la diminuiscano nella massa in quella porzione, che rimane perpetuamente agghiacciata, pure non vi producono una diminuzione d'altezza proporzionata alla massa sottratta: perciocchè di questi ghiacci una porzione occupa nel mare press' a poco quello stesso sito che per innanzi vi occupava in forma di acqua, e però non devono produrre in esso una diminuzione di altezza se non per riguardo a quella loro porzione che galleggia fuori dell' acqua, e la quale si aumenta, come dissi, nello stesso modo che interviene nei ghiacci alpini.

81 Un' altra cagione della diminuzione dell' acqua marina è che una porzione considerabile di questa si combina nella formazione, ed aumento dei corpi organizzati, cioè degli animali, e vegetabili viventi massimamente in mare; e sebbene quella in gran parte nuovamente se ne separi, massime dappoichè hanno cessato di vivere, pure una considerabile porzione rimane combinata coi residui terrei de' corpi medesimi. Ciò vedesi nei vegetabili anche terrestri i quali risolvonsi in una terra che sempre contiene acqua: e che continuamente aumenta la massa terrea. Lo stesso massimamente si riconosce nelle conchiglie, nei coralli, ed altri litofiti, li quali anche dopo la morte de' loro abitatori ritengono la natura di terra combinata con acqua: ma perciocchè questi corpi marini rimangono sempre nel mare, ed in questo entrano continuamente materie terrestri rimaste dai vegetabili, ed animali scomposti, perciò la diminuzione del-

le acque marine proveniente dalla combinazione di esse coi corpi organizzati non deve produrre una diminuzione nell' altezza delle medesime, giacchè il volume d'acqua sottratta al mare per l'accennata combinazione è compensato abbondantemente dal volume dei loro residui che o continuamente rimangono, o successivamente entrano in mare.

82 Quanta sia la diminuzione interveniente nell'acqua marina non è determinabile. Qualunque però sia, essa deve avere certi limiti, giacchè tal diminuzione proviene massimamente dall'aumento de' ghiacci; e l'aumento di questi, come fu provato, ha certi limiti. Oltre a ciò l'aumento dei ghiacci alpini concorre in parte all'aumento delle acque de' fiumi che ritornano al mare, così che per questo titolo la diminuzione dell'acqua marina riesce minore.

83 Quanto all'aumento del recipiente delle acque marine, quello può intervenire per abbassamento del fondo del mare, il quale accaderebbe quando al di sotto di esso esistessero delle cavità, e si aprisse una comunicazione tra esse e le acque del mare. Che molte cavità esistano nella massa terrestre è da me altrove provato; e che tra queste ed il recipiente del mare si aprano di quando in quando nuove comunicazioni è facile a conghietturarsi dalle varie cagioni che possono operare tal effetto. Tra queste sono i tremuoti, le eruzioni vulcaniche, la continua pressione, ed azione delle acque marine, la quale può rompere le pareti, che cuoprono quelle cavità, alloraquando quelle sieno divenute di poca consistenza.

84 Finalmente l'effetto dei venti nel trasporto delle minute sabbie e terre si riconosce in molte spiagge esposte a forti venti. Nell'Olanda veggonsi in tal modo formate molte collinette, che *Dune* si chiamano; nella Francia in vicinanza della città di S. Paolo di Leon dopo il 1665 fu abbandonato un tratto di terra a motivo delle copiose sabbie, che vi si accumularono sino a coprire i camini delle case: l'origine del qual danno è una spiaggia coperta di sabbie (a) che si stendono da S. Paolo sino a quattro leghe, e che

(a) Acad. R. des Sciences an. 1722. Nei deserti vedesi anche più sensibilmente l'accennato effetto dei venti sulle sabbie. Il Sig. *Volney* ne' suoi

e che dai venti vengono trasportate, e dai depositi di mare sono continuamente rinnuovate. Finalmente sulle coste occidentali sì della Francia, che della Spagna e dell' Africa i venti di ovest spesso formano simili ammassi di sabbie.

85 Dalle cose esposte è manifesto, che alcune cagioni tendono ad aumentare la terra ferma, altre a diminuirla, mutandola in mare; altre finalmente tendono a produrre simultaneamente e reciprocamente ambedue questi generi di cangiamenti. In questa classe sono gl' interrimenti provenienti dai fiumi, giacchè nel mentre che quelli vanno ad occupare una parte dell' alveo marino, e rialzandola al di sopra del precedente livello delle acque, la mutano in terra ferma, fanno rialzare le acque stesse, e le obbligano ad inondare altrove quelle spiagge che per innanzi erano più elevate del mare, ma che per l' indicato rialzamento di questo divengono al medesimo inferiori. Un simile effetto producono anche le materie corrose, e trasportate dall' acqua marina, le quali riducono la terra in mare nei siti d' onde la trasportano, e mutano spesso il mare in terra nei siti dove la depositano.

86 Quindi per determinare in generale se la terra ferma siasi aumentata o diminuita, e quale di questi due generi di cangiamenti sia per prevalere nella successione de' tempi, converrebbe conoscere in particolare l' effetto di ciascuna delle esposte cagioni, e quindi determinare la differenza tra gli aumenti e le diminuzioni: il che, attesa la vastità del globo terracqueo, la irregolarità della sua superficie, e la moltiplicità delle variazioni di cui per un dato tempo dovrebbesi tener conto, è cosa superiore alle osservazioni ed alle teorie. E quando pure si pensasse ad avere qualche precisa determinazione su tali cangiamenti sarebbe prima di tutto necessario che molti osservatori in diversi siti fissassero sulla terra ferma certi punti per poter da questi riconoscere se nel mare in un certo tempo intervenga una permanente mutazione nell' altezza del suo livello.

viaggi per l' Egitto nota, che nel deserto d' Africa adjacente all' Egitto sorgono colline di sabbia formate dai venti a tale altezza, che sommergono gli alberi di Palme.

87 Esaminando ora i cangiamenti sopra esposti, ed altri simili, che alle storie, o alle osservazioni sono appoggiati, facilmente si ritroverà la loro cagione riposta in alcune di quelle che sopra accennai, e massimamente negl' interrimenti provenienti da' fiumi, e nelle corrosioni fatte dalle acque marine.

88 A determinare però quale cagione abbia realmente influito in un dato cangiamento converrà esaminarne le circostanze particolari, le quali per altro dagli Storici sogliono essere ommesse. Così per distinguere se un interrimento sia provenuto dai fiumi o dal mare servirà spesso l' esame delle materie depositate, le quali, se conterranno copiose conchiglie marine in istato naturale, indicheranno che la deposizione fu operata dal mare; in questo caso è il soprannominato porto di Hith nell' Inghilterra. Dall' esame delle circostanze parimenti dipenderà il riconoscere come sia intervenuto il sobbissamento di que' 300 villaggi che sopra accennai, e se questo, ed altri simili accidenti, che nell' Olanda, e nei Paesi bassi non sono rari, sieno provenuti da abbassamento di terreno, o da rialzamento permanente del mare. Esaminando quelle basse, e vaste pianure vedesi in esse manifestamente che sono soggette ad abbassarsi. Que' terreni per la maggior parte sono composti o di sabbie mobili, e poco consistenti, ovvero di torbe molli, e soffici (a). Le sabbie pel continuo disseccamento divengono sempre più cedevoli, e meno consistenti; la torba, quando si dissecca, ristringesi circa di un terzo. Essendo pertanto sì le une che le altre riducibili in minor volume, esse per il loro proprio peso si vanno comprimendo, ed abbassando, e con esse si abbassano anche gli edifizj soprappostivi, come sono le case, e gli argini. Quindi se il mare si va poc' a poco stendendo su quelle basse spiaggie, e se va diminuendosi la distanza verticale tra la superficie del mare e la sommità di quegli edifizj, come realmente in alcuni siti interviene, ciò deve ascriversi al successivo abbassamento de' terreni, e degli edifizj medesimi. Che se avvenga che per una straordinaria escrescenza del mare,

(a) *De Luc* Lettres Physiques ec. tom. 4. & 5.

che ſuol procedere da qualche furioſa tempeſta accompagnata da una forte marea, le acque inondino ad una certa altezza que' terreni, allora per il peſo delle acque ſteſſe compremeſi rapidamente ed a molta profondità il terreno ſottopoſto, e talora viene così abbaſſato al di ſotto del livello ordinario del mare, e perciò il ſobbiſſamento rimane coſtante anche dopo di eſſere ceſſata la ſtraordinaria inondazione: in tal maniera deve eſſere intervenuto il ſopraccennato ſobbiſſamento, come pure la formazione del golfo Zwyder-ſee accaduta nel 1222 (*a*). All' abbaſſamento di que terreni dee pur concorrere un' altra cagione; e queſta è ripoſta nella infiltrazione delle acque, che per vie ſotterranee ſi ſcaricano in mare, le quali devono formarvi continue, e frequenti corroſioni, e laſciarvi molti ſpazj vuoti, e così laſciar luogo a continue depreſſioni del terreno. Certamente i ſopraccennati effetti non poſſono aſcriverſi a rialzamento del livello del mare, giacchè, ſe queſto foſſe reale, dovrebbe oſſervarſi egualmente anche nelle vicinanze di quelle baſſe ſpiagge. Ma dove il terreno è fermo, non ſi riconoſce veruna mutazione di livello; e dove è cedevole, l' apparente elevazione è varia in varj ſiti cioè ſecondo che il terreno più o meno ſi abbaſſa. Gli accennati ſobbiſſamenti non ſono dunque argomento di elevazione coſtante di livello del mare, anzi devono eſſere accompagnati da un abbaſſamento generale di livello, il quale per altro non può eſſere che inſenſibile, cioè proporzionato alla eſpanſione delle acque marine di que' tratti di terra inondati, che ſono aſſai piccoli in confronto della ſuperficie del mare.

Cc ij

(*a*) Il livello del mare lungo i Paeſi Baſſi è variabile a motivo delle maree: la qual variazione nella Fiandra marittima è di piedi $17\frac{1}{2}$, eſſendo di altrettanto la differenza tra le alte e le baſſe maree: altronde que' paeſi in diverſe parti declinano dalle dune verſo l' interno de' medeſimi; così per eſempio quaſi tutta la Fiandra marittima (tom. 2. Ac. R de Brux.) in una eſtenſione di circa 5 leghe in diſtanza dal mare trovaſi nelle parti più baſſe sei fino a nove piedi al diſotto del livello delle alte maree, quando che in vicinanza delle dune è circa tre piedi più elevata del livello medeſimo. Da che tanto più finalmente intendeſi, come dopo certe ſtraordinarie eſcreſcenze poſſano eſſere rimaſti coſtantemente inondati alcuni tratti di que' paeſi.

89 In simile modo si riconoscerà che l'essersi trovati a Venezia due pavimenti uno sopra l'altro, dei quali uno era al di sotto del livello del mare, è argomento anzi di abbassamento di terreno che di elevazione del mare: giacchè è manifesto che quella città è fondata su un terreno paludoso, e cedevole.

90 Peraltro tra le storie dei cangiamenti sopra esposti alcune ne sono, le quali non hanno quella certezza che il Sig. *de Buffon* facilmente vi suppose. Così il ritiro del mare da Tongres, e gli anelli residui in muri vicini a quella città dopo l'esame fattone sopra luogo dal Sig. *de Luc* (*a*) devonsi annoverare tra le vane credulità di quel popolo. Parimenti il sobbissamento dell'Atlantide non è riportato con dettagli sufficienti a poterne formare una chiara idea.

91 E' ora da vedere quanto sieno da valutare i grandi cangiamenti di mare, che il Sig. Conte *de Buffon* stima di aver rilevati non da storie, ma dai monumenti molto più autentici di natura. Egli, che molto osservò sulle carte geografiche, vuole primamente che tra i tropici sieno state corrose le coste orientali dei continenti per una estensione di circa 500 leghe. In pruova di che assume il moto del mare da oriente in occidente prodotto massime dalla rotazione del globo intorno al suo asse, come pure le ineguaglianze della superficie terrestre, le quali egli dice essere maggiori tra i tropici che altrove. Parimenti egli stima che i principali seni e stretti di mare sieno diretti da oriente in occidente, e che perciò essi sieno stati scavati dall'azione delle acque marine in virtù del loro moto poc'anzi indicato.

92 Questi fatti però, che egli adduce per provare la corrosione delle coste orientali, e la scavazione dei principali seni e stretti di mare, o non sono veri, o non provano il suo assunto. Primamente non vedesi come tra i tropici esistano le maggiori ineguaglianze del globo. In questo tratto stendesi nel mare una parte dell'America, dell'Africa, e dell'Asia, e sono sparse molte isole. Ora se per maggiori ineguaglianze intende una maggiore quantità di corrosioni,

(*a*) *De Luc*. l. c.

questa non può comprovarsi se non dall'esistenza di una maggiore quantità di mare in confronto della terra ferma: ed in tal modo dovrebbero riguardarsi come maggiori le ineguaglianze che esistono fuori dei tropici, e che sono contenute tra il polo australe ed il tropico del capricorno, giacchè in questo tratto l'estensione del mare in confronto della terra ferma è molto maggiore di quel che sia tra i tropici. Che se per disuguaglianze maggiori intende una maggiore irregolarità nel contorno dei continenti e nelle isole, difficilmente la cosa sotto tale aspetto potrà estimarsi, ed in ogni modo le disuguaglianze in questo senso appariranno maggiori tra il polo boreale ed il tropico del cancro, che tra i tropici. Se finalmente si estimano le maggiori ineguaglianze dalla maggiore quantità di montagne, com'egli sembra fare (pag. 585. t. 1. Hist. Nat.), neppure in questo senso la sua proposizione può aver luogo: giacchè è bensì vero, che le più alte montagne sorgono in vicinanza dell'equatore; ma se dal tropico del cancro verso il polo boreale si prende una zona di circa 47 gradi, cioè eguale al numero di gradi della zona contenuta tra i due tropici, si troverà che in quella esiste una quantità di monti maggiore che in questa. Non si può adunque ammettere, che le principali diseguaglianze del globo sieno tra i tropici. Ma neppure è vero, che i principali seni, e stretti di mare sieno diretti da levante a ponente. I seni da lui rammentati sono quelli di Magellan, e di Hudson, ed i due di Forbisher; gli stretti sono quelli di Ceylan, di Corea, e di Kamtschatka. Ora questi, per quanto rilevasi dalle carte geografiche, non sono certamente nella direzione di levante a ponente: e quand'anco lo fossero, non servirebbero al suo intento, giacchè quasi tutti sono fuori dei tropici, cioè fuori di quella zona, dentro la quale egli ripone la cagione dell'escavazione de' seni, e stretti nella supposta direzione; ed è pure da osservare che anche altri dei principali stretti, come quelli di Gibilterra, e del mar Baltico, non solamente sono fuori dei tropici, ma inoltre sono scavati in direzione contraria alla da lui supposta, essendo la loro apertura manifestamente situata sulle coste occidentali.

93 Venendo ora al moto del mare da oriente in occi-

dente, questo certamente esiste, ma non può aver prodotto gli effetti che il Sig. *de Buffon* gli ascrive, mentre quello stendesi a poca distanza dall equatore, ed è così piccolo che fa solamente tre leghe in 24 ore. Oltre a che dal trovarsi corrose le coste orientali non può, come egli fa, assumersi quel moto come cagione di tal corrosione, giacchè noi troviamo molto corrose anche le occidentali. Che anzi se quelle coste devono riguardarsi come più corrose, le quali sono più ripide, e sono in maggior vicinanza delle montagne, noi dovremo dire che le occidentali sieno state più corrose delle orientali. Certamente occidentali sono le coste d' America, lungo le quali si stendono le Cordilliere; e quelle sono assai più ripide delle orientali, sulle quali stendonsi le vaste pianure di Buenos-aires. Che debbansi riguardare come più corrose le coste più ripide, e che le occidentali sieno più ripide delle orientali è principio ammesso dallo stesso *Buffon*. il quale alla pag. 129 del Tomo V. de' Supplementi dice che il moto delle acque d' oriente in occidente ha travagliata la terra in questo senso, e per pruova adduce, che in tutti i continenti la pendenza delle terre considerata dalla sommità delle montagne è sempre più ripida dal fianco d' occidente, com' è nelle Cordilliere, che da quello d' oriente. Ma in questo luogo egli suppone che il moto delle acque abbia corrose le coste occidentali, quando che altrove ascrive a tal moto la corrosione delle coste orientali, come dovrebbe essere realmente se tal moto fosse atto a produrre sensibili corrosioni; la qual contraddizione fu pure notata da M. *de Marivez* (pag. 180 tom. 1. Physique du Monde). Comunque però siasi, egli è certo che la mutazione di terra in mare nella estensione di 500 leghe sulle coste orientali dell' America non ha nessun fondamento; anzi sembra che su queste coste debba aver luogo la mutazione di mare in terra, attesi i vastissimi fiumi che vi formano continuamente un' immensa estensione d' interrimenti, i quali sono molto maggiori delle corrosioni che da quel moto delle acque possono esservi operate.

94 Per altro è ben singolare, che il Sig. *de Buffon* riguardi i seni, e gli stretti come cangiamenti di terra in mare, e determini le corrosioni dei continenti senza avere pri-

ma ſtabilito quale ſtato aveſſe il globo al principio dell' avvenimento di queſti cangiamenti. Ogni cangiamento è un rapporto tra uno ſtato antecedente ed altro ſuſſeguente; e la determinazione di queſto ſecondo dipende dal primo: onde non avendo egli ſtabilito quale foſſe la coſtituzione della terra allorachè ſuppone che abbiano avuto principio le eſcavazioni dei ſeni, o ſtretti, e le corroſioni dei continenti, facilmente conchiudeſi che queſti cangiamenti ſieno arbitrarj.

95 A ſimili oppoſizioni ſono ſoggetti tutti gli altri ſimili cangiamenti, che egli conghiettura; e molto più quelli coi quali intende a provare che la terra ferma riſulta da ſucceſſiva mutazione di mare in terra proveniente da un continuo abbaſſamento del livello del mare. Egli (*a*) per eſempio riguarda come una terra nuova laſciata da abbaſſamento del mare quel vaſto tratto di palude, che è tra lo sbocco del fiume di Caienna e quello del fiume delle Amazzoni, e ciò appoggia a due fondamenti. Il primo è che le colline, in cui va a terminare queſta palude dalla parte di terra ferma, ſono coperte di molta terra vegetabile; l' altro è che in una di queſte colline detta Gabriele avvi un piccol lago abitato da cocodrilli detti Caymans. Ma la ſituazione di queſta palude, che è poſta tra i due accennati vaſtiſſimi fiumi, indica abbaſtanza, che quella è anzi un acquiſto che la terra ferma va facendo per rialzamento operato dalle materie da quelli depoſitate nell' alveo marino. Nè l' eſiſtenza della molta terra vegetale ſulle colline è argomento che queſta ſia un depoſito fattovi recentemente dal mare, il quale in ſeguito ſiaſi abbaſſato; giacchè molte ſono le colline anche nell' interno de' continenti che ſono compoſte in gran parte di terra vegetale, nè perciò ſi riguardano come prodotte da recenti depoſiti marini. Finalmente l' abbaſſamento del mare in quel tratto ſarebbe in qualunque modo provato dall' eſiſtenza de' cocodrilli nell' indicata collina, quando queſti per natura viveſſero ſoltanto in mare. Ma la ſteſſa loro eſiſtenza nell' accennato lago, che non comunica col mare, è argomento deciſo, che queſto non è neceſſario alla loro vi-

(*a*) Supplem. t. V.

ta, onde possono ora esistervi, ed avervi per antico vivuto senza che siavi stato mare. Altro argomento di abbassamento del mare egli trova negli aumenti di terra ferma che si riconoscono sulle coste dell'Oceano verso la Francia, e l'Olanda, e sul Mediterraneo nella Provenza; d'onde conchiude che quando si osservasse in tutto il mondo, vedrebbesi che il mare generalmente si ritira dappertutto e ciò per abbassamento delle acque, le quali egli stima che si ritirino in caverne sotterranee. Ma gl' indicati aumenti di terra ferma, come altrove provai, provengono massimamente da interrimenti, nè in alcuno di essi mai si riconobbe un indizio che dimostrasse abbassamento di livello nelle acque marine. Che se generalmente si osserverà quali cangiamenti in questo intervengano, risulterà che il mare anzi che abbassarsi tende ad alzarsi, sebbene però press' a poco si compensino le cagioni influenti sì nell'abbassamento, che nell' elevazione di livello delle acque marine.

96 Per le cose esposte si può conciliare l'opposizione, che nelle osservazioni talora appajono, delle quali alcune comprovano l' elevazione del livello del mare, altre l' abbassamento. Certamente se si considera la sola naturale diffusione delle acque, l'aumento, e la diminuzione deve essere comune in tutta l' estensione marina. Ma il livello, come fu accennato nel Capo V., viene modificato da diverse cagioni parziali, e variabili. Per esempio le maree producono in un dato sito una certa elevazione di acque, la quale dipende anche dalla situazione e costituzione delle coste, e degli stretti circostanti; e siccome tale costituzione non di rado si muta, così può mutarsi in modo che le maree in certi siti producano nelle acque una maggiore, ed in altri una minore elevazione.

CAPO IX.

Sulla costituzione generale dei monti.

97 Passando dal mare in terra ferma, questa si presenta in tre forme principalmente, cioè o si stende in vaste pianure, o ascende in dolci pendenze, o si alza in ripidi monti.

tì. Le pianure in una certa diſtanza dal mare ſogliono mutarſi in mediocri pendenze; a queſte ordinariamente ſuccedono piccole colline, dalle quali ſi paſſa ad alte montagne, e queſte, allorachè ſi ſuccedono in una certa eſtenſione, formano quelle che ſi chiamano catene di monti.

98 Tra le pianure ſono varj deſerti. Quelli dell'Arabia ora ſono piani, ora ondeggianti con prominenze di ſcogli, e rupi. Così è da Aleppo ſino al mare d'Arabia, e dall'Egitto al golfo Perſico in uno ſpazio lungo 600 leghe, largo 300 *(a)*. L'inverno non vi piove; trovaſi bensì acqua dappertutto nella profondità di ſei ſino a 20 piedi, ma è ſalmaſtra, come lo è in tutto il deſerto d'Africa.

99 Alcuni de'terreni, che dolcemente aſcendono, giungono a grande elevazione prima che prendano la natura montuoſa. Tale è quello di Quito nell'America, il quale ha una elevazione di circa 1400 teſe (*b*). Tale è pure l'immenſo deſerto che ſotto il nome di Gobè, o di Cha-mo ſi ſtende dai confini del Tibeto ſino alle frontiere di Nerchinsk il quale dal *Pallas* (*c*) è riputato egualmente rilevato come quello di Quito.

100 Le miſure trigonometriche, le livellazioni, ed il calcolo delle altezze barometriche ſono i mezzi più eſatti per determinare l'elevazione di un terreno al diſopra di un dato punto; queſta però ſi può comparativamente rilevare anche dal corſo de' fiumi che vi ſcorrono, giacchè deve pendere a ſeconda del loro corſo, e quanto più queſto è rapido e lungo, tanto più elevato deve eſſere il terreno verſo l'origine de' fiumi medeſimi.

101 In diverſe parti di tutto il globo corrono vaſte catene di monti. E cominciando dall' Europa noi primamente vediamo l'Italia diviſa dagli Appennini, che ſono monti di mediocre altezza, e tra ponente e ſettentrione è cinta dalle altiſſime alpi dell'Elvezia, della Rezia, e della Savoja. La Spagna dalla Francia è ſeparata dai Pirenei; tra l'Ongheria

(*a*) *Volney* Voyage en Syrie.
(*b*) *Condamine* Journal du voyage a l'equateur.
(*c*) Obſer. ſur la formation des montagnes.

e la Polonia forgono i monti Carpatici; per la Svezia, e la Danimarca gira la grande catena boreale de' monti, e nella dominazione Russa i monti Oralici, che formano i limiti naturali tra l' Europa e l' Asia, si diramano in varie direzioni.

102 Nell' Asia alzansi le montagne chiamate *Gates*, che separano la costa di Malabar da quella di Coromandel, stendendosi dal capo Comorino fino a 500 leghe verso Cachemire (*a*). Le montagne di Gingi, che sono composte di rupi staccate arrotondite, sono una dipendenza di questa catena (*b*). Nel regno di Cachemire, e nel Tibet sorgono grandissime montagne, in cui l' Indo, il Gange, ed il Goango hanno le loro sorgenti; e poichè questi fiumi per un lunghissimo cammino vanno a scaricarsi nell'Oceano, perciò quelle montagne sembrano essere tra le più alte dell'Asia meridionale: e da tal sito così elevato quei felici terreni pendono verso il tropico, e pel beneficio dei venti di mezzodì ricevono l' influenza della zona torrida. Di là pure partono le catene che percorrono la Persia verso l' occidente le due penisole dell' India al sud, e la China verso l' oriente (*c*).

103 Nell' Asia settentrionale le montagne dette Altai sembrano essere più elevate in quelle regioni, tra le quali il monte Bogdo (*Sourano*) è comunemente riputato il più alto. Da questo monte, su cui regnano perpetue nevi, partono due grandi catene, e due mediocri. La prima è diretta al sud sotto il nome di Moussart, un'altra mediocre va all' occidente col nome di Alak; la terza chiamata Khanghai corre all' oriente; la quarta è quella che propriamente dicesi Altai, e che forma la frontiera della Siberia dal fiume Irtisch fino all' Amur (*d*).

104 Nelle catene dei monti Asiatici distinguonsi il Taurus, ed il Caucaso, come pure i monti del Giappone, i quali dal Sig. *Buffon*, non so su quali fondamenti, sono riputati più elevati che quelli d' Europa.

(*a*) *Sonnerat* Voyag. aux Indes orient. t. 1. p. 59.
(*b*) *Sonnerat* l. c.
(*c*) *Pallas* l. c.
(*d*) *Pallas* l. c.

105 La Siria è come una catena di monti che da un ramo principale si distribuisce a destra, ed a sinistra in diversi sensi. Da una parte vi si giunge per un vasto deserto, ed alcuni rami vanno verso il mare, ove hanno ripide pendenze, come veggonsi nel monte Carmelo. Verso il Libano, il quale, benchè sia di mediocre altezza, pure è il più elevato della Siria, i monti prendono maggiore elevazione; ed avanzandosi verso la Giudea si stringono le valli, le quali sul mar Morto finiscono in rocche selvaggie piene di precipizj e di caverne, di cui alcune possono contenere sino a 1500 uomini (*a*).

106 Nell' Africa, il cui interno finora fu pochissimo frequentato dagli osservatori, non bene si sa quale sia la costituzione dei monti. Pure è noto che vi corrono grandi catene, delle quali le principali sono quelle del Monomotapa, l' Atlante, e quelle in cui sorge l' altissima montagna di Luna. Al capo di Buona speranza termina la catena nella montagna della Perla, che è formata di un solo masso di granito (*b*).

107 L' America è la parte del globo, in cui sorgono le più alte montagne. Queste sono le Cordilliere, le quali, compresevi le colline dette Sierra, sono lunghe 1700 leghe, e larghe circa 40, e sono dirette quasi tra settentrione e mezzodì. Altre catene minori sono sparse in diverse direzioni sì nell' America meridionale, che nella settentrionale.

108 Non solo i continenti, ma anche le isole sì grandi che piccole sogliono essere in gran parte montuose. Tali sono l' Inghilterra, l' Irlanda, e la Scozia (*c*), la Corsica (*d*), l' Elba (*e*), le Canarie, le Azorie, Ceylan, Sumatra, Borneo, le isole dei Celebi, di S. Domingo, Madera ecc. (*f*), le quali generalmente sono traversate pel lungo da montagne.

Dd ij

(*a*) *Volney* l. c.
(*b*) *Sonnerat* l. c.
(*c*) *Pallas* l. c.
(*d*) *Baral* sur l' isle de Corse.
(*e*) *Pini* Osservazioni mineral. sull' Isola d' Elba.
(*f*) *Buffon* t. V. Hist. nat.

109 La coſtituzione montuoſa dei continenti, e delle iſole fu riconoſciuta anche nei ſiti più vicini ai poli. Per tali furono riconoſciute le coſte di Kamtſchatka, e quelle dell'America più ſettentrionale, come pure le iſole delle Volpi, e di Bering, le Alute, e quelle di Kadjak, le quali ancora furono vedute coperte di boſchi (*a*).

110 L'andamento delle principali catene di monti fu dal *Zimermann* diſegnato nella ſua carta zoologica; e da quello così come dalle deſcrizioni particolari rilevaſi, che la direzione di queſte catene è molto varia, trovandoſene altre tra ſettentrione e mezzodì; altre tra levante e ponente, altre finalmente in direzioni medie. Quindi non vedo, ſu quale fondamento abbia il Sig. *de Buffon* aſſerito (t. 1. p. 319) che le principali catene dell' antico continente ſono dirette da oriente in occidente: ed è bensì vero che nel Tomo V. de' Supplementi ſi correſſe, dicendo che le principali catene del globo ſono dirette da ſettentrione al mezzodì; ma queſta propoſizione manca d'eſattezza per due motivi, primamente perchè la direzione è ſempre tra due punti, onde nella poſizione dei monti non evvi ragione per dire che quella ſia da ſettentrione a mezzodì, anzichè in ſenſo contrario. In ſecondo luogo eſaminando in generale le direzioni delle catene montuoſe ſi trova che la maggior parte non è diretta tra ſettentrione e mezzogiorno.

111 La materia, di cui è formata la maggior parte delle deſcritte montagne, è il granito, cioè un ſaſſo di un teſſuto granoſo compoſto di quarzo, e di feldiſpato miſto ſpeſſe volte con mica o con altri generi di pietre, le quali però ordinariamente non ſono calcaree (*b*). Le deſcrizioni che i di-

(*a*) *Domaſchenett* preſſo Buffon t. V. Supplem.

(*b*) Una piccola porzione di terra calcarea ſembra eſſere ſempre combinata coi due principali componenti del granito, giacchè nel feldiſpato criſtallizzato di Baveno il *Sig. Scopoli* ne trovò, e nel quarzo le analiſi la manifeſtano. Queſta combinazione però non è quella unione, di cui ora ſi parla, la quale ſi riporta alla miſchianza di pietra calcarea colle maſſe di granito. In queſto ſenſo eſſa ſi preſenta in due modi, cioè a dire primamente trovaſi pietra calcarea in filoni inſeriti nel granito alla ſuperficie del monte, ed allora eſſa ſi riguarda come una materia ſopraggiunta al granito già eſiſtente. In ſecondo luogo trovaſi eſſa in filoni, che corrono per entro al maſſiccio de' graniti ſteſſi. Le nuove miniere di piombo argentife-

verſi oſſervatori fecero delle catene ſopraindicate tutte concorrono a ſtabilire queſta verità, la quale da me fu pure riconoſciuta in diverſe parti, e maſſime nella val d'Aoſta, nella val Seſia, che è terminata dall'altiſſima montagna detta la Roſa, in una porzione delle montagne della Savoja, del Valleſe, del Tirolo, e della Carintia, e nelle alpi che dividono l'Italia dagli Svizzeri, e dai Grigioni. Nè ſolo le più alte montagne, come le Cordilliere, le alpi della Savoja ec. ſono granitoſe, ma tali ſono anche molte delle minori; il che da me pure fu oſſervato nell'alta Lombardia, ed in altre parti dell'Italia, della Germania, e della Savoja, e potrà rilevarſi dalle particolari deſcrizioni, che da diverſi oſſervatori in queſti ultimi tempi furono prodotte (*a*).

112 Nel granito è da oſſervare, che alloraquando ſi ſcompone nelle alte cime eſſo ſpeſſe volte ſi riduce in grandi laſtroni, o guglie, come fu oſſervato dal Sig. *de Sauſſure*; ma quando è ancora in uno ſtato di ſolidità forma nella montagna de' maſſi arrotonditi, così che per queſta figura eſſo ſi può riconoſcere anche da lontano. Tale oſſervazione fu da me fatta in molte montagne granitoſe, e veggo eſſere conforme a ciò che altrove fu da altri oſſervato. Così il

ro, che coltivanſi nei monti granitoſi di Vallera nella Lombardia Auſtriaca preſentano tali materie calcaree nel copioſo fluore minerale che è unito nei filoni, che vi ſi cavano. Se la pietra calcarea ſi trovaſſe ſottopoſta ai monti granitoſi, ſarebbe queſta un'altra rimarchevole maniera di unione del granito colla pietra ſteſſa; e quella dovrebbe maſſimamente riconoſcerſi nei Pirenei, nei quali domina il calcario. Non mai però fu eſſa incontrata dall'eſimio Sig. Barone *de la Peirouſe*, che molto eſaminò quelle montagne, ſebbene altri abbia aſſerito che vi eſiſte (Traitè ſur les mines de fer ec. Notes pag. 337.)

(*a*) Su tale oggetto veggaſi *Pallas* l. c., *Ferber* Lettres ſur la mineralogie ec., *Sauſſure* voyages aux Alpes, *Barral* ſur l'isle de Corſe; *Charpentier* mineralogiſche Geographie der churſächſiſchen Lande; *Bexon* preſſo *Buffon* t. V. ſupplem; parlando della Lorena; Eſſai ſur la mineralogie des Pyrenees; *Volney* Voyag en Syrie, & en Egypte, in cui deſcrive l'Oreb, ed il Sinai come formati di granito grigio; ed un altro granito roſſo eſiſtente tra la città di Aſovan, e le cataratte del Nilo, come pure la montagna di granito, porfido, e diaſpro, che a certa diſtanza dal Nilo ſtendeſi nella direzione di queſto fiume in lunghezza di 20 leghe, e forſe in altrettanta larghezza. Finalmente merita di eſſere letto il capo IV. della ſezione 5 della ſopraccitata opera di *Bergmann*, nella quale non ſolo ſono raccolte le oſſervazioni di tal genere già da altri prodotte, me ancora ſono eſpoſte molte particolari notizie riguardanti le montagne granitoſe della Svezia.

Sonnerat (Voyag. aux Indes Orient.) ſcrive che la catena paſſante per Gingi nelle Indie è di quarzo, e feldiſpato oſſia di granito, e che preſenta rupi quaſi rotonde.

113 Un'altra materia aſſai copioſa nelle alte montagne è il quarzo miſto con mica diſpoſto a grandi laſtre irregolari. Queſto è il *Saxum fornacum* del *Vallerio*, lo ſchiſto di molti, che dovrebbe diſtinguerſi coll'aggiunto di *quarzoſo*, ed il gneis di molti Tedeſchi. Quello forma ſpeſſe volte quaſi la baſe, ſu cui ſi alza il granito, e talora l'uno all'altro è frappoſto.

114 La materia calcarea forma pure una conſiderabil parte delle prominenze terreſtri. Dei monti calcarei alcuni ſono formati a ſtrati per lo più orizzontali, hanno una ſufficiente uniformità nella materia, racchiudono corpi marini pietrificati, ed eſiſtono al di fuori delle grandi catene di monti in ſituazione generalmente più baſſa. Altri per contrario o non ſono ſtratificati, oppure hanno ſtrati di irregolare, ed incoſtante direzione, ed inclinazione, non contengono corpi marini, ſorgono anche a grandi altezze nel centro di vaſte catene, e la loro materia non è omogenea, ma combinata con quarzo, mica, ſteatite, amianto, granati, e feldiſpato. Queſta così grande differenza, che riconoſceſi nei monti calcarei, e maſſime dei Pirenei (*a*), dimoſtra vana l'opinione di quelli, che ſtimano eſſere tutta la materia calcarea prodotta da depoſiti marini. La qual opinione era appoggiata all'ipoteſi che tutti i monti calcarei foſſero a ſtrati orizzontali, e conteneſſero corpi marini pietrificati.

115 Una non diſſimile coſtituzione hanno anche i monti compoſti di ſchiſti argilloſi.

116 Innumerevoli altre materie entrano nella compoſizione di altri monti, come porfidi, diaſpri, e ſimili, le quali nelle particolari deſcrizioni di diverſi oſſervatori ſi potranno rilevare.

(*a*) V. *De la Peirouſe* Traitè ſur les mines de fer du Comte de Foix Notes pag. 337. Anche il Sig. *de Sauſſure* riconoſce una materia calcarea molto più antica di quella, in cui trovanſi reſidui di corpi organizzati, come alla pag. 175 Vol. II. de' ſuoi viaggi alle Alpi.

117 E qui per generalizzare le idee, e facilitare le espressioni gioverà distinguere i monti in originarj, e derivativi. Originarj o primitivi diremo quelli che già esistevano, allora che il globo cominciò ad essere abitato da corpi organizzati; derivativi, o secondarj quelli che si formarono dopo l'abitazione del globo. Secondo tal definizione tutti i monti composti di materie, nelle quali non mai trovansi racchiusi corpi organizzati, e che non derivano da successivi trasporti di tali materie, si riguarderanno come originarj. Tali sono i monti granitosi, quelli formati di quarzo micaceo e di altre rocche, di cui questo forma la base; ad essi devono pur aggiugnersi i monti calcarei, in cui appajono gl' indizj di non essere formati per depositi di acque, o per trasporti, come pure i porfidi, ed alcuni schisti argillosi, come sono quelli su cui è soprapposto talora il granito. Per contrario que' monti, che contengono corpi organizzati, e quelli che bensì non ne contengono, ma si mostrano formati da materie trasportate, saranno derivativi. Tali sono alcuni monti calcarei, ed alcuni schisti argillosi. Io ho fissata la distinzione tra i monti originarj ed i derivativi dipendentemente dal tempo, in cui il globo cominciò ad essere abitato; perciocchè anteriormente a quest'epoca poco o nulla importa il sapere quale stato abbia esso avuto; ed altronde in esso si possono supporre tanti stati diversi, quanti ne saprà immaginare una fervida fantasia, senza che però nella terra stessa si possano trovare argomenti per realizzare le supposizioni. Laddove dopo tal epoca la storia del globo c' interessa per le mutue relazioni della successione degli esseri organizzati, tra' quali noi pure siamo; e nei loro residui abbiamo un dato sufficiente per determinare diversi generi di variazioni intervenute al globo, che abitiamo.

118 Tra i monti derivativi vuolsi annoverare la maggior parte delle colline; e queste quanto alle materie componenti sono di due generi; alcune sono un aggregato confuso di massi trasportati derivanti da monti originarj, altre sono composte di diversi generi di materie simili a quelle che compongono i monti derivativi, e nelle quali sono spesse volte mischiati corpi organizzati. Nelle colline del primo genere non si sogliono trovare massi calcarei, e le materie

originarie, di cui quelle sono composte, sono della stessa natura di quelle, di cui sono formati i monti originarj superiori alle colline stesse, e situati in una certa distanza dalle medesime. Questa osservazione fu da me trovata tanto costante, che dai sassi originarj, che io incontrava in tali colline, potetti congetturare la natura dei monti originarj che aveansi a trovare inoltrandosi verso de' medesimi. Così nel traversare le colline dello Stato Veneto per passare nel Tirolo, i diversi graniti, e porfidi che in quelle incontrava furono da me riguardati come indizj che superiormente si avessero a trovare monti di simile natura, e realmente giunto a Bolzano, tali li trovai in tutti que' contorni. A questo genere di colline si possono riportare anche quei monti che il Sig. Barone *de la Peirouse* assicura essere frequenti nei Pirenei, e che egli chiama *di trasporto* (*a*). Sono questi composti di granito comune, coi quali talora sono mischiati porfidi, e rocche argillose, ma quasi mai non vi si veggono rocche calcarie. Tutti questi massi sono arrotonditi nei loro angoli, e seppelliti in terra vegetale in modo però che talora il totale rimane quasi distinto in banchi orizzontali. Tali monti corrono a seconda delle sinuosità delle valli, e sono sempre appoggiati contro un'altra catena di montagne o granitose, o calcarie, o di pietroselci, o di schisti diversi. Quale uso abbiano queste osservazioni nella teoria della terra, e massime per confermare gli effetti di una straordinaria e generale inondazione sarà esposto a suo luogo.

CAPO X.

Sull' altezza dei monti.

119 L'altezze de' monti si suole calcolare dalla loro perpendicolare elevazione sul livello del mare; e questa chiamasi altezza assoluta. Ma quando si computa l'altezza verticale della cima di un monte da un punto superiore al livello del

(*a*) Da la Peirouse nell' opera citata pag. 332.

del mare, quella diceſi altezza relativa. Tra le montagne ſinora miſurate la più elevata è il Chimboraco nell' America, il qual monte è alto 3220 teſe, e forma una catena con altri di altezza non molto inferiore all' accennata (*a*). Nell' Europa il più elevato è forſe il monte Bianco ſituato nelle alpi della Savoja, l' altezza del quale fu trovata dal Sig. *de Sauſſure* di 2450 teſe (*a*). Nell' Aſia, e nell' Africa non ſi ſono per anco fatte ſufficienti oſſervazioni ſulle altezze de' loro monti. Solo ſi ſa che molti hanno un' aſſai grande elevazione, la quale però non deve forſe giugnere a 3000 teſe (*b*). La miſura dell' altezza di molte montagne fu eſpoſta in una tabella inſerita nei giornali di Fiſica di *Rozier*, e negli Opuſcoli ſcelti di Milano t. X. p. 242; la quale però ha biſogno di varie emendazioni (*c*).

120 Siccome il Chimboraco, e gli altri altiſſimi monti con eſſo uniti nelle Cordilliere ſi trovano aſſai vicini all' equatore; così lo ſpirito d' analogia potrebbe facilmente indurre a ſtimare che i monti maggiori eſiſteſſero ſotto alla linea equinoziale, e che ſi diminuiſſero in altezza a miſura che vanno da eſſa diſcoſtandoſi coll' avvicinarſi a' poli. Ma primamente in quelle parti ſteſſe dell' America, e dell' Africa che ſono aſſai vicine all' equatore avvi una grande eſtenſione, che o non ha montagne, o le ha di un' altezza minore di quella che oſſervaſi in altri monti rimotiſſimi dall' equatore. Così per eſempio l' America ſotto all' equatore

---

(*a*) Condamine Voyag. au Perou.

(*a*) Diverſe altezze dei monti ſituati nell' Europa Settentrionale furono raccolte dal *Bergmann* l. c. In queſte appare, che il monte più elevato dell' Inghilterra è il Pico Ruivo, il quale però ſecondo le miſure barometriche del Sig. *Heberdeen* giugne ſoltanto a 808 teſe. Non molto diverſe da queſta ſono le altezze che furono miſurate in alcuni monti della Svezia.

(*b*) Nell' Africa il Pico di Teneriffe ſecondo le oſſervazioni barometriche dell' *Heberdeen* (Phil. Tranſ. anno 1752) è alto 2412 teſe. Nell' Aſia i monti della Tartaria al nord-eſt della gran muraglia furono per mezzo del barometro trovati dai PP. *Grimaldi*, e *Verbieſt* di un' altezza di 2411 teſe.

(*c*) Per eſempio al S. Gottardo ſi attribuiſcono 1650 teſe d' altezza ſenza aſſegnare quale ſito s' indichi con tal nome; il quale, quando foſſe la cima, detta Fieudo ſopraſtante all' Oſpizio avrebbe l' altezza di 1405 teſe, come eſpoſi nelle *Oſſervazioni* mineralogiche ſul S. Gottardo. Parimenti al Legnone ſituato al nord-eſt del lago di Como ſi aſſegnano 1490 teſe, quando che la ſua vera altezza da me fiſſata nelle nominate Oſſervazioni è ſolo di teſe 1406.

comprende uno ſpazio di circa 30 gradi di longitudine, e di queſti ſoltanto due al più ſono occupati dalle montagne di maggiore altezza, non eſſendovi nel rimanente che pianure, o monti di poca elevazione. Inoltre alla latitudine compreſa tra i gradi 46 e 50 ſorgono il monte Bianco, e le altre altiſſime alpi della Savoja, de' Grigioni, degli Svizzeri, e del Valleſe, alle quali finora non ſi ſono trovate altezze eguali alle maggiori vicinanze dell' equatore, eccetto che quelle d' America. Per lo che non ſi può dire, che generalmente le elevazioni montuoſe divengano maggiori coll' accoſtarſi all' equatore, oſſia a quella ſituazione, che nell' ipoteſi della figura sferoidale della terra ha la maſſima elevazione.

121 Sebbene molte montagne granitoſe abbiano una mediocre altezza, pure la maſſima elevazione appartiene ai monti di tal natura: il che ſi riconoſce nel Chimboraco, ed in altre montagne dell' America. La maggiore altezza, a cui giungono le cime calcarie in Europa, ſembra eſſere quella del monte Perduto ſituato nei Pirenei, a cui il Sig. de la *Peirouſe* aſcrive più di 1900 teſe d' elevazione. Nell' America la pietra calcaria deve avere un' elevazione molto maggiore, eſſendoſi trovate conchiglie pietrificate ad un' altezza di 2200 teſe. Vedi il §. 169.

CAPO XI.

Sulla quantità della materia, che forma le ineguaglianze al di ſopra del livello del mare.

122 Le innumerevoli varietà delle ineguaglianze, che ſi alzano al di ſopra del livello del mare, rendono impoſſibile un eſatto calcolo delle medeſime. In ogni modo la quantità loro ſi può per approſſimazione calcolare nel ſeguente modo.

123 Le principali catene dell' America ſono lunghe circa 5000 leghe, la loro larghezza nelle Cordilliere talora è maggiore di 40 leghe, ma altrove è minore; coſicchè per larghezza media ſi poſſono aſſumere 30 leghe. Quanto all' altezza, la maggiore è di 3220 teſe, ma la media è di circa 2300 teſe oſſia di una lega. Quindi ſupponendo che la lar-

ghezza sia uniforme, la massa loro sarebbe 150000 di leghe cubiche, da cui dovrebbero dedursi i vuoti lasciati dalle valli, dalle caverne, e simili, i quali forse giungono alla metà dell' indicata mole. Ma siccome oltre alle indicate catene sono sparsi per l' America altri monti minori, ed in diversi siti il terreno ha considerabili pendenze, perciò si può questa materia considerare come equivalente a quella che dovrebbe dedursi, e ritenere l' indicato numero di 150000 di leghe cubiche come eguale alla massa delle ineguaglianze nell'America.

124 Nelle altre tre parti del globo le principali catene hanno verisimilmente una lunghezza di 16000 leghe; la larghezza media può assumersi di circa 25 leghe. Quanto all' altezza la massima tra le descritte è quella del monte Bianco che è di 2450 tese. Ma la maggior parte appena giugne a mezza lega; onde questa si può assumere per altezza media. Quindi per la massa delle principali catene risulteranno 200000 leghe cubiche, le quali rappresenteranno anche la mole totale delle disuguaglianze, quando si assuma che le deduzioni da farsi pei vuoti, che sono in quella mole, equivalgono alla massa delle altre ineguaglianze esistenti fuori delle calcolate catene. Unendo pertanto in una somma i due sopraindicati valori risulteranno 350000 leghe cubiche per il prossimo valore delle disuguaglianze del globo sul livello del mare. Quindi appare che queste disuguaglianze sono assai piccole in confronto della terra, la quale è eguale a circa 12366 millioni di leghe cubiche.

125 Dall' assegnata quantità sarà facile lo stabilire per approssimazione quale sia la proporzione tra la massa de' monti originarj e quella che costituisce le prominenze composte di materia derivativa.

126 Il Sig. *de Buffon*, alloraché verso la metà del corrente secolo formò la sua teoria della terra parte su ipotesi, e parte sulle poche, ed imperfette osservazioni geologiche che sin allora erano state prodotte, pose per una base della sua teoria che generalmente i monti erano formati di materia calcarea stratificata; ma nei Supplementi, che dopo 30 anni pubblicò, trovossi obbligato in virtù delle seguenti osservazioni a rovesciare quella base, ed a dire che la sostanza

calcarea era pochiſſima in confronto dell' altra che egli chiama vitreſcibile, e che ſecondo la ſoprappoſta diſtinzione (§. 117.) è del genere delle materie originarie. A che vuolſi aggiungere, che eſſa è ancora molto più poca di quel che dalle oſſervazioni appare: e veramente gli oſſervatori generalmente hanno enunciati come calcarei que' monti, nei quali hanno riconoſciuta come tale ſoltanto la ſuperficie, ſupponendo che anche nell' interno foſſero della ſteſſa natura. Ma in molti ho oſſervato che la materia calcarea forma ſoltanto una coperta più o meno elevata ſul nocciolo interno, il quale è di tutt' altra natura, e ordinariamente è di granito o di altra materia originaria. Così nei monti della Valſaſina, che ſi ſtendono ſino a Bellano ſul lago Lario, riconobbi in diverſi ſiti che la baſe è di granito ſebbene in ſuperficie ſino alla cima ſieno coperti di pietra calcarea, anzi talora tra il granito e la calcaria è frappoſta una breccia jaſpidea di roſſo colore. Parimenti l' Autore delle oſſervazioni ſui Pirenei avverte in più luoghi (pag. 98 100 ec.) che la pietra calcaria fu da lui veduta ſoprappoſta ai graniti. Lo ſchiſto ſotto alla calcarea fu pure oſſervato dal *Ferber* (*a*) in varj monti del Padovano, del Vicentino, e Veroneſe che ſono parte della catena che ſepara la Germania dall' Italia, come pure in diverſi monti dell' Auſtria, della Stiria, e Carniola. Finalmente il Sig. *Grignon* in una nota comunicata al Sig. *de Buffon* oſſerva, che tutte le montagne primitive (oſſia originarie) e metalliche, nelle quali penetrò per gallerie, e pozzi ſino a 1500 piedi, ſono compoſte di rocca viva vitrea (cioè di granito, o altra materia originaria); e ſoggiugne che perciò ſi può in generale conchiudere che di tal materia ſia il nocciolo delle montagne ſteſſe abbenchè ſui loro fianchi dalla parte delle valli ſi veggano maſſi argilloſi o ſtrati di pietra calcarea in altezze conſiderabili. Per lo che i monti, che vengono enunciati come calcarei, generalmente vogLionſi riguardare come tali ſoltanto ſino ad una certa profondità della loro eſterna copertura (*b*).

(*a*) Lettres ſur la Mineralogie ec.

(*b*) Il Sig. *de la Peirouſe* ſebbene conceda anch' egli, che ne' Pirenei molte volte la materia calcarea è ſoprappoſta al granito, e ad altre materie originarie, pure aſſeriſce che molti de'

127 Se altri opponesse che anche nelle montagne di altra natura si prende dalla loro superficie argomento per giudicare del loro interno, egli dovrebbe avvertire che quando un monte si presenta nella superficie composto di materie originarie, come sono i graniti, esso ha un maggiore diritto per essere riputato di simile materia anche nell' interno, giacchè non appajono tante cagioni di riputarlo non uniforme, quante sono in una materia derivativa, la quale, essendo stata trasportata da altri luoghi, dovette essere depositata anche su' monti o terreni di altra natura che antecedentemente esistevano. Oltre a che i monti formati di granito, o di altro sasso originario spesso presentano de' fianchi tagliati verticalmente, e sono sottoposti a più frequenti diroccamenti, siccome quelli che formano le più alte montagne; e poichè sì ne' loro fianchi tagliati, come nei diroccamenti generalmente si riconosce una materia simile a quella della superficie, perciò que' monti che esternamente mostrano una materia originaria disposta in grandi, e continui massi, a ragione si riguardano generalmente come composti di simil materia anche nell' interno. Per contrario nei monti che esternamente sono formati di materia calcaria, o non originaria spesso si trova sotto di essa o granito, o altro sasso originario; onde questi generalmente non si possono riguardare come uniformi nel totale della loro massa.

128 Quello che ho detto della materia calcarea in confronto della granitosa, vale anche di altre materie derivative, come sono argille, e simili in confronto di altre materie originarie. Quindi essendo pochissimi i monti derivativi per rapporto agli originarj, ed altronde essendo spesse volte soltanto in parte di materia derivativa que' monti, che pel

---

più alti monti di quella catena, e tra gli altri l' altissimo monte Perduto sono totalmente calcarei. La cosa non ha veruna intrinseca difficoltà, massime trattandosi di quel genere di materia calcarea che ha i caratteri di originaria. L' osservazione però non si stende oltre a quelle profondità che si manifestano nei naturali diroccamenti; altronde anche in monti composti di materia calcarea, che presenta i caratteri di originaria, talora si riconosce a quella sottoposto il granito o altro sasso primitivo: tale è quell' altissima montagna che dal Sig. *de Saussure* fu osservata a fianco del Buonomo. Per lo che la regola generale accennata dal Sig. *Grignon* non sembra dover essere soggetta a molte eccezioni.

solo esame della loro superficie si enunziano, o si reputano di simile materia anche nell'interno, sembra che la materia derivativa che costituisce le ineguaglianze della superficie terrestre non sia maggiore di un centesimo del totale delle ineguaglianze medesime, onde può riputarsi di circa 3500 leghe cubiche.

CAPO XII.

Sulla Stratificazione.

129 La stratificazione finora fu riguardata come una chiave della teoria della terra, in quanto che si suppose generalmente, che questa nelle materie consolidate potesse essersi formata solamente nell' atto della loro consolidazione, anzi si stimò che queste materie prima di consolidarsi dovessero essere stati sedimenti di acque. Quindi i Mineralogisti si occuparono a riconoscerla ne' monti determinando anche diligentemente la direzione, ed inclinazione degli strati, ed altre più minute circostanze. La maniera di determinare le circostanze relative agli strati fu già da me esposta in un Opuscolo (*a*), ed in questo luogo sembrami pregio dell' opera l' esaminare alquanto più diligentemente la natura della stratificazione.

130 Delle materie, che trovansi sulla superficie terrestre, alcune sono consolidate in masse di considerabile grandezza, altre sono un aggregato di corpi minori tra loro non consolidati come sono terre, sabbie, ghiaje, e simili. Sì le une che le altre spesso trovansi distinte per piani più o meno regolari, i quali anche spesso sono tra loro paralleli; e questi piani talora sono tra loro fermamente connessi, come nella pietra calcaria alternante col pietroselce, talora sono staccati, come sogliono essere nelle pietre calcarie; e di questi secondi è ora il nostro ragionamento. Nelle materie non consolidate la distinzione dei piani risulta dalle diverse qua-

(*a*) *Della maniera di osservare nei monti la disposizione degli strati ec.* inserita negli Opuscoli scelti di Milano an. 1780.

lità delle materie ſteſſe, che formano un dato aggregato, il quale ſe per eſempio è compoſto di due ammaſſi l' uno di ſabbia, e l'altro di argilla, eſſi rimangono tra loro diſtinti nel piano, in cui ſi uniſcono o ſi combaciano. Ma nelle materie conſolidate, come ſono pietre calcarie, e graniti, la diſtinzione dei piani ſpeſſo ſi oſſerva abbenchè il totale ſia ſenſibilmente omogeneo, e tal diſtinzione può intenderſi accaduta o dopo che la materia era già conſolidata, o prima di conſolidarſi. Se la diſtinzione dei piani ſi formò dopo la conſolidazione, queſte altro non ſono che sfenditure, le quali ben poſſono eſſerſi formate con un certo paralleliſmo; e tali ſpeſſo ſi trovano, come anche dalle diligenti oſſervazioni del Sig. *de Sauſſure* rilevaſi (*a*). Ma ſe intervenne nell' atto che la materia antecedentemente non conſolidata preſe conſiſtenza, allora quelle diſtinzioni dei piani chiamanſi commiſſure, e quando queſte ſono parallele, la diſpoſizione diceſi a *Strati*.

131 L'idea pertanto di ſtratificazione nelle materie conſolidate dipende non ſolo dal paralleliſmo dei piani, ma anche dalla ſuppoſizione, che la materia avanti di ricever tal diſpoſizione non foſſe conſolidata. Tale ſuppoſizione, qualunque eſſa ſia, fu certamente fatta da quelli che nella ſtratificazione riposero il fondamento delle loro teorie geologiche; ed introducendo tale ſuppoſizione ſi ha la diſtinzione tra le sfenditure e le commeſſure in quanto che le sfenditure ſono una diſtinzione di piani intervenuta in materia conſolidata, e le commeſſure una diſtinzione di piani formataſi nell'atto della conſolidazione.

132 Ora per le oſſervazioni di molti è manifeſto, che varj generi di pietre trovanſi a ſtrati diſtinti da commeſſure; e quelli per lo più ſono in piani rettilinei, talora però ſono curvilinei, o concentrici, o ſerpeggianti. Di queſto ſecondo genere ſono alcuni ſtrati calcarei al Nant d' Arpena ec. nella Savoja (*b*), come pure al monte Tura, e più frequentemente nei monti ſituati verſo il centro delle Alpi (*c*).

(*a*) Voyages aux Alpes tom. 2. pag. 375.

(*b*) Sauſſ. Voy. aux Alpes t. 1. p. 399.

(*c*) Sauſſure l. c. p. 279.

Tali pure furono oſſervati da me ſul fianco di un monte calcareo in vicinanza di Argegno terra ſituata ſul lago di Como, e dall'Autore della mineralogia de' Pirenei (*a*) nel monte calcareo preſſo Laran, e nell'altro di Portalet, nei quali due monti gli ſtrati curvilinei ſi uniſcono anche con altri quaſi verticali.

133 Gli ſtrati inoltre ſono talora angolari. Tali furono da me veduti in diverſi ſiti, e maſſime ſulla ſiniſtra entrando nel golfo di Portoferrajo nell'iſola d'Elba. Tali pure furono oſſervati dal Sig. *de Sauſſure* (*b*) i quali inoltre aveano un prolungamento quaſi a forma di una λ.

134 Quanto alla inclinazione degli ſtrati eſſa ſi ſuole valutare dall'angolo che è formato coll'orizzonte dal loro piano, e generalmente ſi calcola ſolo nei rettilinei. Queſti ſpeſſo ſono orizzontali, ma molte volte ſono verticali, e per lo più hanno un'inclinazione media di più o meno gradi, così che queſta non può eſſere ridotta ſotto una regola generale.

135 Innumerevoli variazioni trovanſi anche nella direzione degli ſtrati eſſendo diretti talora tra levante e ponente, talora tra mezzodì e ſettentrione, e talora avendo una direzione intermedia alle accennate (*c*).

136 La groſſezza degli ſtrati è pure molto varia; mentre trovanſene di quelli che ſono groſſi un pollice, altri hanno la groſſezza di 60 piedi, e più. Ordinariamente però ogni ſtrato ſuole eſſere diviſibile in altri, ſebbene all'eſterno non vi appaja veruna ſenſibile commeſſura, o sfenditura.

137 Una incoſtante varietà nella inclinazione, e direzione degli ſtrati trovaſi non ſolo in montagne diverſe, ma ſpeſſo anche in uno ſteſſo monte: il che da me pure fu riconoſciuto ſpeſſe volte anche in una piccola eſtenſione. Ma generalmente gli oſſervatori fecero comune a tutto un monte

---

(*a*) Eſſai ſur la Mineralogie des monts Pyrenees Paris 1784.

(*b*) Tom. 1. p. 296.

(*c*) L'incoſtanza, e varietà sì dell'inclinazione che della direzione degli ſtrati calcarei fu riconoſciuta anche dal Sig. *de la Peirouſe* maſſime nei monti calcarei primitivi della catena de' Pirenei pag. 336 l. c.

te quello che riconobbero ſoltanto in una piccola parte della ſua ſuperficie; e ſebbene atteſa la difficoltà di riconoſcere tutta la diſpoſizione della ſuperficie di un monte, e l' impoſſibilità di riconoſcerne l' interno, eſſi in ciò ſieno eſcuſabili, pure pel motivo accennato le loro oſſervazioni ſu tali oggetti devono eſſere valutate con molte cautele, e riſerve.

138 Le materie che generalmente ſono ſtratificate, e che negli ſtrati hanno maggiore regolarità, ſono le calcaree, e maſſime quelle che racchiudono conchiglie, ed altri corpi marini. Le brecce, gli ſchiſti argilloſi, ed altri generi di pietre derivative trovanſi pure a ſtrati più, o meno regolari.

139 Quanto ai graniti gli oſſervatori prima de' Sigg. *Charpentier*, e *Sauſſure* generalmente aſſeriſcono, che non mai ſi trovano a ſtrati, ma bensì in maſſi irregolari. Ma que' due celebri Profeſſori cominciarono a produrre oſſervazioni di alcuni graniti ſtratificati (*a*), ed ora da alcuni ſi è molto eſteſa tale idea volendo che generalmente anche i graniti ſieno a ſtrati. Su tal quiſtione già diverſe coſe eſpoſi nella mia Memoria mineralogica ſulla montagna di S. Gottardo, ed ora gioverà il dichiararla maggiormente.

140 Più ſopra ho detto che le materie conſolidate, come ſono anche i graniti, ſpeſſo ſono a piani paralleli diſtinti o da commeſſure, e da sfenditure, e che il determinare ſe ſieno sfenditure, o commeſſure dipende dal vedere ſe la diſtinzione dei piani ſi formò nella materia già conſolidata, o nell' atto della conſolidazione; e poichè gli oſſervatori per giudicare dell' eſiſtenza degli ſtrati in un dato monte ſogliono accontentarſi di riconoſcerne i piani paralleli, perciò nelle oſſervazioni loro rimane a determinare ſe la ſtratificazione da eſſi enunciata nei graniti ſia a commeſſure o a sfenditure.

(*a*) Ne' graniti de' Pirenei alcuni dal Sig. *de la Peirouſe* ſi enunziano come diſpoſti a ſtrati orizzontali, o poco inclinati l. c. Anche il Sig. *de Trebra* in qualche granito della Saſſonia riconobbe alcuni banchi con una certa regolarità; laſcia però in dubbio ſe queſti formino nell' interno del monte una ſtratificazione regolare (Obſervations ſur l' interieur des montagnes Paris 1787.)

141 A dichiarazione di tal queſtione io prenderò per eſempio la ſtratificazione del granito oſſervata dal Sig. *de Sauſſure* nella montagna Breven, che tra le deſcritte è la più dettagliata. Egli dice, che queſto granito ha verticali gli ſtrati, e che inoltre ha sfenditure orizzontali. Primamente dunque anche pel giudizio di queſto eſimio oſſervatore il granito preſenta sfenditure orizzontali, e perciò parallele come ſono le commeſſure degli ſtrati. Ma di più a me ſembra che come sfenditure formateſi in materia già conſolidata debbanſi riguardare anche quelli che egli enuncia come ſtrati: il che ad altri pure ſembrerà conſiderando la natura di queſto granito. Queſto, così come ſogliono eſſere gli altri, è compoſto di quarzo, di feldiſpato, e di mica. Il feldiſpato è formato a laſtrine che ſono tra loro meno coerenti di quel che ſia il quarzo, e ſi sfendono aſſai più facilmente nella direzione dei loro piani, che nelle altre. La mica è teſſuta di ſcaglie o fogliette pochiſſimo coerenti. Di più sì le laſtrine del feldiſpato, che le fogliette della mica ſono diſpoſte con una certa direzione, per cui i piani di molte rieſcono in un piano comune, di modo che nel granito del Breven diſtingueſi viſibilmente il paralleliſmo di moltiſſimi piani della mica ſteſſa, i quali nel profilo vi formano come altrettante vene. Nella direzione di queſti piani il ſaſſo tanto per arte, quanto per natura ſi sfende aſſai più facilmente che in altre direzioni, giacchè in quella incontraſi una maggiore quantità di tali fogliette poco coerenti.

142 Ora i maſſi di granito, così come di altre pietre, generalmente tendono a sfenderſi, come è comprovato dalle ſteſſe sfenditure orizzontali, che nel granito del Breven ſi oſſervano, e da altre sfenditure in diverſe direzioni che incontranſi nei grandi maſſi di ogni qualità di pietra. Altronde le sfenditure devono formarſi maſſime nella direzione delle parti più deboli, le quali nell' indicato granito ſono nei piani delle eſpoſte fogliette, e laſtrine; ed in queſta direzione appunto eſiſtono quelli che il Sig. *Sauſſure* chiama ſtrati verticali. Perlochè troppo naturale è di dover riguardare anche queſti come ſtrati a sfenditure; ed eſſi a motivo maſſimamente della moltiplicità delle fogliette micacee eſiſtenti in uno ſteſſo piano ben poſſono preſentare de' piani abbaſtan-

za rettilinei, e lisci, come sogliono essere negli strati a commessure.

143 E' dunque da dire, che finora nei graniti non è provata una stratificazione a commessure: il che vale degli originarj come sono quelli delle Alpi. Ma nei derivativi cioè in quelli, che furono formati dalla scomposizione degli originarj, la cosa è altrimenti. Tali sono que' due graniti che accennai alla pag. 105 della mia Memoria mineralogica sul S. Gottardo. Tali pure sono i graniti de' monti della catena che passa per Gingi, i quali sono formati di quarzo, e di feldispato scomposto, ed in cui *M. Sonnerat* trovò inseriti diversi tronchi d'alberi pietrificati (*Voyag. aux Ind. Orient.*). Della stessa natura sono i graniti scomposti che l'Autore del libro intitolato *sur les Pyrenees* p. 98 dice aver veduto nelle sfenditure di monti calcarei. Fra quelli pure dovranno annoverarsi que' graniti che il *Sig. Lefebure di Villebrune* (a) dice di aver veduti nell'Auvergne correnti su strati calcarei, argillosi, e schistosi, quando saranno più distintamente descritti, e riconosciuti.

144 La stratificazione dei graniti si riguarda come un oggetto di molta conseguenza in quanto che, come dissi, si suppone che sì in questa come in altra materia gli strati non possano provenire se non da deposizioni di acqua, le quali dipoi siansi consolidate per disseccamento. Ma tale ipotesi si trovò falsa a misura che si moltiplicarono le osservazioni. Primamente si riconobbe che a strati sono disposte molte materie che certamente non ebbero origine dalle acque: tali sono le lave, ed i tufi vulcanici che hanno origine dal fuoco. Inoltre se gli strati fossero prodotti in materie depositate dalle acque, quelli sarebbero almeno per la massima parte orizzontali, o quasi orizzontali, la quale situazione appunto si attribuì alle materie stratificate prima che si rendessero più generali le osservazioni. Ma in seguito si trovarono per la maggior parte o molto obliqui all'orizzonte, o verticali.

145 I sostenitori della poc' anzi accennata ipotesi sentirono la forza massimamente di quest' ultima opposizione: onde

(a) Note alle Memorie Filosofiche ec. dell' *Ulloa*.

si ridussero ad immaginarne un' altra non meno mancante di pruove che l' antecedente, dicendo che intanto gli strati hanno inclinazioni tanto varie in quanto che nei monti intervenne un rovescio prodotto da caverne apertesi al disotto de' medesimi: nel qual rovescio il Sig. *de Buffon* pone il limite di una inclinazione di 45 gradi, ed altri non dubitano di far pervenire l' inclinazione degli strati dalla posizione orizzontale sino alla verticale. Che sia avvenuto un grande sconcerto sulla superficie del globo non può certamente negarsi, ma che nei monti ora esistenti sia intervenuto un rovescio tale per cui s' inclinassero di 45, o anche di 90 gradi, ciò non può provarsi, anzi è del tutto inverisimile. E veramente per ispiegare come in un monte il corpo degli strati sia passato per esempio dalla situazione orizzontale alla verticale, conviene tra le altre cose supporre 1. che sotto di esso siasi aperta un' ampia caverna. 2. che in qualche sito della base del monte fosse un punto d' appoggio, sul quale si potesse rivolgere il corpo degli strati per passare dalla situazione orizzontale alla verticale. 3. che la caverna fosse di tale profondità, ed ampiezza, che potesse lasciar luogo a tale rivolgimento, e farlo terminare nè più, nè meno al momento, che esso avesse formato un angolo retto: le quali supposizioni non possono aver luogo se non in un moto assai più regolare di quello che avviene nei rovesci di monti, e negli aprimenti di caverne. E poniamo pure che con sufficiente regolarità potesse cadere un monte isolato, ma che questa potesse conservarsi nello sconvolgimento di tanti monti connessi, quanti sono quelli che ora si osservano cogli strati verticali, sarà sempre cosa impercettibile, e tanto più quanto che in tale circostanza avrebbero dovuto anche gli strati di uno stesso monte sconcertarsi reciprocamente, quando che per contrario noi generalmente li troviamo in una situazione abbastanza regolare.

146 A spiegare pertanto la varietà delle forme, e delle disposizioni degli strati conviene ricorrere ad altro principio; e questo è che la stratificazione è dipendente in gran parte dalla cristallizzazione. Ai Fisici è noto, che la materia nel passare dallo stato di fluidità o quasi fluidità a quello di solidità tende a prendere nelle sue parti una figura regolare. Nel-

la supposizione pertanto che una terra calcarea sia stata un sedimento d'acque, cioè semifluida, avrebbe dovuto consolidarsi anche per cristallizzazione, ed allora gli strati sarebbero corpi regolari, alla formazione de' quali sarebbe concorsa anche la cristallizzazione: onde possono avere diversissime direzioni, ed inclinazioni, come le hanno le lastrine d'onde sono composti i cristalli di quarzo, di feldispato, ed altri.

147 Potrebbe forse altri dire, che siccome la cristallizzazione si opera per le affinità chimiche, e queste non possono estendersi su grandi masse, così la cristallizzazione non può aver parte negli strati, che generalmente sono di ampia mole. Ma in primo luogo piccole non sono le masse di que' cristalli di rocca isolati, che hanno di diametro più di un piede, e di lunghezza quattro; e quelli che formano una piramide larga circa tre piedi come furono trovati nel Vallese, e da me stesso veduti; piccoli pure non sono que' parallelepipedi di feldispato, che trassi dalla montagna di S. Gottardo, i quali hanno un piede di larghezza; e quando le colonne di basalte, che ne' monti Euganei, nell' Islanda, ed in altri siti ritrovansi, si annoverassero tra veri cristalli, non più potrebbe dubitarsi, che dalla cristallizzazione possano risultare grandissime masse.

148 Che se alcuno volesse ancora riputare questi corpi come piccoli in confronto dell' ampiezza degli strati, io saprei volentieri da lui, quali sieno i limiti, dentro de' quali l' affinità chimica può estendersi; e quando credesse di averli determinati secondo le nozioni comuni de' Chimici dipendenti da una precedente fluidità, io gli farei presente potersi cristallizzare anche le materie già consolidate, e doversi allora operare la cristallizzazione in masse di grandissima mole. Certamente la fluidità di un corpo non differisce dalla solidità se non nel più e nel meno, trovandosi varie degradazioni sì nei fluidi, che nei solidi, per le quali gli uni agli altri vicendevolmente si rassomigliano. Altronde è manifesto per esperienze, che nelle pietre contiensi una certa quantità di fluidi, come aria, ed acqua, così che anche per tale mischianza questi solidi partecipano in qualche modo dei fluidi. Quindi se nel passaggio dalla fluidità alla solidità spesso interviene una cristallizzazione, non sarà maraviglia che essa

intervenga anche nel paſſaggio della materia da un certo grado di ſolidità ad una maggiore conſolidazione : il qual paſſaggio certamente ha avuto luogo nelle materie componenti i monti, e maſſime nell' ipoteſi che queſte ſieno ſtate depoſizioni d'acque.

149 Ora una delle condizioni per la criſtallizzazione ſi è che l' affinità mutua delle parti le combini tra loro formando corpi diſtinti di una data forma, e grandezza. Affinchè tale combinazione ſi compia è neceſſario che le particelle mutino luogo, la quale traslocazione è prodotta dalla forza d'affinità più o meno difficilmente, ſecondo che la maſſa, che deve dividerſi in moltiplici criſtalli, è più o meno coerente, o conſolidata; giacchè allora le parti fanno una maggiore o minore reſiſtenza alla forza d' affinità. Quanto più facilmente l' affinità può produrre l' indicato effetto, tanto più preſto le parti ſi combinano in criſtalli, oſſia in corpi regolari tra loro diſtinti; e dappoichè nel totale della maſſa è intervenuta tale diſtinzione, rimangono eſſi ad una certa diſtanza, e però non più la forza d'affinità di uno ſtende la ſua azione ſull'altro, e così rimangono diſtinti ſotto a certe grandezze. Onde è che allora quando l'affinità trova minori reſiſtenze, i criſtalli devono rieſcire di mole minore: e forſe che ſi potrebbe dire che in parità di altre circoſtanze la grandezza de'criſtalli riſultante da una data maſſa deve dipendere dal rapporto tra la forza d' affinità che tende a combinarne le ſue parti, e la reſiſtenza della forza di coeſione che tende a ritener le particelle della maſſa nel proprio luogo, così che allora abbiano a riſultare criſtalli diſtinti in certe grandezze, quando la forza d' affinità in ciaſcuno di quelli ſia maggiore della forza di coerenza che tendeva a ritenerne le parti nella precedente loro ſituazione. Quindi nelle materie fluide o ſemifluide, le cui parti facilmente poſſono cedere alla forza d'affinità, i criſtalli devono riuſcire aſſai minori che nelle materie già conſolidate; ed in queſte quanto enormi maſſe poſſono eſſere prodotte dalla forza di criſtallizzazione ſi riconoſce dalle oſſervazioni. Certamente le ſfenditure parallele, e verticali che talora oſſervanſi nei graniti, ſono prodotte in materie già conſolidate; e la regolarità più o meno eſatta che ne riſulta in gran-

di maſſi che preſentano una figura priſmatica, o parallelepipeda, dà a queſti il dritto di eſſere riguardati come opera di criſtallizzazione. Come tali devono pure riguardarſi le sfenditure che dividono gli ſtrati delle pietre calcarie con una direzione perpendicolare alle loro commeſſure; le quali sfenditure ſono aſſai frequenti, ſiccome rilevaſi anche dalle oſſervazioni del Cavaliere *Ferruſſac* (*a*), e dei Sig. *Sauſſure* (*b*). Finalmente gli ſtrati arcuati, ed angolari che vedonſi in molte pietre calcarie (§. 132), ed anche in graniti (*c*), gli ſtrati ſerpeggianti ad angoli alterni, che il Sig. *Sauſſure* oſſervò in una pietra arenaria (*d*), quelli a doppia inclinazione l'una perpendicolare, e l'altra orizzontale dallo ſteſſo riconoſciuta in una rupe calcarea, come pure i perpendicolari che nel monte Brezon vide uniti ad orizzontali, i grandi priſmi poligoni, in cui trovanſi diſtinti molti baſalti (§. 147), non poſſono certamente intenderſi formati per un ſemplice diſſeccamento di materia per innanzi ſemifluida, e però voglionſi riguardare almeno in parte come effetti della criſtallizzazione.

150 E' però d'avvertire, che ſebbene gli ſtrati ſieno almeno in parte opera della criſtallizzazione, pure eſſi non devonſi riguardare come criſtalli compiuti. Per tali ſi ſogliono riguardare ſoltanto quei corpi per natura più o meno regolari, i quali ſi ſogliono trovare quaſi come iſolati dentro maſſe di diverſa natura, e ſono terminati in ogni loro parte da piani formati nell'atto ſteſſo della criſtallizzazione; in virtù della quale ſpeſſo trovanſi anche incrocicchiati, ed inſeriti l'uno nell'altro. Ora tali caratteri mancano del tutto agli ſtrati, i quali ſoltanto nei due piani oppoſti delle loro commeſſure preſentano una mediocre regolarità, e talora anche nelle sfenditure, le quali nelle pietre calcarie ſogliono eſſere perpendicolari alle commeſſure. Lo ſteſſo è nei priſmi baſaltici, i quali nei piani non hanno una deciſa re-

(*a*) Preſſo *Rozier* Journal de Phyſiq. t. 15 p. 458.

(*b*) l. c. tom. 2 p. 364, e 277.

(*c*) Mem. mineral. ſul S. Gottardo §. 124.

(*d*) t. 2. p. 182 (5) p. 364.

golarità, ed uniformità (*a*). Queſto però non impediſce che ſi abbiano a riguardare tali corpi come operati da criſtallizzazione. L'effetto di queſta non è ſempre di produrre criſtalli compiuti, ma ſolo di tendere a produrli: il che rieſce più o meno ſecondo che l'operazione è meno, o più turbata dal compleſſo delle circoſtanze che v' intervengono.

151 Raccogliendo ora le coſe eſpoſte ſulla ſtratificazione riſulta 1. che quella può formarſi sì nelle materie non ancora conſolidate, come nelle conſolidate. 2. che sì nell' uno come nell' altro caſo quella almeno in gran parte è opera della criſtallizzazione. 3. che la poſizione preſente degli ſtrati, quanto alla varia inclinazione, e direzione loro, non può in generale eſſere ſtata prodotta da roveſci accaduti ſulla ſuperficie del globo, ma bensì riſultò in gran parte da criſtallizzazione.

152 Quindi per formare una teoria geologica appoggiata alla ſtratificazione, quale ora ſi oſſerva, converrebbe primamente determinare ſe la materia avanti che ſi diſponeſſe a ſtrati era conſolidata o no, e quali variazioni o modificazioni ſieno in eſſi intervenute per giungere a quello ſtato, in cui al preſente ſi ritrovano. A tal fine la ſola eſiſtenza degli ſtrati non ſarà ſufficiente, atteſe le moltiplici cagioni d'onde poſſono eſſere derivate le materie ſtratificate, e le modificazioni degli ſtrati medeſimi; onde converrà aſſumere altri dati, i quali altronde per ſe ſoli baſteranno all'intento. Così ſe alcuno voleſſe provare che una data materia fu depoſitata dalle acque, ſarebbe a ciò provare inſufficiente la ſtra-

(*a*) I baſalti da alcuni ſono riguardati come prodotti vulcanici; ed il Sig. *Dolomieu* ſtima che provengano da lave raffreddateſi in vicinanza del mare. Altri però, e tra queſti il Sig. *Bergmann* (Opuſcul t. 3.) è di contrario ſentimento. Potrebbeſi conciliare un' opinione coll' altra dicendo, che tali pietre non furono in fuſione, come è provato dall eſſer del tutto compatte ſenza eſſer vitree; ma che provennero da materie fangoſe eruttate dai Vulcani inſieme con acqua: il che in queſti talora interviene. Quanto alla forma dei priſmi lo ſteſſo *Bergmann* non li riguarda come criſtalli; ed il *Sig. de Launay* (t. V. Acad. R. I. de Bruxelles) ſtima parimenti, che i priſmi baſaltici ſieno formati per ſolo riſtringimento, o diſſeccamento di materia, come avviene anche nei fanghi che ſi aſciugano, ed in una miniera paluſtre di ferro trovata in Oſſeg, ovvero Hoſchnitz nella Boemia, la quale ſi diſia a priſmi ſimili ai baſaltici.

ſtratificazione, perciocchè queſta può formarſi anche in materie già conſolidate, e non depoſitate dall'acqua (§. 144). Che ſe per comprovare il ſuo aſſunto aſſumeſſe le copioſe conchiglie, che in quegli ſtrati ſi contengono, allora aſſumerebbe un dato, il quale per ſe ſolo baſterebbe all'intento. Così dunque la ſtratificazione non ha tanta importanza nella teoria della terra quanto finora ad eſſa fu attribuita.

CAPO XIII.

Sulla poſizione degli angoli ſinuoſi, e rilevati, che oſſervanſi nelle Valli.

153 Il Sig. *Bourguet* aſſerì già che i monti nel loro contorno formavano da ambe le parti della loro lunghezza de' rilievi, o riſalti che ſi corriſpondono, così che ſe per eſempio un monte è diretto tra levante e ponente, eſſo forma sì a ſettentrione che a mezzo giorno dei riſalti o angoli rilevati, i quali preſi due a due dalla ſteſſa parte formano un ſeno oſſia un angolo ſinuoſo corriſpondente al rilevato. Queſta corriſpondenza di angoli ſinuoſi, e rilevati (*angles rentrants & ſaillans*) anche ſecondo il Sig. *Conte di Buffon* è aſſai ſenſibile anche nelle valli, in quanto che ſe il monte da una parte forma un angolo rilevato, l'altro monte oppoſto preſenta in corriſpondenza un angolo ſinuoſo. Avendo il Sig. *Bourguet* paſſate le Alpi più di trenta volte in diverſi ſiti e fatto il giro di quelle montagne, e del monte Jura, meritò egli una compiuta fede preſſo il Sig. *Conte di Buffon*, il quale generalizzando la coſa anche per riguardo a tutte le altre montagne riguarda col Sig. *Bourguet* queſta oſſervazione come la chiave principale della teoria della terra, in quanto che ſtima che tal corriſpondenza ſia una pruova deciſa della formazione delle montagne per l'azion delle acque.

154 Per dire che le montagne abbiano dei riſalti, e conſeguentemente anche dei ſeni, o angoli ſinuoſi non è neceſſario avere girate trenta volte le Alpi: baſta avere una volta veduto qualche monte, e conſiderare che non è poſſibile che in maſſe eſpoſte alle continue ingiurie del tempo ſi con-

servi un contorno in linea retta, o in una curva uniforme. Ma ad asserire che nei risalti, e seni sia una corrispondenza non basta d' avere molte volte veduti i monti: conviene di più stabilire in che consista tale corrispondenza, e poi riconoscere con misure, ed osservazioni che questa realmente esiste. Se tale corrispondenza si facesse consistere soltanto nell' essere i monti formati a risalti sì a destra che a sinistra della loro lunghezza senza una regolarità nella corrispondenza, questo sarebbe abusare dei termini; ed altronde non sarebbe questa una chiave che aprisse l' adito ad una teoria. Per formare un' idea di regolare corrispondenza converrebbe almeno 1. che da una parte fosse un numero di risalti eguale a quello che esiste nell' altra, e che conseguentemente fosse anche eguale da ambe le parti il numero dei seni. 2. che gli angoli sinuosi da una parte fossero pres' a poco di eguale grandezza, e forma cogli angoli rilevati esistenti nell' altra. 3. che gli angoli sinuosi esistenti da una parte corrispondessero in determinate distanze cogli angoli rilevati sporgenti nell' altra, come pres' a poco vedesi ne' fiumi che corrono in letti di poca consistenza. Che se si volesse, che la corrispondenza degli angoli servisse a provare qualche teoria, come se s' intendesse con quella di dimostrare che le valli furono scavate o formate dalle acque; allora converrebbe vedere quale sia la corrispondenza degli angoli che suole essere formata dalle acque; e l' esistenza di questa dovrebbe per osservazione essere riconosciuta nei monti. Ma lo stabilire quale corrispondenza di angoli sarebbe provenuta dall' azione delle acque dipende da più alti principj, che già altrove accennai *(a)*, nè giova qui il richiamarli, giacchè da quelli risulta l' impossibilità di determinare in tale oggetto qualche cosa di preciso; ed altronde a decidere la presente quistione basta la semplicissima idea di corrispondenza, che poc' anzi accennai. Certamente il Sig. *Bourguet* non ha riconosciute nei monti quelle proprietà che ho detto essere necessarie per formare una regolare corrispondenza d' angoli sinuosi, e rilevati, nè potea riconoscerla, giacchè questa certamente non vi esiste. Il

---

(*a*) Mem. mineralogica sul S. Gottardo §. 67.

Sig. *de Sauſſure*, che eſaminò il monte Jura, ed una parte di quelle Alpi che dal *Bourguet* furono percorſe, non ve la trovò (*a*); e generalmente i Geologi più recenti che cercarono di riconoſcerla in diverſe provincie non ve la trovarono (*b*); io pure in vano la cercai in quelle molte montagne, che a tal fine eſaminai, così che credetti di non doverne più fare oggetto di oſſervazione.

155 Se le valli foſſero deſcritte con una certa eſattezza, potrebbeſi da ognuno ſulle carte geografiche riconoſcere l'irregolarità delle loro prominenze, e ſinuoſità. In mancanza loro però poſſono ſervire i laghi, e le grandi aperture di mare, che ſono come altrettante valli, in cui tuttora riſiedono le acque; ed in queſte ognuno potrà riconoſcere che nella terra ferma che ſerve di continente alle acque non è la ſuppoſta corriſpondenza di angoli: giacchè ſpeſſo trovanſi o due ſeni, o due riſalti oppoſti, cioè o allargamenti, o riſtringimenti, ſenza alcuna regolarità.

156 Queſto vale quanto alla ſemplice oſſervazione diretta a riconoſcere la preſente coſtituzione dei ſeni, e riſalti eſiſtenti nelle valli. Ma ſe ſi riferiſce l'oſſervazione alla immaginata teoria dell' azione dell' acque, toſto comprendeſi che quella a queſta niente corriſponde. Se le acque aveſſero ſcavate le valli ora eſiſtenti, dovrebberſi negli angoli ſinuoſi, e rilevati riconoſcere quelle circoſtanze che ſogliono accompagnare la formazione de' medeſimi proveniente dalle acque correnti. Così noi vediamo per eſempio che negli angoli formati dall' azione delle acque ogni angolo rilevato corriſpondente in parte oppoſta al ſinuoſo è generalmente formato da depoſizioni di terre e ghiaje, o di altre ſimili materie che l'acqua nelle parti ſuperiori ſcava formando un angolo ſinuoſo, e che traſporta nelle inferiori. Se dunque eſiſteſſe nei monti una corriſpondenza d'angoli prodotta da acque correnti, dovrebbero per lo più gli angoli rilevati eſſere formati da materie di natura, o almeno di conſiſtenza diver-

(*a*) Voyages aux Alpes t. 1. pag. 511, ove aſſicura trovarſi qualche corriſpondenza di angoli ſolo nelle piccole e ſecondarie valli.

(*b*) V. *Pallas* ſur la formation des montagnes ec.

sa da quella che forma gli angoli ſinuoſi, oſſia la maſſa dei monti medeſimi. Ora gli angoli rilevati, o ſieno eſſi corriſpondenti o no, generalmente nei monti ſono di eguale natura, e conſiſtenza col rimanente del monte contiguo maſſime quando è di materia granitoſa, o originaria. Non poſſono adunque quegli angoli attribuirſi ad azione di acqua maſſime nei monti originarj, quali ſono quelli delle grandi Alpi.

157 Ma avvi di più. Una generale corriſpondenza d'angoli proveniente dall'azione di acque non ſolo non eſiſte, ma neppure vi può fiſicamente eſiſtere. Perciocchè o già eranvi monti al tempo, in cui ſupponeſi cominciata l'azione delle acque, o non eſiſtevano. Se già eſiſtevano, dunque dovevano eſſervi valli formate con certo contorno indipendente dall'azione delle acque, il quale, atteſi i varj giri delle valli, dovea avere de'ſeni, e de'riſalti, e però quand'anco le acque aveſſero in ſeguito prodotti angoli ſinuoſi, e rilevati, pure quelli, che ora eſiſtono, ſarebbero in ragione compoſta dell'azione ſteſſa delle acque, e della precedente coſtituzione del contorno de'monti: onde non potea formarſi quella corriſpondenza di angoli che foſſe proporzionata alla ſola azione delle acque ſteſſe. Che ſe non ſuppongonſi per anco eſiſtenti i monti al tempo, in cui cominciò la ſuppoſta azione delle acque, allora la terra ſarebbe ſtata un globo o una sferoide ſenza riſalti, e le acque ſarebbero ſtate equabilmente diſtribuite in tutta la ſuperficie terreſtre formandovi una tranquilla inondazione. Ora in queſta maſſa d'acque, benchè altiſſima ſi ſupponga, non poteva eſſere una cagione atta a farla agire in modo che produceſſe eſcavazioni nella terra che le ſerviva di baſe: giacchè per ipoteſi eſſendo in equilibrio, e non eſſendovi rialzi di monti nè pendenze, non poteva formare coſtanti correnti ſe non forſe quelle che vengono da un moto generale delle acque, dai venti, e da altre accidentali cagioni, le quali correnti, come altrove accennai. (§. 93) ſarebbero altronde ſtate di forza inſufficiente a ſcavare il fondo per formarvi le valli ora eſiſtenti.

158 E' dunque chiaro, che generalmente non eſiſte, nè può ora per le cagioni eſpoſte eſiſtere nei monti una regolare corriſpondenza di angoli ſinuoſi, e rilevati: dico general-

mente; perciocchè in qualche valle, e massime nelle piccole una certa regolarità talora vi appare, sebbene però questa ordinariamente provenga dalle escavazioni, che vi hanno prodotto, ed attualmente vi producono le acque defluenti dai monti, le quali hanno un'azione del tutto diversa da quella, che avrebbero avute le acque nell'ipotesi di una permanente e generale inondazione. Che se pure in alcune anche delle grandi valli si trovasse qualche corrispondenza di angoli, questa, come altrove dimostrerò, sarà una pruova di una passaggera, e straordinaria, anzi che di una permanente, e tranquilla inondazione.

CAPO XIV.

Delle conchiglie ed altri corpi organizzati fossili che si trovano sulla superficie terrestre.

159 I corpi organizzati fossili formano un oggetto importante di osservazione: ed affinchè servano di fondamento a qualche teoria geologica conviene esattamente riconoscere le varie circostanze da cui sono accompagnati, e massime la loro diversa qualità, la quantità, e la situazione.

160 In riguardo alla qualità trovansi anche ne' monti animali di ogni classe e vegetabili di diversi generi, e specie. La classe più copiosa di animali fossili è quella dei vermi marini, le cui spoglie, o gusci trovansi spesso in ottimo stato di conservazione. Le conchiglie talora sono incorporate colla pietra, in cui sono racchiuse, così che vi formano un solo masso, e ciò è generalmente nei monti calcarei di mediocre altezza; spesse volte però sono soltanto ammucchiate con terra frappostavi, colla quale hanno poca, o nessuna coerenza, ed in tale stato generalmente trovansi in colline più o meno rilevate, ed anche in dolci pendenze, e in pianure, e massime in quelle vicine al mare. L'esistenza di copiose conchiglie in ogni parte della superficie terrestre è ora tanto nota che sarebbe inutile il rammemorare i siti, in cui si possono riconoscere. Che esse sieno spoglie di animali, che già furono viventi, è pure manifesto, giacchè di moltissime esistono anche al presente gli originali viventi del tutto simili alla struttura dei fossili.

161 A questa classe dei vermi marini appartengono pure le madrepore, ed i coralli fossili, sebbene però non si trovino in una quantità proporzionata a quella che ora esiste in mare. Il genere più singolare de' vermi fossili è quello dei mollus chi, giacchè non così facilmente comprendesi come abbiano potuto conservarsi essendo gelatinosi, e perciò facilmente corruttibili. Tra questi sono l' *Asteria ophiria radiata* trovata in una pietra arenaria in Oberlauter nel Principato di Coburgo, l' *Asteria radiata* trovata nel contado di Papenheim, l' *Arterias aranciaca* scoperta a Moutone nel monte Jura (*a*), e gli encriniti, che trovansi nelle vicinanze di Brunswick, e nel Vescovado d'Hildsheim, alcuni esemplari dei quali ottimamente conservati mi furono trasmessi dall' egregio Naturalista il Sig. Dottore *Giovanni Taube*.

162 Tra gl' insetti fossili sono abbastanza copiosi i granchj marini, i quali trovansi nel Veronese, dal lato di Cerna nell' Elvezia, nella Svezia, ed altrove.

163 Molte montagne sono pure il tumulo di una grande copia di pesci marini. Il monte Bolca nel Veronese è forse in questo genere il più copioso. La pietra, che li racchiude, è calcarea bituminosa, e fissile. Le specie, che vi sono racchiuse, generalmente sono del Mediterraneo, ma talora trovansene anche dell Oceano indiano; e tutti sogliono essere a maraviglia conservati, non mancandovi che la sostanza carnosa, così che in molti si può riconoscere non solo il genere, ma anche la specie. Nei seguenti luoghi sonosi parimenti scoperti pesci impietriti, o le loro impressioni, cioè al monte Viale nel Vicentino in uno schisto di carbon fossile; a Scapezzano nella campagna Romana (*b*), nella valle di Glaris in pietra calcaria fissile, al monte Pilato nel cantone di Lucerna (*c*), nelle Ardésie di Angers (*d*), in Eichstet, nella Siria tra Batron e Djebail (*Volney* voyag. en Syrie), nelle montagne di Castravan sopra di Barut (*Buffon* t. 1.) ed in Antigue all' altezza di 900 piedi sul livello del mare (Abregè des transact. philosoph. t. 1.)

(*a*) Saussure t. 1. p. 284.
(*b*) *Ferber* Lettres ec.
(*c*) Promenade au mont Pilat. Journ. etrang. Mars 1756.
(*d*) *Guetard* Mem.

164 I pesci di tali siti generalmente si riconoscono per marini, altrove però trovansi pesci fluviatili, o lacustri: tali sono il ciprino carpione, e la perca fluviatile che scopronsi nelle miniere di rame d' Eisleben, il carpione, e l' albula che trovansi dentro una pietra calcaria fissile bianca nel contado di Pappenheim, l' albula trovata in Oeningen nella Svevia, le trote dentro l' argilla indurata della Contea di Mansfeld (*a*).

165 Degli anfibii poche sono le specie fossili: e di queste generalmente non si hanno che alcune parti. Tali sono i denti e le ossa de' cocodrilli scoperti dal chiarissimo Sig. *Giovanni Arduino* nella Favorita, collina del Vicentino (*b*), come pure i denti di squali, e di altri simili anfibii nuotanti, che sotto il nome di glossopietre dagli antichi sono indicati, e che in molti luoghi si scoprono.

166 La classe degli uccelli appena presenta qualche individuo fossile.

167 Pochi pure sono i residui fossili spettanti alla classe dei poppanti, da altri detti quadrupedi. Tali sono le ossa umane, che in uno strato misto con conchiglie giacciono sotto la rocca di Gibilterra elevata circa 1200 piedi sul livello del mare (*c*). Il Sig. *Fortis* (*d*) scoprì parimenti ossa umane fossili con pietrificazioni di diverse specie a poca profondità lungo l' Adriatico. Nella Toscana frequenti sono le ossa, ed i denti d' elefanti (*e*). In diversi siti scopronsi residui di poppanti acquatici come di balene, e d' altri cetacei. Le colline stratificate, ed arenarie della Siberia racchiudono le reliquie di grandi animali terrestri delle Indie, come d' elefanti, rinoceronti, e buffale mostruose, anzi lungo molti fiumi della Siberia scopronsi tali reliquie con copioso avorio, che forma un ramo non indifferente di com-

---

(*a*) Vide *Born* Index fossilium.

(*b*) Presso *Ferber* Lettres sur la mineralogie pag. 47.

(*c*) V. *Boddington*, e *Hunter* Trans. Phil. an. 1760 t. 60. Per relazione, che ebbi da M. *Johnston*, nelle escavazioni intorno la Rocca di Gibilterra trovansi frequenti ossa di scimie, le quali forse furono riguardate come ossa umane.

(*d*) Vedi Viaggi in Dalmazia, e Saggio d' Osservazioni sopra l' Isola di Cherso.

(*e*) *Targioni Tozzetti* Viaggi per la Toscana.

mercio (*a*). Ciò che è più ſingolare ſi è, che degli accennati animali talora trovanſi cadaveri coperti ancora della loro pelle, tra' quali è un rinoceronte che nelle terre ghiacciate lungo il fiume Viloui fu trovato con alcuni reſidui di tendini, di ligamenti, e di cartilagini, e che dal Pallas fu depoſitato nell' gabinetto dell' Accademia di Pietroburgo. Ceſſa però in parte la maraviglia, ſe ſi conſidera che la pelle e l'altre ſopraccennate parti di queſti giganteſchi animali è di una forte conſiſtenza, e che i ghiacci, per entro ai quali eſſi trovanſi, hanno la facoltà di preſervare dalla corruzione anche le parti molli degli animali. Queſta ſeconda e principale cagione della conſervazione delle indicate parti di tali animali forma una inſuperabile difficoltà all' ipoteſi del Sig. di *Buffon*. Egli dalla quantità delle ſpoglie di queſti animali, che trovanſi nella Siberia, aſſerì già che eſſi foſſero indigeni di quelle regioni, e che perciò queſte foſſero di una temperatura aſſai più calda di quella che vi è al preſente. Ma ſe così foſſe ſtato, le parti carnoſe di quegli animali ſi ſarebbero ben toſto putrefatte, e tanto più quanto che anche al preſente ſi trovano quaſi alla ſuperficie del terreno. Nè ſi può intendere che ſienſi conſervate, ſe non ſupponendo due coſe, cioè 1. che ſieno ſtate traſportate prima che ſi putrefaceſſero, come facilmente intendeſi poter eſſere avvenuto in una ſtraordinaria, e generale inondazione. 2. che inoltre il clima della Siberia già foſſe aſſai freddo di modo che quelle parti carnoſe veniſſero preſtamente involte da ghiaccio, e così ſottratte alla putrefazione.

168 Abbaſtanza copioſi ſono anche i vegetabili foſſili. Tronchi d'alberi pietrificati, cioè mutati in agata, trovanſi in diverſi ſiti; frequenti pure ſono in diverſe pietre le impreſ-

---

(*a*) *Pallas*. l. c. p. 38. Il Sig. *Eſper* deſcrive diverſi zooliti incorporati con pietre trovati in gran copia in caverne della Contea di Bareit, e dell' Hartz, come pure in Tranſilvania, ed in Ongheria preſſo i monti Carpatici. Il Sig. *Guettard* (memoires ſur differ. parties des ſciences & arts) da la deſcrizione di diverſe oſſa foſſili trovate in Francia, ed il catalogo di molti ſcrittori, che parlarono di tali oſſa ſcoperte in diverſi ſiti. Rimane però ancora indeterminato a quali ſpecie d'animali debbaſi riportare la maggior parte di queſte oſſa riguardate come d'animali terreſtri.

pressioni di foglie, e di ramoscelli d' alberi, massime negli schisti argillosi. Bellissime tra le altre sono le impressioni vegetali dello schisto in cui trovai il carbon fossile di Schwanwich in Derbyshire (*a*), come pure quelle che vidi in vicinanza di S. Maurizio nel Vallese esistenti pure in uno schisto argilloso.

169 La massima altezza, in cui finora sonosi scoperti corpi marini fossili, è nell' America, ove si scoprirono conchiglie all'elevazione di tese 2222 (*b*). In Europa al monte Veron il Sig. *Saussure* trovò ostriche all' altezza di tese 1772 (*c*), ed il Sig. de *Luc* corni d' ammone a 1333 tese (Modification de l' atmosphere). Come si trovano corpi marini a grandi elevazioni sul livello del mare, così ne esistono al disotto del medesimo: tali sono quelli che si scavarono in una pianura di Amsterdam alla profondità di 232 piedi (*d*).

170 Nei corpi organizzati fossili sono da notare molte circostanze, e singolarità, da cui vengono accompagnati. Primamente osservasi, che essi spesse volte sono proprj di climi e paesi del tutto diversi da quelli, in cui si trovano. Tra i pesci del monte Bolca alcune specie sono indiane; nella Toscana trovossi un turbine scalare che è dell' Oceano orientale; nei monti, e nelle pianure del Chili scopronsi conchiglie che non sono analoghe a quelle che si pescano nei mari vicini (*e*). Le spoglie di cocodrilli, d' elefanti, ed altri simili animali, che abbiamo detto trovarsi in diverse parti dell' Europa, sono parimenti di animali che vivono in climi del tutto diversi. Il Sig. *Jussieu* osservò parimenti in Europa impressioni di piante esotiche tutte dirette in una simile maniera.

171 Cosa non meno singolare è che di molti corpi organizzati fossili o si sono perdute le specie, o certamente non più trovansi gli originali viventi. Tra queste specie sono i così detti corni d' ammone, e molte altre conchiglie.

(*a*) *Dietrich* note alle Lettere di *Ferber*.

(*b*) Acad. R. an. 1752 1768. - *Gentil* presso *Rozier* Obs. phys. t. VIII.

(*c*) *Saussur*. t. I. p. 393.

(*d*) *Buffon* Suppl. t. 5. p. 278.

(*e*) *Ulloa* Mem. philosophiques.

172 Un' altra circoſtanza rimarchevole in queſto oggetto è che i corpi organizzati marini ſpeſſo ſono miſchiati coi terreſtri. Agl' improntì dei peſci del monte Bolca ſpeſſo ſono unite impreſſioni di ramoſcelli, e foglie di diverſi alberi terreſtri. Alla Mora nel Piemonte inſieme colle conchiglie talora veggonſi de' frutti pietrificati; in altri ſiti diverſi del Ducato medeſimo ſpeſſo alle conchiglie ſono miſchiati legni impietriti (*a*). Nei monti di Guangavelica nelle Cordilliere le rocche, che tengono conchiglie, hanno pure de' legni impietriti (*b*). Nella Permia ſorgono monti arenarj con piccoliſſimi corpi marini, e molti tronchi d'alberi, e nelle colline della Ruſſia parimenti arenarie e ſparſe di miniera di rame trovanſi con poche conchiglie frequenti tronchi d' alberi, frutti eſotici pietrificati, ed oſſa di animali terreſtri (*c*). Le oſſa di animali terreſtri, che trovanſi in Siberia, ſono pure miſchiati con telline, con oſſa di peſci, con gloſſopietre, e legni penetrati da ocra. Nella Siria tra Batrum e Djebail a poca diſtanza dal mare in una cava di ſchiſti trovanſi conchiglie ed improntì di peſci, e piante (*d*).

173 Tra le circoſtanze più importanti è da notarſi la ſituazione che hanno nei monti alcuni vermi pietrificati, la quale è del tutto ſimile a quella che hanno allora quando ſono viventi. E' noto che alcune conchiglie hanno la proprietà di forare o le terre, o anche le pietre, formando ciaſcuna un alveolo, in cui rimangono perpetuamente annicchiate. Tali ſono alcune ſpecie di foladi (*Pholas Dactylus*) come pure il mitilo forapietre (*Mytilus lithophagus*), le quali due ſpecie volgarmente chiamanſi col nome di foladi, o dateri di mare. Sulle foladi dateri viventi il *Reaumur* (Ac. R. ſcien. 1712) fece già le ſeguenti oſſervazioni 1. Eſſi cominciano a formarſi un foro quando ſono novelli, non però in pietra, ma in una ſpecie di argilla alquanto molle, la quale poi poc' a poco ſi va indurendo in guiſa di pietra. 2.

(*a*) *Allioni* Oryctographiæ Pædemontanæ ſpecimen.

(*b*) *Ulloa* Memoires phil. & hiſt. Concernantes les decouvertes de l'Amerique.

(*c*) *Pallas* l. c. p. 39.

(*b*) *Volney* t. 1. Voyag. dans l'Egypte, & la Syrie.

Dappoichè quella è indurita, l'animale a misura che cresce, prosegue ad aumentare il foro profondandolo obliquamente, o verticalmente verso il centro della terra. 3. Questo foro è circa il doppio più lungo di quel che sia la lunghezza della conchiglia, ed è come distinto in due parti, delle quali l'inferiore ha quasi la figura conica della conchiglia, e da questa è abitata in modo che la sua parte più grossa è più vicina al centro della terra. La superiore è più stretta e forma un foro quasi cilindrico, che fa capo alla superficie della pietra, o dell' argilla. 4. Per la parte superiore dell' indicato foro l'animale manda fuori un tubo carnoso, e conico, il quale è come distinto in due, di cui uno serve ad aspirare acqua verso la conchiglia, l'altro a rigettarla, come in altri vermi interviene. Una simile struttura ho io pure riconosciuta nei mitili forapietre che stanno annicchiati negli scogli calcarei del mare di Genova, ed in molti pezzi ho pure osservato altre conchiglie di diverso genere, ed alcuni vermi nudi, ossia non coperti di guscio, i quali vi aveano formati de' fori serpeggianti. Osservai in oltre, che alcuni dei fori formati dai mitoli, e che da questi per essersi putrefatti furono lasciati voti, erano rivestiti da croste di retepore, e millepore, e che generalmente il foro è alquanto più grande della conchiglia chiusa: il che necessariamente deve essere così, giacchè l' animale spesso l'apre per fare le sue funzioni vitali. Sì le foladi descritte da *Reaumur*, come le conchiglie che io vidi annicchiate negli scogli, non erano profondate al disotto della superficie della pietra se non per una lunghezza doppia al più di quel che sia la lunghezza della conchiglia stessa: onde sembra che questi vermi penetrino nella pietra soltanto a quella profondità per cui possano prolungare il sopra indicato tubo carnoso fino all'acqua marina contigua alla superficie della pietra stessa: il che viene confermato anche dal Sig. *Fasano*, il quale parlando dei mitoli forapietre scrive, che non mai si profondano oltre a due oncie napoletane dalla corteccia della rupe (Atti dell'Acad. R. di Napoli 1789). Ora in varie montagne furono da diversi osservate tali conchiglie pietrificate, ed in quella situazione che hanno quando sono viventi. Tali sono quelle che esistono nei monti o colli Se-

neri, le quali sebbene non si possano esattamente determinare nella specie, pure appartengono al genere delle forapietre. Sono esse annicchiate in una pietra calcarea equabile dai Toscani chiamata albanese, ed ogni alveolo, che è occupato da una conchiglia, va appunto a terminare in un foro cilindrico che apresi alla superficie della pietra stessa. Osservai in oltre che questa pietra medesima in vicinanza di tali conchiglie è formata da tubetti serpeggianti simili del tutto a quelli che negli scogli sopra indicati del Genovesato vidi formati da vermi nudi. Parimenti il Sig. *Fasano* nel citato luogo riferisce, che nella Calabria citeriore dal promontorio di Palinuro fino a Fuscaldi tutte le rupi calcarie che scendono sul lido di quella costa sono forate da mitili forapietre da lui chiamati foladi, delle quali molte ancora vi esistono pietrificate. Altre simili osservazioni da altri furono prodotte, da cui conchiusero già, che il mare abbia fatta permanente dimora sui presenti continenti. Una non minore importanza ha la situazione che fu osservata nei zoofiti fossili. Il Sig. *Fortis* (*a*) arreca alcune colline dello stato Veneto, nelle quali trovansi selve intere di coralli a capo volto in giù, come secondo lui trovansi in mare viventi. Il lodato Sig. *Fasano* riferisce che al mezzo giorno di Monte Laone nella Calabria citeriore in un luogo detto Piscina elevato sul livello del mare circa un quarto di miglio è uno strato di madrepore radicate, le quali sono assai grandi sebbene però fossero quasi mezzo resolute. Soggiugne che tali litofiti spesso s'incontrano per le rupi calcaree di quel littorale sul Tirreno, e quelli ben radicati, e fissi, come sogliono essere i viventi.

174 Dalle arrecate osservazioni conchiusero altri, che gli accennati vermi abbiano vivuto in quello stesso sito, in cui ora si trovano; e siccome quelli non possono vivere che in mare, così questo abbia già fatta permanente dimora su i presenti continenti fino alle più alte cime dei monti. Tal conclusione però è spinta oltre a quel che comportano le osservazioni. Le conchiglie forapietre, secondo che scrive il lo-

(*a*) Giornali d'Italia t. 1.

dato Sig. *Fasano*, vivono soltanto in quei siti, che sono tra il flusso e riflusso delle onde: il che sebbene non sembri verificarsi nel littorale Genovese, in cui quelle conchiglie trovansi viventi anche ad una costante profondità di acqua, pure questa non sembra essere molto sensibile. Quindi dalla osservata situazione delle conchiglie fossili si può soltanto conchiudere che la superficie del mare sia giunta a quell'elevazione, alla quale le conchiglie stesse al presente si trovano. Quanto ai litofiti è bensì vero, che questi vivono anche sul fondo dei mari, e però se vissero in quel sito, ove ora si trovano fossili, l'acqua può essere stata ad essi superiore in una altezza indeterminata. Ma (§. 19) argomentando dall'altezza che ora hanno le acque marine sui fondi occupati da simili litofiti viventi, conviene dire che quella non oltrepassasse le 100 tese. Così dunque le prodotte osservazioni provano al più, che il mare fu alquanto più elevato dei siti, in cui trovansi i descritti vermi marini: la qual elevazione era sufficiente soltanto ad inondare una piccola porzione dei presenti continenti. Perciocchè l'altezza, in cui que' vermi fossili finora furono trovati, non eccede quelle colline; laddove non solo i monti, ma anche molte dolci pendenze, come sono quelle di Quito, e di Chamo. hanno un'elevazione molto maggiore. Per determinare però in quale elevazione sia stato permanente il mare, gioverebbe che si facessero più esatte osservazioni per riconoscere l'altezza, in cui esistono vermi fossili nella stessa situazione che dovettero avere essendo viventi. Sarebbe anche pregio dell'opera il rinnuovare le osservazioni sulla situazione dei litofiti sì fossili che viventi, e l'esporle con que' necessarj dettagli che mancano a quelle che finora furono prodotte. In ogni modo la situazione delle conchiglie forapietre riconosciute nei colli Senesi, ed accompagnate dai fori di vermi nudi, basta per se sola a poter assicurare che l'uno, e l'altro genere di questi vermi abbia vivuto in quello stesso sito, in cui ora si trovano i loro residui pietrificati, o i vestigj del loro lavoro, e che perciò il mare vi abbia fatta una certa permanenza. Io dico il vero che dalle sole descrizioni da me vedute dei dateri fossili non mai mi persuasi che essi avessero nei monti quella situazione che hanno essendo viventi; e

m' immaginava che quelli intanto si trovassero annicchiati nelle pietre, in quanto che queste furono già terra molle trasportata dalle acque di una inondazione insieme colle conchiglie stesse, le quali dopo l' indurimento della medesima vi fossero rimaste racchiuse formandovi un nicchio o alveolo corrispondente, come intervenne ad altre conchiglie, le quali certamente non hanno la proprietà di forar le pietre. Ma il sopraccennato confronto dei fossili coi viventi annicchiati in pietre mi tolse da questa opinione, e molto più l' ispezione dei fori serpeggianti formati da vermi nudi, i quali fori esistenti nella pietra racchiudente dateri fossili non si possono in nessun modo riguardare come alveoli lasciati da vermi racchiusi in una terra molle, e quindi putrefattisi nel mentre che quella s' induriva: perciocchè, come osservai in questi vermi viventi, essi quando vivono, sono cilindrici, e grossi una o due linee, ma dappoichè sono morti mutano figura, e si appiatiscono. Quindi se essi fossero stati involti in una terra molle, non avrebbero nell' indurimento di essa potuto lasciare di se un vestigio serpeggiante, e rotondo nella sua sezione trasversale, come è nelle sopraddescritte pietre calcarie del Senese. Quando fosse riconosciuto se questi vermi fossili esistano soltanto nella superficie delle rupi calcaree, ovvero se trovinsi anche nell' interno delle medesime, ci porterebbe ad altre importanti conseguenze. Intanto però essendo dimostrato dall' accennate osservazioni, che il mare dovette fare una certa permanenza in quelle elevazioni, in cui ora si trovano que' fossili, rimarrà a vedere quanto tempo vi abbia dovuto rimanere affinchè potessero que' vermi annicchiarsi in quelle pietre, ed a quale epoca debba riferirsi tal permanenza: il che sarà investigato nella seconda parte di questa Memoria.

175 Il Sig. Conte di *Buffon* rammemora come un' altra circostanza molto importante il trovarsi le conchiglie fossili unite in famiglie, ossia il trovarsi copiosi ammassi di conchiglie dello stesso genere o della stessa specie senza mischianza di altre. Questa osservazione però ha il difetto di molte altre da lui prodotte, cioè di essere fondata al più su qualche caso particolare. Certamente le conchiglie fossili non sogliono essere in famiglie, anzi sono per lo più miste non

ſolo di generi, ma anche di ordini diverſi, trovandoſi ſpeſſo le univalve miſte colle bivalve, ed anche moltivalve. In Roncà alta collina del Veroneſe il *Ferber* riconobbe almeno trenta diverſe ſpecie di conchiglie (*a*). Nelle colline del Piemonte in val d'Andona l'*Allioni* ſpeſſo trovò grande varietà di generi tra loro confuſi (*b*), e generalmente eſaminando le conchiglie foſſili raccolte ne' diverſi Muſei ſi riconoſce queſta miſchianza di generi anche in piccoli pezzi.

176 E' finalmente da oſſervare che le conchiglie così come altri corpi organizzati talora trovanſi mutati in pietra ſelcioſa. Nelle conchiglie è ſelcioſo ſoltanto il nucleo, eſſendo rimaſto calcareo il guſcio, e tali ſono frequenti nelle colline del Bologneſe in vicinanza di S. Luca. Talora però il guſcio ſteſſo è divenuto ſelce: il che è aſſai ſingolare, ed è pruova di una traſmutazione della pietra calcarea in ſelcioſa. Alcune lumachelle delle vicinanze di Parigi moſtrano ad evidenza tale traſmutazione, riconoſcendoſi in eſſe molti turbini ſelcioſi ottimamente conſervati, e vuoti nell' interno, così che non ſi può dubitare che eſſi ſieno i guſci di tali conchiglie, i quali già erano calcarei, ſiccome ſogliono eſſere quelli delle conchiglie viventi. Il Sig. *Bergmann* p. 306 dell' opera citata nega la mutazione del guſcio calcareo delle conchiglie foſſili in ſoſtanza ſelcioſa, e ciò ſul principio chimico che la terra calcarea non ſi può coll' arte mutare in ſelcioſa. Ma la natura nelle ſue operazioni è più efficace dell' arte, ed in ogni modo que' guſci, de' quali io parlo, non hanno verun carattere calcareo, giacchè, ſecondo le pruove da me fattevi, eſſi non fanno eſſerveſcenza coll' acido nitroſo, al fuoco non ſi mutano in calce, nè ſomminiſtrano quell' aria fiſſa che ſi ſviluppa dalla pietra calcaria, anzi quaſi niente perdono del loro peſo, e della loro durezza: altronde eſſi percoſſi con acciajo ſcintillano, ſono duriſſimi, e ſemitraſparenti, ed hanno tutta l' apparenza di ſelci.

(*a*) Lettres ſur la Mineralogie.
(*b*) Oryctographiæ Pædemontanæ ſpecimen.

CAPO XV.

Su i Vulcani.

177 Sebbene i vulcani non sembrino avere rapporto ai cangiamenti prodotti dalle acque sulla superficie terrestre, pure essi hanno non poca influenza nella spiegazione di alcuni de' cangiamenti medesimi, e però non devono essere da me ommessi nel piano delle osservazioni geologiche, che ho preso ad esporre. Dei vulcani alcuni sono tutt'ora ardenti, altri sono estinti. Delle antiche eruzioni di questi secondi si prende argomento dalle materie, che si riconoscono simili a quelle che vengono gettate dai vulcani tuttora agenti. Le acque calde, che si manifestano in diversi siti, sono parimenti indizj o di vicini vulcani, o di fuochi sotterranei.

178 Tra i vulcani ardenti i più insigni nell'Europa sono il Vesuvio, e l'Etna nell'Italia, e l'Ecla nell'Islanda. La Penisola di Kamtschatka, massime in vicinanza di Ostrog, come pure le isole delle Volpi, le Alute, e quelle di Bering hanno vulcani attualmente in fuoco oltre ad altri estinti (*a*).

179 Nell'America la provincia di Quito presenta nelle Cordilliere molti vulcani o ardenti, o estinti. Dalle cime del Cotopaxi, del Jangouragua, e del Sangai, benchè sieno occupate perpetuamente da nevi, escono continuamente fiamme, e fumo, e talora v'intervengono violente eruzioni. In quella accaduta al Cotopaxi nel 1744 le ceneri giunsero sino al mare in distanza di 80 leghe, e coprirono il terreno sino all'altezza di circa quattro pollici nell'estensione di 15 leghe, facendovi perire molto bestiame. Il Sangai nelle sue eruzioni fa sentire il rumore in distanza di 40 leghe, e le lave scorrendo tra le nevi giungono sino al fiume Upano, ove cagionano la morte a grande copia di pesci (*b*).

180 Nelle Molucche, e nelle Filippine il *Sonnerat* osservò

(*a*) *Domaschcneff* presso *Buffon* t. 5. Supplem. - *Coxe* Nouvelles decouvertes des Russes.

(*b*) *Condamine* Journal du Voyage a l'equateur.

vò diversi vulcani, tra' quali il più considerabile è quello di Siao, che nelle sue esplosioni copre di ceneri anche le isole vicine (a). Vulcanica dee parimenti essere l'isola, da cui il Capitano *Carteret* vide uscire fumo trovandosi in vicinanza del capo Byron. L'isola di S. Cristoforo nell'America settentrionale ha ora un vulcano, all'aprirsi del quale cessarono i tremuoti, a cui era soggetta (*Hans Sloane* Trans. Phil.). L'isola di S. Vicenzo nell'Oceano atlantico ha pure nel Morne Garou un vulcano descritto da *Anderson* (Trans. Phil.). Finalmente l'isola di Bourbon nell'Africa manifestò un vulcano nell'eruzione accadutavi nell'anno 1766.

181 Tra gli estinti vulcani è il Pico di Teneriffe nell'Africa (b). L'Atlante parimenti è riputato vulcanico dal Pallas (c), il quale anche alla Persia attribuisce molti vulcani. Questi pure sono frequenti nell'Arcipelago delle Indie dall'Africa sino al Giappone, e nelle terre Australi (d). Indizj di vulcani estinti furono riconosciuti nell'Auvergne da *Desmarest* (e), nel Vivarese da *Fujas de Saint Fond* (f), nei monti Euganei dall'*Arduino*, e dal *Fortis* (g), in una parte degli Appennini da *Ferber* (h), nella Corsica da *Barral* (i), nelle isole Eolie e Ponzie dal Sig. Commendatore *de Dolomieu* (k), nella Brisgavia dal Barone *Dietrich* (l), nel bacino del Giordano da *Volney* (m), in America dal *Condamine* (n), ed in altre parti da diversi (o).

(a) Voyag. aux Indes orient. Vedasi inoltre il *Forster* nella Memoria, che ha per titolo *Isle nouvelle sortie de la mer près de Terceres en* 1720 e che è inserita nell' Abregè des Transact. Philos. par M. *Gibelin*; come pure la Memoria di *M. Pye*, in cui descrive le quattro isole vulcaniche formatesi presso Manilla nel 1750.

(b) *Cook* Voyag. t. 2. p. 231. Questo vulcano però tramanda ancora esalazioni sulfuree e calde.

(c) *Pallas* l. c.

(d) *Buffon* hist. nat.

(e) Sur les Volcans de l'Auvergne.

(f) Recherches sur les Volcans eteintes du Vivarais, & Velais Mineralogie des Volcans.

(g) Giornale d' Italia t. 1.

(h) Lettres sur la Mineralogie.

(i) Memoir sur l' Hist. nat. de l'Isle de Corse.

(k) Voyag. aux Isles de Lipari. Memoir sur les Isles Ponces.

(l) Note alle lettere del *Ferber*.

(m) Voyage en Syrie.

(n) l. c.

(o) V. l'Europa letteraria stampata in Venezia - *Raspe* Specimen hist. nat.... præcipue de novis e mari natis Insulis Amst. 1763. - *De Luc* Lettres physiques t. IV. - Memoires de l'Academie R. I. de Bruxelles t. I. - Mem sur quelques volcans eteints de l'Allemagne par *M. le Pr. Gallitzin* nel t. V. dell' Acad. di Bruxelles - *Collini* sui vulcani della Germania.

182 Abbiamo pure notizie di eruzioni di nuovi vulcani apertisi nel corrente secolo. Tale è quella che escendo di sotto delle acque marine formò in vicinanza di Santorini un' isola *(a)*; e l'altra più recente intervenuta nelle vicinanze dell'isola di Ferroe in Islanda, la quale pure colle materie slanciate formò un'altr'isola.

183 Alcuni vulcani sembrano avere comunicazione colle acque del mare per caverne sotterranee. Nel Vesuvio di Napoli e nelle sue vicinanze quella è provata dai seguenti fatti. Nell'eruzione osservata da Plinio il mare circostante si ritirò, e rimasero de' pesci in secco sulla spiaggia. Nel 1538 allorachè in una eruzione si formò il monte Nuovo, il mare si ritirò per 200 passi *(b)*. Nell'eruzione del 1698 si ritirò a cinque riprese (V. Sorrentino lib. II.). Il *Mercati* racconta, che lo stesso avvenne nelle eruzioni del 1715, 1723, 1729, 1752. Aggiugne il *Braccini* che il ritiro non è momentaneo ma successivo, e che nel 1631 durò circa mezzo quarto d'ora.

184 Fu parimenti osservato, che in alcune eruzioni il Vesuvio getta acqua: il che avvenne anche alla bocca del monte Nuovo nel 1538, e spesso anche all'Etna. In tali circostanze stimasi che vengano gettate fuori anche conchiglie. Nell'eruzione dell'Etna accaduta nel 1755, in cui gettò copiosa acqua, fu inoltre osservato, che le sabbie, e le pietre rimaste nel sito, per cui l'acqua scorse, erano simili a quelle del mare, e penetrate dalla stessa salsedine. (Abr. Tr. Phil. t. 1. p. 90).

185 I sopraccennati ritiri del mare non si possono intendere se non ammettendo una comunicazione sotterranea del medesimo col cratere. Posta tale comunicazione, facilmente intendesi, che quando avvenga una rapida accensione nell' interno del vulcano, l'aria vi si deve molto rarefare, e formarvi rapidamente quasi come un vuoto. Quindi la pressione

---

(*a*) V. la descrizione del P. *Gorée* nelle Trans. Filosofiche volume del 1771 al n. 332. Altre isole furono per antico formate nell'Arcipelago da eruzioni vulcaniche. Tale, secondo *Plinio*, è quella di Terra ora detta Santorini, la quale insieme coll'altra di Terasia si formò in tal modo 137 anni prima dell'era cristiana.

(*b*) *Giacomo* da *Toledo* Relazione ec. Napoli. - *M. Ant. delli Falconi* dell' incendio di Pozzuolo ec.

dell' atmosfera ful mare deve rapidamente fpingere nelle cavità vulcaniche una maffa di acqua, la cui bafe farà eguale alla media capacità delle cavità medefime, e la cui altezza non farà maggiore di 32 piedi, cioè di quella, a cui l' acqua può afcendere nel vuoto per la fola preffione dell' aria. Ma il calore e la forza, con cui il vulcano slancia fuori del cratere ceneri, e faffi, deve agire anche per far ifvaporare e per elevare l' acqua fottopofta, formando que' getti d' acqua che fi offervano nelle eruzioni; ed in quefta azione, quando intervenga con una certa rapidità, è ripofta un' altra cagione, per cui deve velocemente entrare ne' fotterranei una certa quantità di acqua marina. Ora quefta velocità d' ingreffo, con cui per le due indicate ragioni una porzione dell' acqua marina fi va fottraendo al rimanente del mare, può effere maggiore di quella, con cui quefto tende per naturale efpanfione a riftabilirfi in equilibrio, offia ad occupare quel luogo, che fi va abbandonando dalle acque entranti nei fotterranei; e quando ciò interviene, dee rimanere in afciutto una porzione della fpiaggia circoftante al vulcano: il che dà l' idea di un ritiro di mare. Quefto però, così come fi offerva, non può durare fe non per breve tempo, cioè per quel tempo al più, che è richiefto affinchè l' acqua, che va entrando ne' fotterranei, giunga alla maffima altezza, a cui può effere portata dalla sbilanciata preffione dell' atmosfera; e dappoichè vi è giunta, effa per la fvaporazione, e pei getti prodotti dall' azione vulcanica deve andarfi diminuendo finchè ritorni prefs' a poco al livello ordinario. Nel mentre che quefto interviene il mare per naturale preffione preftamente ritorna prefs' a poco al primiero fuo ftato, e quefto fenfibilmente fi conferva, abbenchè vadano continuando i getti d' acqua, e la fvaporazione; giacchè paffato che fia il primo impeto dell' efplofione l' eruzione profegue con una certa uniformità, e può fenza fenfibile abbaffamento del circoftante mare effere da quefto fomminiftrata al vulcano quella quantità di acqua che efce pel cratere.

186 Che fe avvenga, che dopo efferfi riftabilito nell' acqua fotterranea l' ordinario livello fi rinnuovi qualche rapida accenfione, allora deve per le cagioni fopraindicate titornare il ritiro del mare dalle vicine fpiagge; e con ciò vengo-

no ſpiegati i replicati ritiri, che furono oſſervati in alcune eruzioni del Veſuvio.

187 Siccome nell' eruzioni vulcaniche la forza di eſpanſione sì del fuoco che di altri vapori elaſtici è ſtraordinariamente grande, ed altronde eſſa ſi dirige in ogni parte, ed anche al baſſo, così ordinariamente non deve intervenire un'elevazione delle acque marine nelle cavità vulcaniche; anzi talora può avvenire che quella forza ſia maggiore della preſſione dell' atmosfera, e perciò faccia uſcire verſo il mare l'acqua già eſiſtente nelle cavità medeſime; il che somminiſtra la ragione, per cui di rado oſſervanſi ritiri di mare in tali circoſtanze, ed inſieme dimoſtra che per ſuccedere queſto fenomeno è neceſſario, oltre ad altre condizioni, che la preſſione dell' atmosfera ſul mare prevalga a quella che riſulta dalle forze agenti nell' interno del vulcano.

188 L'acqua, che nelle eſploſioni vulcaniche viene gettata fuori del cratere, riguardaſi da alcuni come proveniente dalle piogge raccolteſi nell' interne cavità. Ma primamente non intendeſi come poſſa per le piogge raccoglierſi tant' acqua, quanta ne tramandano le eruzioni, maſſime che, atteſo il continuo calore de' fuochi vulcanici, quella dovrebbe ſvaporare a miſura che vi entra. Aggiugneſi che in tali occaſioni talora inſieme coll' acqua eſcono anche conchiglie di mare: il che è argomento della comunicazione delle acque marine con tali vulcani.

189 Straordinaria, e quaſi incredibile è la forza d' eſploſione de' vulcani ſiccome quella che giugne a slanciare groſſi macigni ad un'altezza la quale giudicata ad occhio talora è di 500 teſe al diſopra dell' orificio del cratere *(a)*. Queſti ed altri ſimili effetti ſi poſſono vedere nelle ſtorie che da diverſi furono ſcritte *(b)*. Al noſtro intento baſterà ora richiamare quelli, che hanno relazione alle acque: tali ſono la comunicazione che alcuni vulcani certamente hanno col mare; il ritiro del mare medeſimo che talora interviene ſulle ſpiaggie circoſtanti; i getti di acqua, che non di rado

---

(*a*) *Condamine* l. c.

(*b*) *Hamilton* Campi Phlægræi. *Dietrich* note alle lettere del Feiber p. 404. *Rozier* Journal de Phyſique. *Della Torre* ec.

escono dal cratere; l'azione de' fuochi vulcanici anche tra mezzo al mare; lo squagliamento rapido di nevi che avviene nelle eruzioni in monti coperti perpetuamente di neve, come sono quelli delle Cordilliere *(a)*. A tutto ciò vuolsi aggiugnere la disposizione di molte lave a strati alternanti con altri strati di pietra calcaria o di materia mista a conchiglie marine: il che indica una alternazione dell' azione del fuoco con quella delle acque *(b)*.

190 Gioverà pure fare qui alcune riflessioni che potranno servire a dichiarazione di alcuni fenomeni, ed a prevenire alcuni errori, ne' quali può facilmente indurre lo stato, in cui al presente si trovano le lave ed altri prodotti eruttati dai vulcani. Qualunque sia la cagione, per cui in alcuni siti soltanto si manifestino de' fuochi sotterranei, egli è certo, che nelle viscere de' vulcani esistono, e si vanno rinnuovando diverse sostanze atte ad ardere, come sono aria infiammabile, zolfo, ed altri bitumi. Colà pure si formano, e si sviluppano diverse materie saline, come sale ammoniaco, ed acido vitriuolico; e quando il mare vi ha comunicazione, deve pure esistervi sale marino, dalla scompotizione del quale risulta un acido analogo, ed un alkali minerale. Queste materie saline sono atte a sciogliere diverse sostanze terree, e per se facilitano la fusione delle medesime; il calore, ed il fuoco continuo, che agisce in que' sotterranei combinato colle materie stesse deve molto più facilmente agire sulle diverse pietre, che vi esistono: onde una gran parte delle medesime deve essere o rammollita o sciolta, o anche fusa, ed in tal modo devono risultare diversi composti di sostanze terree, saline, e bituminose, i quali per mantenersi nello stato di fusione non hanno bisogno di tanto calore, quanto sarebbe richiesto se i componenti consistessero in sole sostanze terree.

191 Nelle convulsioni vulcaniche tali composti già resi più o meno fluidi sottoterra vengono eruttati insieme con altri corpi sodi, e cadendo fuori del cratere seguitano a

---

(a) *Condamine* l. c.
(b) V. *De Luc* Lettres physiques t. IV., *Fortis* l. c.

ſcorrere per un certo tempo, cioè finchè mantengono una certa fluidità; il che dipende non tanto dal calore, quanto dalla materia combuſtibile con eſſi miſta che ſeguita ad ardere, e dalle ſoſtanze ſaline, che rimanendo con eſſi combinate mantengono nel totale una maggiore facilità di fuſione più o meno perfetta finchè ſieno ſcompoſte e ſvaporate.

192 Quindi intendeſi primamente per qual motivo alcune lave, come fu quella dell' Etna, che ſeguitò a ſcorrere per dieci anni percorrendo un miglio, mantenganſi fluide per un tempo molto maggiore di quello che baſterebbe alla loro conſolidazione ſe foſſero ſtate fuſe per un ſemplice calore di comunicazione. Tal motivo, come fu oſſervato dal Sig. Commendatore *Dolomieu* (*a*), è la materia combuſtibile con cui ſono miſte; ma vuolſi inoltre aggiungere lo ſtato di maggiore fluidità, in cui vengono mantenute dalle ſoſtanze ſaline, l' eſiſtenza delle quali in molte lave è manifeſta non ſolo dalle analiſi chimiche, ma anche dall' umidità che attraggono.

193 Intendeſi parimenti, che la fuſione prodotta nelle pietre dal fuoco vulcanico non ſempre deve eſſere accompagnata da vitrificazione. Queſta verità ſi riconoſce manifeſtamente in molte lave, le quali furono ſopra luogo oſſervate in iſtato di fuſione, e di fluidità, e nulla dimeno dopo la loro conſolidazione non ſi veggono vitrificate. Ma la ragione di tal fenomeno non appare ſe non dalle coſe ſopra eſpoſte. Il fuoco riſcaldando le pietre de' ſotterranei vulcanici le fa ſcoppiare, e le riduce in ſabbie ed in piccoli frammenti. Con queſti, che ſogliono eſſere di difficile fuſione, ſi combinano le ſoſtanze infiammabili, e ſaline, che ſi formano, e ſi ſviluppano nelle vicinanze, e che ſono di facile fuſione. Queſte ſeconde ad un calor mediocre poſſono divenir fluide, ſebbene le prime rimangano ancora ſolide, o al più vengano alquanto rammollite. Allora che una miſtura è compoſta di materie in parte fuſe, ed in parte non fuſe, eſſa non ha che una fluidità imperfetta, e la ſua fuſione è incompiuta, giacchè per eſſere compiuta richiedeſi che la maſſa ſia ridotta ad una certa

(*a*) Memoire ſur les Isles Ponces - Voyages aux Isles de Lipari.

uniformità, per cui le ſue particelle ſieno indiſcernibili, ed in ognuna, che ſi aſſuma, ſia un eguale grado di calore, ed una eguale proporzione delle materie miſchiate; e quando tali materie ſono giunte ad una compiuta fuſione, ſogliono anche eſſer ridotte in una maſſa vitrificata. Ora è chiaro che a render compiutamente fuſa o vitrificata una delle miſture ſopraeſpoſte richiedeſi maggior calore di quello che baſta a darle una incompiuta fuſione: altronde è manifeſto che nelle diverſe parti di un vulcano, e nei diverſi tempi delle ſue eruzioni diverſo è il calore, e però queſto talora può eſſere inſufficiente alla vitrificazione della materia medeſima, anzi ſe giudichiamo dalle lave, noi riconoſciamo che generalmente il fuoco vulcanico per lo più non giunge a vitrificare le materie eruttate; e forſe che nelle lave non vitree il calore è tanto poco che la loro fluidità generalmente non è accompagnata da incadeſcenza.

194 Quindi non può riguardarſi come generalmente vera la propoſizione del Sig. *Dolomieu*, il quale ſtima che il fuoco vulcanico agiſca diverſamente da quello dei noſtri forni, producendo una fluidità per ſemplice dilatazione. La pruova che egli adduce ſi è, che ſpeſſo nelle lave, le quali certamente ſono ſtate fuſe, trovanſi ſcerli criſtallizzati, e feldiſpati, i quali ſebbene ſieno di facile fuſione, pure non ſi veggono in neſſun modo alterati dall' azione del fuoco. La maniera di agire del fuoco dipende non ſolo dalla ſua natura, ma anche dalla qualità delle materie ſu cui agiſce. Così quando queſte ſono miſte a ſali e bitumi generalmente ſi gonfiano conſiderabilmente a motivo dello ſviluppamento di eſſi e di altre ſoſtanze elaſtiche che contengono; e tale gonfiamento realmente interviene, e ſi riconoſce in molte lave, e maſſime nelle poroſe, e nelle pomici. Che ſe per dilatazione il lodato Scrittore intende un tale gonfiamento, allora il fuoco vulcanico non preſenterebbe in queſto effetto coſa alcuna aliena dall' azione de' fuochi volgari, giacchè, come accennai, anche le lave contengono ſoſtanze ſaline, e bituminoſe, per cui ſuole il fuoco far gonfiare le materie ſottopoſte alla ſua azione. Poſto tale gonfiamento, per cui la maſſa ſi riduce in maggior volume, tanto più tenue dee rieſcire il calore delle lave, e quindi oltre alle ſopraccenna-

te si ha una nuova ragione per ispiegare come i scerli . ed i feldispati si sieno conservati sani per entro alle lave. Perciocchè facilmente comprendesi che questi possono essere stati eruttati colla loro forma, e figura naturale, la quale potettero conservare anche tra mezzo alle lave, a motivo del poco calore che queste aveano.

195 Alla tenuità del calore, che attribuisco a molte lave, e massime alle non vitree, in vano si opporrebbe, che per fonderle coll' arte è necessario un fuoco non minore di quello richiesto per fondere gli scerli, ed i feldispati. Perciocchè lo stato delle lave, dappoichè si sono consolidate, è assai diverso da quello che avevano, allora che erano fluide per l'azione vulcanica. Quando avevano tale fluidità, contenevano una maggior copia di sostanze combustibili, e saline delle quali una gran parte abbrugiò, svanì, e si scompose nel tempo che le lave seguitarono a mantenersi fluide: onde dopo la loro consolidazione sono meno fusibili di quel che fossero per innanzi. La mutazione di stato in tutti i corpi generalmente induce una diversa fusibilità: Così il piombo, dappoichè è calcinato, è assai più difficile a fondersi di quel che sia quando è in istato metallico; onde non è maraviglia se ad una simile variazione sieno soggette anche le lave, e ciò per la ragione soprarrecata.

196 E ciò basti dei fuochi vulcanici. Resta che io dica alcuna cosa di un raro genere di eruzioni che il Sig. Commendatore *Dolomieu* riporta pure ai vulcani (*a*). Osservavasi questo sino dai tempi di *Solino* nel territorio di Agrigento nella Sicilia, ed esso presentasi in un piano situato al vertice della Macaluba, monte di mediocre altezza. Su di esso sorgono diversi coni d'argilla alti non più di due piedi e mezzo, ciascuno dei quali ha nel mezzo un piccolo cratere. Da ognuno di questi ascendono piccole masse d'argilla umida, le quali quando sono giunte verso i bordi del cratere, scoppiano con mediocre rumore, e di poi l'argilla in parte ricade, ed in parte scorre lungo le pareti esterne.

(*a*) Voyag. aux Isles de Lipari.

ne. Questo ſtato di coſe, che ſuol durare annualmente tutto l'inverno, ſi muta aſſai, allorachè v' intervengono ſtraordinarie eſploſioni: il che alcuni dicono accadere ogni cinque anni incirca. Eſſe ſono precedute da rumori, e tuoni ſotterranei, che ſi fanno ſentire in diſtanza di circa tre miglia, e dopo alcuni giorni vengono slanciati ad un' altezza fino di 200 piedi frequenti getti di terra, di fanghiglia, ed argilla ſtemperata miſta ad alcune pietre. Nel 1777 avvennero quattro eruzioni in un giorno delle quali la più lunga durò mezz'ora.

197 Sebbene in queſte eſploſioni ſi manifeſti un odore di fegato di zolfo, ed in alcune cavità ſi trovi un olio bituminoſo, pure ſecondo le oſſervazioni di *Dolomieu* non ſi riconoſce in quelle vicinanze verun indizio di fuochi vulcanici; ed egli le deriva da un' aria fiſſa, la quale dalla pietra calcarea componente il monte ſi ſviluppi per l' azione dell' acido marino, che per mezzo dell' acido vitriuolico dell' argilla ſi ſepara dal ſale montano che è copioſo in que' contorni: onde l'accennato fenomeno viene da lui riguardato come un vulcano ad aria.

INDICE

Dei Capi contenuti nella prima Parte.

Cap. I. *Della figura della terra.*
II. *Sulla divisione generale della superficie terrestre.*
III. *Sui mari in generale.*
IV. *Dei ghiacci polari ed alpini.*
V. *Sul livello del mare.*
VI. *Sulle paludi.*
VII. *Sui varj movimenti del mare.*
VIII. *Sui cangiamenti di mare in terra, e di terra in mare.*
IX. *Sulla costituzione generale dei monti.*
X. *Sull' altezza dei monti.*
XI. *Sulla quantità della materia, che forma le ineguaglianze al disopra del livello del mare.*
XII. *Sulla stratificazione.*
XIII. *Sulla posizione degli angoli sinuosi e rilevati che osservansi nelle valli.*
XIV. *Delle conchiglie ed altri corpi organizzati fossili, che si trovano sulla superficie terrestre.*
XV. *Sui vulcani.*

DELLA LATITUDINE

E DELLE REFRAZIONI DI PARIGI E DI VERONA. E DELL'OBLIQUITA' DELL'ECLITTICA.

Del Sig. Antonio Cagnoli.

La posizione geografica dell'Osservatorio, che ho fatto costruire in Parigi nella corte S. Guglielmo sull'imboccatura della strada delle Beccherie in quella di *Richelieu*, e nel quale ho intrapreso ed esercitato l'astronomia pratica pel corso di mesi 40 da Ottobre 1782 al Febbrajo 1786, è stata da me investigata in più modi. Con osservazioni terrestri; o sia col mezzo d'angoli orizzontali, relativamente alla posizione dell'Osservatorio reale: e con osservazioni celesti; cioè di stelle circompolari, di stelle al zenit, e di altezze solstiziali del Sole.

Quanto al primo; ho osservato l'azzimutto occidentale della lanterna *des galeries du Louvre* = 17°41', quello pure occidentale del campanile di S. Rocco = 126°8', quello simile della cupola dell'Assunzione = 116°23', e quello orientale della cupola del Collegio Mazarino = 7°17'. Combinando questi dati, e prendendo la posizione degli accennati campanili, nel Tomo VIII delle Efemeridi di Parigi pubblicate dal Sig. *de la Lande*, alla pag. LXI dell'Introduzione, ho conchiuso esser di tese 34 la distanza dalla mia Specola alla meridiana dell'Osservatorio regio, senza che detta quantità s'allontani di mezza tesa da alcuno de' calcoli; ed esser di tese 1583 la distanza della mia Specola dalla perpendicolare del detto Osservatorio reale, con divario di sole $3\frac{1}{2}$ tese dal calcolo più discorde. Ne segue che in longitudine il mio Osservatorio sta 0",2 di tempo all'occidente del regio, e in latitudine 1' 40" più al nord.

La latitudine dell'Osservatorio regio è di 10 in 14 secondi sopra 48° 50'. Il Sig. *Maskelyne*, nel I Vol. degli Atti della Società reale di Londra pel 1787, prova i 14″ con le osservazioni di *la Caille*; e così s'è adottato comunemente in Parigi, e da molt'anni nella Conoscenza de' tempi, da che il definì lo stesso *la Caille* per grandissimo numero di osservazioni (*Mém. de l'Acad. des sciences pour* 1755). Il Sig. *Gentil* dopo accurata discussione decide per li 13″ (*Mém.* 1783). *Cassini* de Thury (*Mérid. vérifiée* pag. 281) trova da alcune sue osservazioni 10″ e da altre 12″. Crederò dunque poter prefiggere come dato sicuro, che la latitudine della mia Specola non può esser minore di 48° 51' 50″, nè maggiore di 48° 51' 54″. Sta ora alle osservazioni celesti il toglier, se sia possibile, questa incertezza.

Il mio quadrante, con cui furon fatte, non ha veramente altro che tre piedi di raggio: ma è di tal pregio, che avea meritato al suo autore il Sig. *Mégnié* mezzo il premio proposto dall' Accademia delle Scienze a chi si fosse segnalato nella costruzione di un istromento sì fatto. E' esso armato di un cannocchiale mobile con obbiettivo acromatico a due vetri del diametro di due pollici, e con due micrometri, l'uno esteriore a vite, l'altro interiore a fila, in ciascuno de' quali si distingue il minuto secondo. Mi riserbo poi di narrare in altra occasione quai mezzi ho adoprati per rilevare con l'ultimo scrupolo gli errori della divisione di questo quadrante, il che mi ha costato più mesi d'improba fatica.

Or pongo tosto sott'occhio a' lettori nelle tre seguenti Tabelle il ristretto delle mie osservazioni celesti, che servono principalmente a determinare la latitudine della mia Specola in Parigi.

TABELLA I.

Stelle circompolari.

Nome delle Stelle.	Osserv. sop. il polo.	Differ. estreme	Osserv. sot. il polo.	Differ. estreme	Latitudine di Parigi.	Declinazione 1783.
ι Dragone	N.° 2	0″, 5	N.° 2	2″, 4	48°51′53″,0	59°43′ 53″,0
θ Orsa minore	5	4, 1	4	3, 9	54, 1	78 3 52, 8
ζ Orsa minore	8	4, 0	5	4, 8	53, 3	78 27 9, 1
asc. r. 16ʰ 11′	4	3, 9	5	7, 5	54, 0	77 21 51, 5
η Dragone	8	7, 9	4	5, 0	56, 3	62 0 35, 9
Somme	N.° 27	20″, 4	N.° 20	23″, 6	risult.° 54, 0	

TABELLA II.

Stelle al zenit.

Stelle e Cataloghi.	Declinazione 1783	N.° delle osservaz.	Differ. estreme	Latitudine di Parigi
α di Perseo *la Caille*	49° 4′ 24″, 8	9	6″, 5	48° 51′ 53″,6
Mayer	23, 0			51, 8
Bradley	24, 1			52, 9
δ di Perseo *la C. B.*	47 4 36, 6	11	5, 0	53, 8
η Orsa mag. *C. M. B.*	50 24 7, 6	10	10, 0	50, 0
γ Dragone *la Caille*	51 31 17, 3	4	3, 8	56, 1
Mayer	21, 5			60, 3
Bradley	19, 5			58, 3
γ Cigno *la Caille*	39 34 21, 7	3	0, 3	56, 9
Somme		N.° 37	25, 6	risultato 55, 6

TABELLA III.

Solſtizj oſſervati in Parigi.

Epoche.	Oſſervazioni.	Diff. eſtreme	Riſultati				
Decemb. 1782	N.° 6	9″,1	diſt. al zenit vera	72°	19′	50″,	8
Giugno 1783	6	6,0	idem	25	23	55,	7
			diſt. de' tropici	46	55	55,	1
Marzo 1783			obliquità media	23	27	57,	6
			latitudine	48	51	53,	3
Giugno 1783	6	6,0	diſt. al zenit vera	25	23	55,	7
Decemb. 1783	39	5,8	idem	72	20	4,	4
			diſt. de' tropici	46	56	8,	7
Settembre 1783			obliquità media	23	28	4,	3
			latitudine	48	52	0,	0
Decemb. 1783	39	5,8	diſt. al zenit vera	72	20	4,	4
Giugno 1784	41	13,2	idem	25	23	56,	4
			diſt. de' tropici	46	56	8,	0
Marzo 1784			obliquità media	23	28	4,	0
			latitudine	48	52	0,	4

Rappresenta la I Tabella 47 osservazioni di cinque stelle circompolari, la penultima delle quali non è ne' Cataloghi. Ho dichiarato il numero e le differenze estreme delle osservazioni d'ogni stella, onde sia manifesto il grado di fiducia che meritino. Ogni quantità per l'altezza del polo ed ogni declinazione sono trovate, prendendo al solito il mezzo aritmetico tra le osservazioni d'ogni stella, così per le superiori al polo, come per le inferiori, separatamente.

La declinazione di ι Dragone presa da *la Caille* e ridotta a 1 Gennajo 1783 cresce di 0″, 7 solamente sopra quella da me osservata. Quella di η è minore di 7′, 5 della mia. Nel Catalogo di *Flamsteed* vi ha poi errore di 10′ di meno nella declinazione di θ dell'Orsa minore; e di 1′ di più nella latitudine di ζ, come si trova facendo il calcolo con l'ascensione retta e con la declinazione di *Flamsteed*.

Ad avere il giusto mezzo tra i cinque risultati della Tabella per l'altezza del polo, dando a ciascuno quel peso ed influenza che gli si competono in proporzione del numero e della concordia delle osservazioni, gli ho moltiplicati ad uno ad uno per un fattore composto del respettivo numero delle osservazioni tra sopra e sotto, diviso per la somma delle differenze estreme tra le osservazioni medesime, indi con la somma dei detti fattori ho partito quella dei prodotti. Per esempio, il fattore che moltiplica la latitudine trovata col mezzo di ι del Dragone è $\frac{2+2}{0,5+2,4}$, o vero $\frac{40}{29}$; quello per θ dell'Orsa minore è $\frac{5+4}{4,1+3,9}$, o pure $\frac{9}{8}$; e così degli altri. Delle latitudini poi era superfluo comprender nel calcolo la quantità comune 48° 51′ 50″. Ho avuto dunque

$$\left(3'' \times \frac{40}{29} + 4'',1 \times \frac{9}{8} + 3'',3 \times \frac{130}{88} + 4'' \times \frac{90}{114} + 6'',3 \times \frac{120}{129}\right) : \left(\frac{40}{29} + \frac{9}{8} + \frac{130}{88} + \frac{90}{114} + \frac{12}{129}\right)$$

$= 3'',97$. E però la latitudine del mio Osservatorio in Parigi risultante da queste osservazioni è 48° 51′ 54″.

Le quantità contenute nelle due ultime colonne della Ta-

bella dipendono dalle refrazioni del *Bradley*, che sono quelle delle quali ho fatto uso, modificandole per altro secondo l'altezza del barometro e del termometro mediante la Tavola del Sig. *Bonne* che è la CLX del Tom. I della seconda edizione dell'Astronomia del Sig. *de la Lande*. Due ragioni m'hanno sforzato a prescegliere la tavola del *Bradley*. 1. Perchè meglio d'ogni altra mette d'accordo tra loro le altezze di polo risultanti dalle mie osservazioni delle stelle diverse circompolari. 2. Perchè le refrazioni di quel celebre Inglese, alle altezze di cui si tratta, son le più piccole ch'io conosca, parlando di tavole già stampate: e se le avessi adoperate più gagliarde, la latitudine sarebbe riuscita minore di 48° 51′ 54″, quando le altre osservazioni compendiate nelle Tabelle II e III me la danno anzi più grande. Concorrono dunque le due ragioni ora addotte a confermare alla tavola del *Bradley*, relativamente al clima di Parigi, quel primato, che già se le accorda dai più, se non m'inganno.

Vengo ora alla II Tabella, la qual dimostra la latitudine risultante da 37 osservazioni di cinque stelle vicine al zenit, tratta la loro declinazione dai Cataloghi più accreditati, e ridotta a 1 Gennajo 1783, come nella seconda colonna, mediante la formola 50″, 473 × sen. *obliquità intermedia* cos. *ascensione retta intermedia*, dove il fattore 50″, 473 è tolto dall'Astronomia del Sig. *de la Lande*, Tom. IV *supplém. à l'art.* 2745. Il risultato finale per la latitudine è 48° 51′ 55″, 6 investigando il mezzo con lo stesso metodo dichiarato per la Tabella I. Quanto sia alle declinazioni dei diversi Cataloghi, ho preso il mezzo aritmetico, quando la differenza non montava a 1″.

La latitudine dedotta dalle stelle al zenit è dunque maggiore di 1″, 6 di quella determinata immediatamente per via delle stelle circompolari. Ma oltre che nelle prime vi può esser dubbio di moto proprio, o di qualche error de' Cataloghi, che in fatti non sono concordi per tutte egualmente, ho stimato e stimo doversi negligere quel piccolo divario, e abbracciare e tenere la quantità conseguita dalle stelle circompolari, anche per esser questa ratificata dalle osservazioni terrestri, le quali permetterebbero diminuzione, non già accrescimento.

Mi

Mi lusingo pertanto che le 84 osservazioni, delle quali ho presentato i risultati nelle Tabelle I e II, possano aver qualche peso, non solo per definire a 48° 51′ 54″ la latitudine della mia Specola in Parigi, ma ancora per attenuar l'incertezza che rimanesse sopra la latitudine dell'Osservatorio reale 48° 50′ 14″.

Resta da parlare delle osservazioni solstiziali del Sole, raccolte nella Tabella III. Essa comprende quattro soli solstizj, per essermi stata da diversi contrattempi impedita l'osservazione dei tre susseguenti abbracciati dalla mia residenza in Parigi. Il copioso numero delle osservazioni negli ultimi due solstizj della Tabella non esce fuori dell'ottava avanti e dopo il solstizio; ma dipende dall'avere io fatto ogni giorno parecchie osservazioni, lontane tutt' al più un quarto d'ora dal meridiano, e ridotte al momento del mezzodì col soccorso della formola esattissima già da me pubblicata (*Trigonom.* 833). La metà di queste osservazioni fu fatta sull'orlo boreale, l'altra metà sull'australe del Sole: il che non ripeteremo poi per quelle di Verona. In questa maniera si toglie ogni incertezza sul diametro, che viene ad esser determinato da un gran numero di osservazioni, e che importa determinare accuratamente, poichè ogni cannocchiale lo rappresenta di grandezza diversa.

Trattandosi di osservazioni copiose ho creduto che bastasse pigliare il mezzo aritmetico tra quelle d'uno stesso dì, senza poi chiamare al paragone ed in computo le lor differenze estreme: le differenze che sono nella Tabella mostrano unicamente il divario dal maggiore al minore de' risultati medj diurni. Ho bensì moltiplicato ciascuno di questi pel numero delle osservazioni da cui è nato, ed ho partito la somma de' prodotti per quella delle osservazioni d'ogni solstizio. Alle distanze dal zenit, ricavate con questo metodo, ho applicato convenevolmente l'equazione 9″ cos. *nodo della luna*, e così liberate dalle apparenze della nutazione le chiamo *vere*, e sono quelle che ho consegnate nella Tabella.

Dicesi *media* comunemente l'obliquità dell'eclittica *vera*, cioè sviluppata dalle ineguaglianze periodiche della nutazione. L'obliquità dedotta da due solstizj consecutivi deve assegnarsi rigorosamente all'epoca dell'equinozio intermedio, e

così ho fatto per evitare sebben tenuissima anche la diminuzione di obliquità da un solstizio all' altro, proveniente dalle attrazioni de' pianeti. Ognun vede poi che le quantità per l'altezza di polo nella Tabella si rinvengono col sommare al solstizio di state l'obliquità con la distanza dal zenit, e col sottrarre la prima dalla seconda nel solstizio d'inverno.

Dai quattro osservati solstizj, presi a due a due successivamente, nascono nella Tabella tre calcoli e tre risultati. Li due ultimi calcoli molto bene si accordano tra di loro, ma pigliando in considerazione anche il primo, e moltiplicando al modo già detto ognuna delle tre latitudini risultanti, col respettivo fattore composto dal numero delle osservazioni diviso per la corrispondente somma delle differenze estreme, riesce la quantità media 48° 51′ 59″, 6 la quale eccede di 5″, 6 quella trovata di sopra per via delle stelle circompolari. Una tal discrepanza riceve singolar peso dalle osservazioni fatte in Verona, dove ha pur luogo stessissimi: laonde fa duopo che avanti di pronunziar cosa alcuna anche quelle sian poste di subito sotto gli occhi de' leggitori nelle seguenti quattro Tabelle.

TABELLA IV.

Stelle circompolari.

Nome delle Stelle.	Oſſervaz. ſop. il polo.	Differ. eſtreme	Oſſervaz. ſot. il polo.	Differ. eſtreme	Latitudine di Verona.	declinazione 1789
Cefeo d'Evelio	N.° 3	3″, 2	N.° 4	1″, 9	45° 26′ 2″, 3	85° 7′ 3″, 1
Polare	8	7, 1	11	7, 3	5, 9	88 10 52, 8
) Caſſiope	4	4, 8	6	4, 0	5, 2	75 5 15, 6
5 Caſſiope	3	2, 0	4	3, 8	5, 2	65 31 30, 6
ſc. r. 2^h 42′	6	6, 3	3	2, 5	6, 1	74 17 43, 4
2 Giraffa d'Evel.	6	5, 7	5	5, 3	6, 9	64 51 44, 1
Orſa minore	3	3, 9	4	6, 0	7, 1	78 32 20, 3
Orſa minore	5	5, 2	9	9, 9	7, 4	76 38 6, 6
Orſa minore	6	5, 2	8	6, 7	7, 6	75 1 6, 7
Orſa minore	5	5, 2	3	3, 2	2, 5	78 2 43, 9
Orſa minore	4	2, 1	6	7, 1	6, 3	78 26 4, 8
ſc. r. 16^h 11′	2	1, 3	3	4, 4	6, 2	77 20 55, 3
Dragone	4	3, 8	3	4, 8	6, 5	61 59 47, 2
Somme	N.° 59	55″, 8	N.° 69	66″, 9	riſult.° 5″, 5	

TABELLA V.

Stelle al zenit.

Stelle e Cataloghi.	Declinazione 1789	N.° delle osserv.	Differ. estreme	Latitudine di Verona.
θ di Perseo, *Bradley*	48° 19′ 34″,1	3	0″,4	45° 26′ 14″, 6
μ Orsa mag. *Bradley*	42 33 14,3	5	5, 9	3, 5
η Orsa mag. *la C.M.B.*	50 22 18,1	13	12, 3	6, 3
θ del Cigno, *Bradley*	49 44 11,0	3	1, 0	25 53, 6
δ del Cigno, *Bradley*	44 37 22,5	8	4, 1	26 5, 1
la Caille	25,6			8, 2
γ del Cigno, *la Caille*	39 35 28,4	5	5, 2	11, 3
α del Cigno, *la Caille*	44 32 2,2	7	4, 1	8, 5
Mayer	3,8			10, 1
Bradley	0,4			6, 7
Maskelyne	1,4			7, 7
ρ del Cigno, *Bradley*	44 39 57,4	11	10, 1	8, 5
2π del Cigno, *Bradley*	48 20 22,3	12	16, 3	11, 4
7 della Lucertola *Br.*	49 12 8,5	5	5, 0	15, 8
o Andromeda, *la C.*	41 11 44,6	7	7, 1	1, 5
1λ Andromeda, *Br.*	45 19 13,7	4	1, 6	22, 8
	Somme	N.° 83	76, 7	Risult.° 9, 1

TABELLA VI.

Stelle osservate in Parigi e in Verona.

Nome delle Stelle.	Osservaz. in Parigi.	Differ. estreme	Declinazione 1789	Osservaz. in Verona.	Differ. estreme	Latitudine di Verona.
2 Cassiope	N.° 10	5″, [illegible]	60° 39′ 39″, 3	N.° 4	3″, 4	45° 26′ 11″, 1
Cassiope	3	1, 4	52 44 1, 5	6	5, 8	8, 6
Cassiope	4	4, 0	56 41 29, 2	7	6, 8	12, 7
Perseo	2	0, 4	48 19 26, 0	3	0, 9	6, 5
Orsa magg.	10	10, 0	50 22 22, 2	13	12, 3	10, 4
Boote	2	1, 3	47 4 11, 0	14	10, 1	10, 1
Cigno	8	10, 1	49 44 22, 8	3	1, 0	5, 4
2 Cigno	5	4, 6	47 4 27, 2	8	8, 1	11, 4
Cigno	3	0, 3	39 35 25, 5	5	5, 2	8, 4
3 Andromeda	3	3, 2	47 51 54, 2	10	10, 2	6, 0
Somme	N.° 50	40″, 3		N.° 73	63″, 8	risult.° 8″, 7

TABELLA VII.

Solſtizj oſſervati in Verona.

Epoche.	Oſſervazioni.	Diff. eſtreme	Riſultati.				
Decemb. 1787	N.° 3	0″,9	diſt. al zenit vera	68°	54′	10″,	4
Giugno 1788	21	9, 1	idem	21	58	16,	1
			diſt. de' tropici	46	55	54,	3
Marzo 1788			obliquità media	23	27	57,	2
			latitudine	45	26	13,	3
Giugno 1788	21	9, 1	diſt. al zenit vera	21	58	16,	1
Decemb. 1788	18	3, 3	idem	68	54	12,	2
			diſt. de' tropici	46	55	56,	1
Settembre 1788			obliquità media	23	27	58,	0
			latitudine	45	26	14,	1
Decemb. 1788	18	3, 3	diſt. al zenit vera	68	54	12,	2
Giugno 1789	61	3, 2	idem	21	58	11,	5
			diſt. de' tropici	46	56	0,	7
Marzo 1789			obliquità media	23	28	0,	3
			latitudine	45	26	11,	8
Giugno 1789	61	3, 2	diſt. al zenit vera	21	58	11,	5
Decemb. 1789	30	4, 9	idem	68	54	7,	1
			diſt. de' tropici	46	55	55,	6
Settembre 1789			obliquità media	23	27	57,	8
			latitudine	45	26	9,	3

Rappreſenta la IV Tabella 128 oſſervazioni di 13 ſtelle circompolari, donde riſulta la latitudine della mia Specola in Verona di 45° 26′ 5″, 54, dato a ciaſcun de' 13 riſultati il peſo che merita, col metodo già adoperato per la Tabella I. Queſte oſſervazioni ſembrano degne di molta fiducia, poichè dal minore al maggiore de'13 riſultati il divario non è che di 5″, 3.

La declinazione della Polare, tolta dal Catalogo di *la Caille*, e ridotta a 1 Gennajo 1789, rieſce 2″, 6 più piccola della mia: traendola poi da 5 oſſervazioni che ho fatte in Parigi, e le cui differenze eſtreme montano a 5″, 7, ſorge 4″, 8 più piccola.

La declinazione di β dell'Orſa minore ſecondo il *Bradley* ſupera la mia di 3″, 4; e ſecondo *la Caille* di 10″, 4: ſi potrebbe però ſoſpettare in queſta ſtella un moto proprio il qual diminuiſca la declinazione.

La declinazione delle quattro ultime ſtelle della Tabella IV concorda molto bene con quella da me oſſervata in Parigi ed eſpoſta nella Tabella I. Le differenze ſono + 1″, 2; — 0″, 3; — 1″, 1; + 1″, 7. Il ſegno + ſignifica che la declinazione della Tabella IV è maggiore, il ſegno — ch' ella è minore di quella della Tabella I, ridotta a 1 Gennajo 1789. E queſta concordia aggiunge non lieve peſo alle latitudini di Parigi e di Verona dedotte dalle ſtelle circompolari.

Anzi poichè dalla mia declinazione di η del Dragone, oſſervata in Parigi, e comparata a quella di *la Caille*, ſi conchiude un annuo incremento di 0″, 23; l'incremento di 1″, 7 oſſervato in Verona cinque anni dopo, conferma il moto proprio di queſta ſtella, e non a diſcordia, ma quaſi tutto a conſenſo di oſſervazioni deve attribuirſi.

Nella V Tabella ſon contenuti li riſultati di 83 oſſervazioni di 12 ſtelle circonvicine al zenit. Queſti ſono aſſai più diſcordi di quelli della Tabella antecedente: il che può venire o da moto proprio delle ſtelle, o da qualche errore nelle declinazioni de' Cataloghi. Quindi è che il riſultato medio 45° 26′ 9″, 1 ottenuto col metodo già indicato, non può ſtare al paragone con quello ſomminiſtrato dalle ſtelle circompolari.

Sorge per altro a fiancheggiarlo la Tabella VI che reca il confronto di 73 osservazioni fatte in Verona con 50 fatte in Parigi sopra 10 stelle poco lontane dal zenit, per le quali la refrazione non può causare incertezza alcuna. Ma in questo confronto la latitudine di Verona dipende da quella del mio Osservatorio in Parigi 48° 51′ 54″. Come poi il risultato medio della Tabella VI si appoggia sull'esattezza e concordia tanto delle osservazioni Parigine quanto delle Veronesi, così per ogni stella ho preso la somma delle osservazioni da me fatte in ambi i luoghi, la ho divisa per la somma delle differenze estreme correlative, e con il quoziente ho moltiplicato la latitudine di Verona data da quella stella, operando nel resto come s'è detto per la Tabella I. Il risultato medio per la latitudine emerse 45° 26′ 8″, 68.

Finalmente la Tabella VII comprende li risultati di cinque solstizj osservati in Verona, ricavati in tutto e per tutto nel modo stesso tenuto per la Tabella III. Avendo moltiplicato ciascuna delle quattro latitudini pel respettivo numero delle osservazioni da cui deriva, diviso dalla corrispondente somma delle differenze estreme, la quantità di mezzo riuscì 45° 26′ 11″, 2.

Dopo fatta la dichiarazione del contenuto nelle sette Tabelle, resta ora da ragionare sul confronto e sul peso de' loro risultati. E' degno di considerazione e di esame quel che ho già accennato, cioè che la latitudine ricavata dai solstizj eccede quella dedotta dalle stelle circompolari d'una quantità che può dirsi uguale per le osservazioni di Parigi e per quelle di Verona: in quelle di Parigi l'eccesso è di 5″, 6; in quelle di Verona di 5″, 3.

E prima si dee far palese che quest' ultimo era più di due volte maggiore mentre adoperavo le refrazioni del *Bradley*. Ma una tanta discordanza mi pose in sospetto che le rifrazioni in Verona fossero minori di quelle di Parigi. Mi applicai pertanto a questa importante indagine, e riflettendo che dove l'effetto era più gagliardo ivi giovava esplorarne la quantità, posi l'animo ad osservare l'altezza meridiana di varie stelle vicine all'orizzonte, e di posizione nota dai Cataloghi; altre però verso tramontana, ed altre verso mezzodì, posciachè se da una parte la latitudine assunta mi presentasse

taſſe una refrazion troppo grande, dall' altro me la produrrebbe troppo piccola, e l' error divenuto doppio doveva farſi più manifeſto. In queſta maniera da diverſe oſſervazioni di τ, γ, α, λ di Perſeo nel loro paſſaggio ſotto il polo; e di ν, η Centauro, β, δ Lupo; ridotte concordi mediante le due ſuppoſizioni, che le rifrazioni medie ſiano eguali al nord e al ſud, e che la latitudine ſia di 45° 26′ 8″, 8; ho ſcoperto che le refrazioni medie in Verona ſono in fatti più piccole di $\frac{1}{25}$ di quelle che porta la tavola del *Bradley*. Nè ſi deve temer di errore per capo delle rifrazioni nelle declinazioni de' Cataloghi di *la Caille*, *Mayer* e *Bradley*, poichè la poſizion delle ſtelle che ho traſcelte fu da que' celebri Oſſervatori determinata in latitudini dove paſſavano appreſſo al zenit.

E' già ricevuto dagli Aſtronomi, che le rifrazioni ſcemino quanto più le terreſtri plaghe ſono vicine all' equatore. Ma per ſoli 3° $\frac{1}{2}$ di avvicinamento, dalla latitudine di Parigi a quella di Verona, non mi farei avviſato che doveſſero ſcemar tanto. E pure il medeſimo ſcemamento a puntino di $\frac{1}{25}$ ritraſſi da oſſervazioni dirette e indipendenti da' Cataloghi, cioè da un gran numero di altezze d' intorno a 30° di Ψ dell' Orſa maggiore, che paſſa a 12′ dal mio zenit, preſe per più giorni col quadrante dopo avere ben oſſervato l' altezza meridiana, e con altezze corriſpondenti circonvicine il momento della culminazione.

Le refrazioni del *Bradley* diminuite di $\frac{1}{25}$ coincidono appunto con la nuova formola inveſtigata dal Chiar. Sig. Ab. *Oriani* nella Appendice alle Efemeridi Milaneſi pel 1788: formola aſſai pregevole, perchè indipendente da ogni ſorta d' ipoteſi, e ſolo incapace di eſibire le refrazioni in tutta eſattezza per le altezze minori di 5°. La formola *Oriani* rappreſenta dunque preciſamente le rifrazioni di Verona, o vogliaſi dire della plaga di mezzo tra il polo e l' equatore. Tratta pertanto da quella formola una tavola di refrazioni,

di questa mi servo nel calcolare le mie osservazioni, e da questa dipendono i risultati contenuti nelle ultime quattro Tabelle.

Le differenti refrazioni da me adottate, per Parigi, e per Verona, ricevono confermazione dal generare che fanno risultati conformi dalle osservazioni fatte in ambi i luoghi; essendosi veduto come sì le une che le altre danno 5″ $\frac{1}{2}$ di differenza tra la latitudine dedotta dai solstizj e quella prodotta dalle stelle circompolari. Tale concordia mi sembra poi di gran peso per additare una causa comune di quel divario: e questa causa, dopo averne molte pensate ed in vano a disamina sottoposte, non so avvisare che possa esser altra principalmente, se non quella del sito ove tenni il termometro tanto in Parigi quanto in Verona, esposto cioè a tramontana fuori d'una finestra, come ho veduto praticarsi generalmente dagli Astronomi. Or quell'ambiente è senza dubbio più freddo in qualunque tempo di quel che soprasta immediatamente all'obbiettivo del cannocchiale. Chiuso quest'ultimo ambiente nella stanza della Specola, l'aria esteriore vi si frammescola lentamente la notte per via della piccola cateratta che tiensi aperta nel solo frattempo delle osservazioni; ed è poi scaldato direttamente da' raggi solari durante l'osservazioni del maggior luminare. La differenza probabilmente sarà più tenue nelle osservazioni notturne delle stelle circompolari, di quel che nelle diurne del Sole; ma in ogni tempo il mercurio deve esser più alto in un termometro stante alla bocca del cannocchiale, che non in altro guardante il nord dallo stipite esterno di una finestra: per conseguenza le rifrazioni che usar dovevo ne' miei calcoli decrescono certamente alcun poco da quelle che ho adoperate. Or questa diminuzione aumenta la latitudine risultante dalle stelle circompolari, e sminuisce quella proveniente dai solstizj. L'una e l'altra correzione vagliono dunque a ravvicinare que' risultati: e sebbene non mi persuada, che correggendo sì fatto error delle rifrazioni dipendente dalla situazion del termometro, debba distruggersi affatto la differenza di 5″ $\frac{1}{2}$ tra i risultati medesimi; credo però, a qualche prova già

ſatta, che ſe ne toglierà buona parte. Allora o il reſiduo ſarà diſpregevole, o vero potrà imputarſi alla mancanza delle oſſervazioni igrometriche, le quali non furono da me fatte, nè da altri ancora ch' io ſappia pigliate in computo.

Il celebre Boſcovich raccomandò eſpreſſamente (Tom. II. delle ſue Opere ſtampate in Baſſano, pagg. 443, 462) di tenere il termometro, il barometro, e l' igrometro vicini all' obbiettivo del cannocchiale, appoggiandoſi ſul principio già dimoſtrato dal *Neuton*, e da molti altri dopo di lui, che le refrazioni, negli aſtri ſingolarmente non troppo proſſimi all' orizzonte, dipendono unicamente dalla coſtituzione dell' atmosfera nell' infimo ſtrato che all' obbiettivo ſopraſta. I riſultati concordi delle mie oſſervazioni in Parigi e in Verona eſibiſcono, ſe mal non m' appongo, una prova luminoſa dell' utilità ed importanza di quel ricordo. Mi riſerbo pertanto di eſaminare ne' venturi ſolſtizj, non che nelle notti e temperature corriſpondenti e conformi a quelle in cui feci le oſſervazioni delle ſtelle circompolari, qual ſia la preciſa differenza che paſſa in que' tempi dal tenere il termometro eſpoſto nel conſueto ſuo ſito al tenerlo adjacente alla bocca del cannocchiale, in guiſa però che il Sole non lo feriſca direttamente. Da queſte eſperienze, che ſaran fatte con due termometri ben concordi, ſpiccherà per minuto la correzione che ſpetta alle refrazioni da me adoperate, ed allora potrò ſtatuire più ſcrupoloſamente qual ſia la vera latitudine della mia Specola. Intanto avviſando che quella correzione debba eſſer più tenue ſulle oſſervazioni delle ſtelle circompolari, che non per quelle de' ſolſtizj, adotto ſenza ribrezzo d' error ſenſibile la quantità di 45° 26′ 7″, che molto ſi accoſta anche ai riſultati delle Tabelle V, VI. Ad aver poi la latitudine della Torre maggiore della Città fa duopo aggiungere 2″: laonde non era gran fatto erronea la quantità di 45° 26′ 26″, la qual ſoleva infino ad ora tenerſi comunemente.

Per le oſſervazioni di Parigi, la mia lontananza preſente da quella Metropoli non mi permette più di determinare ſul luogo l' error dipendente dalla ſituazione preciſa dove tenevo il termometro; nè ora potrei, per le ragioni già addotte, ammettere accreſcimento alla quantità 48° 51′ 54″ per quel-

la latitudine. Bensì per effere meno copiofe quelle offervazioni che non quefte di Verona, v'è più adito a fofpettare qualche piccolo errore ne' rifultati delle Parigine, in virtù del quale rimanga compenfato nella I Tabella l'error che dipende dalla fituazion del termometro. Stimo però dover lafciare intatte quelle offervazioni delle ftelle circompolari.

Rimane finalmente da ragionare dell'obliquità dell'eclittica. Le fette determinazioni contenute nelle due Tabelle, III, VII, e ridotte a 1 Gennajo 1790 fupponendo la diminuzion fecolare di 57″, diventano come fegue.

Dall' obliquità di Marzo 1783	. . .	23° 27′ 53″, 8
di Settembre	. . . .	60, 7
di Marzo 1784	. . . .	60, 7
di Marzo 1788	. . . .	56, 2
di Settembre	. . . .	57, 3
di Marzo 1789	. . . .	59, 9
di Settembre	. . . .	57, 7

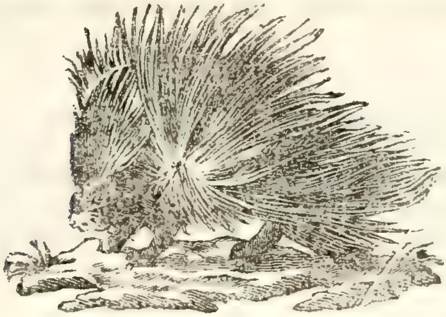
Il mezzo aritmetico tra quefti fette rifultati farebbe 23° 27′ 58″, 0. Ma fe fi tenga conto, al modo già dichiarato, del numero delle offervazioni e delle loro differenze eftreme, fi trova 23° 27′ 58″, 8. Stimo poi che la correzion delle rifrazioni per caufa della fituazion del termometro importerà il diffalco di 2″ circa. Ma perchè la differenza tra il maffimo e il minimo de' precedenti fette rifultati è alquanto notabile, mentre arriva quafi a 7″, non vo tralafciar d' indagare l'obliquità dai folftizj eftivi foltanto, dove ogni error fulle refrazioni deve effer tenue. Pofta però la latitudine della mia Specola in Parigi 48° 51′ 54″, e di quella in Verona 45° 26′ 7″, ottengo li feguenti rifultati per l' obliquità ridotta a 1 Gennajo 1790.

Dal folftizio eftivo 1783		23° 27′ 54″, 6
1784	. . . .	54, 5
1788	. . . .	50, 0
1789	. . . .	55, 2

Il penultimo rifultato fi appoggia fopra due terzi manco di offervazioni di quel che fia l'ultimo, e le differenze eftreme tra di effe fono tre volte maggiori che in quefto. Non merita però di ftare al paragone cogli altri tre, che fi accor-

dano molto bene tra loro, e da' quali nasce l'obliquità media dell' eclittica a 1 Gennajo 1790 = 23° 27′ 54″, 8; cioè 2″ meno di quel che ritraemmo di sopra dai sette risultati, considerata d'altrettanto la correzione per causa della situazion del termometro. Prendo il mezzo per ora tra queste due determinazioni, e statuisco l' *obliquità media* a 1 Gennajo 1790 = 23° 27′ 55″, 8. Ma la medesima a 1 Gennajo 1750 era di 23° 28′ 18″, 5 secondo le osservazioni di *la Caille*, *Mayer*, *Bradley*, e del Sig. *Gentil*, le quali non lasciano l'incertezza nè pur di 1″ (*Con. des Temps pour* 1791, pag. 178). Dunque la diminuzione in anni 40 rileva 22″, 8; e però la secolare monta a 57″: così la impiego in tutti i miei calcoli.

Le osservazioni moltiplici, che il Sig. Ab. *Reggio* ha publicato finora nelle Efemeridi milanesi, danno l'obliquità ridotta a 1 Gennajo 1790 = 23° 27′ 56″, 2: quelle non meno accreditate del Sig. *Slop* (*Pisis* 1789) 23° 27′ 54″, 8. Non posso negare qualche fiducia alle mie, veggendole stare in mezzo fra quelle d'Osservatori di tanta fama e valore.



TEORIA GENERALE

DEL MOTO ROTATORIO SPONTANEO DE' CORPI NATURALI SOPRA PIANI INCLINATI.

Del Sig. PAOLO DELANGES.

LO scopo che mi prefiggo in questa mia Memoria si è di dimostrare e nello stesso tempo di rendere universali le leggi ed i canoni che intorno al moto rotatorio spontaneo de' corpi ho rilevate da accurati e moltiplici esperimenti (*a*). Questo è ciò che per lo più si ottiene, e che può pretendersi singolarmente ne' soggetti Fisico-Matematici, onde mettere a coperto i risultati esperimentali, e i raziocinj a vicenda; dovendo però i primi servire di scorta a' secondi, avvegnachè non possiamo nè dobbiamo stabilire per vere l' immagini, o l' ipotesi assunte, se le conseguenze da esse dedotte non corrispondono ai fenomeni naturali. Volendosi pertanto procedere nel presente argomento per tale infallibile sentiero, ecco i fatti che deggionsi avere in mira, ed ai quali la Teoria generale che cerchiamo dovrà esattamente adattarsi.

I.

Un corpo di qualsivoglia figura se ne sta in quiete sopra un piano orizzontale, qualunque sia lo stato della scabrosità delle superficie in contatto, e capovolgesi solo quando la direzione del suo centro di gravità cade fuori della base.

(*a*) *Nuova discussione intorno agli attriti de' Solidi*. Art. IV. Bibliot. Fisica d' Europa Tom. VI. Pavia.

II.

Se il corpo sia omogeneo e di figura rotonda, come cilindrica, sferica, ecc., in guisa che nella metà dell'asse di rotazione vi sia il centro di gravità, e, poggiato sopra un piano orizzontale, venga sollecitato al moto da una forza tangenziale costante; si muove esso di moto rotatorio perfetto, cioè il moto progressivo del centro è uguale all'angolare di qualunque punto della circonferenza.

III.

Poggiandosi sopra un piano inclinato un prisma di base rettangola, in cui l'angolo costituito nel piano verticale e compreso dalla perpendicolare alla base condotta dal suo centro di gravità, e dalla retta che dallo stesso centro si conduce all'estremità della base, sia maggiore dell'angolo dell'attrito, in tutte l'elevazioni di questa, discende il corpo di solo moto progressivo; ma se il sopraenunciato angolo sarà minore dell'angolo dell'attrito, comincia il corpo a capovolgersi nell' elevazioni anteriori a quella che conviene all' attrito medesimo; e passandosi a elevazioni maggiori, vie più insieme striscia innanzi in guisa, che ridotto il piano verticale, discende di solo moto progressivo.

IV.

Se cade un corpo lungo un piano inclinato strisciando, discende di moto uniformemente accelerato, e la forza acceleratrice è la differenza tra il momento alla discesa, dipendente dalla gravità assoluta del corpo, e l'attrito, ch'è proporzionale alla pressione che soffre il piano medesimo.

V.

Un corpo rotondo, come un cilindro, una sfera, ecc., discende lungo un piano inclinato di moto rotatorio perfetto fino all'elevazione che misura l'attrito che il corpo ro-

tondo incontrerebbe sullo stesso piano se dovesse strisciarvi, o procedere di solo moto progressivo; e quindi nelle successive elevazioni si muove di moto misto aumentandosi vie più il progressivo, e diminuendosi all'opposto il rotatorio in modo che, fatto il piano verticale, precipita il corpo radendolo di moto progressivo solamente.

VI.

Il corpo rotondo si muove pel piano inclinato di moto uniformemente accelerato, sì in quelle elevazioni nelle quali discende di moto rotatorio perfetto, che in quelle nelle quali procede di moto misto, aumentandosi nelle seconde dal moto rotatorio il progressivo del centro che competerebbe al solo moto strisciante.

Ora avanti di proseguire, debbo, com'è di dovere, raccogliere qui sotto l'occhio i modi, co'quali è stato trattato l'argomento da quegli illustri uomini, che, per quanto io sappia, sonovisi applicati prima di me.

Indicando *DO* (fig. 1.) l'attrito che un corpo cilindrico, o sferico incontrerebbe strisciando lungo il piano inclinato *AB*, sicchè posto *F* l'attrito orizzontale sia $DO = \frac{BC}{AB} \cdot F$, stabilisce *Bernoulli* (a) che il corpo rotondo *DNFM* discenda pel piano inclinato *AB* di moto rotatorio, come se fosse tirato in dietro nel punto del toccamento *D* dalla forza *DO*, e fosse sospeso dallo stesso punto *D*, onde ad ogni istante debba concepirsi il moto dell'intera massa intorno al centro d'oscillazione *L*. Premesse queste due ipotesi, e chiamato *P* il peso assoluto del corpo discendente, v la velocità progressiva del centro di gravità *G*, ed u la velocità angolare di ciascun punto della periferia *DNFM* intorno allo stesso centro, instituisce il cel. Autore, pe'principj meccanici, le due equazioni $v = \frac{AC}{AB} \cdot t$, $u = \frac{DI}{GL} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot t$; e quin-

(a) Com. Acad. Scient. Imperialis Petropolitanæ. Tom. XIII. ad an. 1741 43.

e quindi ſottraendo dalla velocità progreſſiva del centro G la velocità $\frac{GL}{DL} \cdot u$, di cui, ſecondo lui, viene ritardato a cagion del moto rotatorio; e dalla velocità rotatoria ſottraendo quella che naſce dall' attrito cioè $\frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot t$; trova finalmente che la velocità aſſoluta del centro G è eſpreſſa dalla formula (U)

$$\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \right) t \dots\dots\dots (U)$$

e la velocità angolare di ciaſcun punto della periferia, che gira verſo A intorno allo ſteſſo centro G, dalla formula (V)

$$\left(\frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} \cdot \frac{DG}{GL} \right) t \dots\dots\dots (V)$$

Applicando pertanto queſte formule generali ad un caſo particolare, ſia il corpo $DNFM$ che dee diſcendere pel piano inclinato AB un cilindro, ſicchè $GL = \frac{1}{2} DG$, o $\frac{DG}{GL} = 2$, e ſi troverà che la velocità progreſſiva del centro alla rotatoria avrà la ragione

$$\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P} : \frac{2BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}$$

ovvero riducendola a minimi termini

$$AC \cdot P - BC \cdot F : 2BC \cdot F$$

Suppoſto poi che l'attrito orizzontale ſia il terzo della preſſione cioè $F = \frac{1}{3} P$, conduce l'eſpoſta teoria *Bernoulliana* a conchiudere, che il cilindro dee diſcendere di moto rotatorio perfetto finchè ſia $AC = BC$, cioè fino a che il piano inclinato AB ſiaſi inalzato all angolo di 45°. Il che è contrario all'eſperienza (*IV*), la quale dimoſtra che nelle enunciate circoſtanze diſcende il cilindro di moto rotatorio perfetto fino all'elevazione di ſoli 18° circa.

Segue il celebre *Eulero* le ipoteſi *Bernoulliane*, ſalvo che, chiamando x lo ſpazio percorſo dal corpo $DNFM$, v l'altezza competente alla velocità progreſſiva del centro G nella direzione GH parallela al piano inclinato AB, ed u l'al-

tezza competente alla velocità progreſſiva del centro G nella direzione GH parallela al piano inclinato AB, ed u l'altezza dovuta alla velocità rotatoria di qualſivoglia punto M della periferia, prende per la forza dell'attrito nell'iſtante che il corpo percorre di moto progreſſivo lo ſpazietto dx, ed il punto M di moto rotatorio lo ſpazietto $\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, non $\frac{BC}{AB}\,.\,Fdx$, ma $\frac{BC}{AB}\left(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right)Fdx$, eſſendo ſecondo lui la celerità con cui ſtriſcia il punto D ſul piano AB $\sqrt{v}-\sqrt{u}$, cioè la differenza tra la progreſſiva e la rotatoria. Poſcia nominando c il raggio GD del corpo, e Phh il momento d'inerzia riſpetto al di lui aſſe, combina ſul principio delle ſollecitazioni iſtantanee le due equazioni ſeguenti

$$dv=\left(\frac{AC}{AB}-\frac{BC}{AB}\left(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right)\frac{F}{P}\right)dx$$

$$du=\left(\frac{BC}{AB}\left(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right)\frac{F\,.cc}{Phh}\right)\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

dalle quali determina generalmente la ragion della velocità progreſſiva del centro G alla rotatoria del punto qualunque M nella periferia del corpo $DNFM$; anzi che poſto che ſia un cilindro, e poſto come ſopra $F=\frac{1}{3}P$, trova che la velocità progreſſiva alla rotatoria ſta nella ragione

$$3m+n+\sqrt{\left(9mm+6mn+9nn\right)}:4n$$

eſſendo il ſeno dell'angolo $ABC=m$, il coſeno $=n$, ed il ſeno tutto, cioè $m^2+n^2=1$. Ma ſiccome nella riferita proporzione l'antecedente è ſempre maggiore del conſeguente; così ne ſegue, che, ſecondo l'Euleriana teoria, nel cilindro diſcendente è la velocità progreſſiva del centro G, e vie più nelle ſucceſſive elevazioni del piano inclinato AB, maggiore della rotatoria che ha il punto M preſo nella periferia $DNFM$. Riſultamento ch'è più contrario all'eſperienza (IV) di quello che ſomminiſtra la poco fa eſpoſta teoria Bernoulliana.

L' Ab. *Boſſut* (*a*) riguardando anch'eſſo l'attrito *DO* come una forza che agiſca tangenzialmente alla circonferenza d' un cerchio omogeneo, quantunque ſupponga il moto progreſſivo del centro *G* indipendente dal rotatorio di un punto qualſivoglia della circonferenza *DNFM*; originato ſemplicemente il primo dalla differenza delle forze *GH DO*, ed il ſecondo dall'attrito *DO*; nulladimeno eſibiſce delle formule con cui rappreſenta i moti ſuddetti, le quali riſultano identiche alle Bernoulliane (*U*) (*V*) ſopra riferite. Ma non ſolo è contrario all'eſperienza il riſultamento finale dell'accennate teorie intorno a tale qualità di moto, che lo ſono pure le ipoteſi ſulle quali vengono appoggiate. E primieramente non è ſtato diſtinto da' mentovati Autori il caſo che il corpo rotondo diſcende di moto rotatorio perfetto da quello in cui diſcende di moto miſto, cioè di rotatorio e progreſſivo inſieme, come inſegna accadere l'eſperienza (*V*). Non è poi concepibile con *Bernoulli* che diſcendendo il corpo rotondo *DNFM* anche di moto rotatorio miſto pel piano inclinato *AB*, rotarſi debba ad ogni iſtante intorno al punto d' appoggio *A*, come ſe da eſſo foſſe ſoſpeſo, e che in conſeguenza il moto di rotazione faccia che non ſia v la velocità progreſſiva del centro *G*, ma $v - \frac{GL}{DL} - u$; mentre l'eſperienza (VI) all'oppoſto dimoſtra che la velocità angolare in vece di diminuire aumenta la progreſſiva del centro. Nè è inoltre ammiſſibile con *Eulero* che ſia $\frac{BC}{AB}\left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right) F$ la forza dell' attrito che incontra il corpo diſcendendo lungo il piano inclinato *AB*, e non $\frac{BC}{AB} \cdot F$, ora mai che ſiamo certi non avere influenza la velocità nell'attrito de' corpi in moto (*IV*). E' però bensì vero che all'attrito dee attribuirſi diſcendere il corpo rotondo *DNFM* pel piano inclinato *AB* di moto rotatorio, ma ſolamente perchè impedendo eſſo il

Nn ij

(*a*) Trat. Element. di Meccanica. Vol. Sec. pag. 149. In Pavia MDCCLXXXVIII.

moto progreſſivo al corpo dalla prima elevazione fino a quella in cui acquiſta impeto alla diſceſa, fa che la verticale GE condotta dal centro di gravità G cada fuori del toccamento D, il che è conforme all'eſperienza (I); nè v' ha biſogno che co' ſuddetti Autori, per iſpiegare tale natura di movimento, d' immaginarſi che l' attrito agiſca ſul corpo in guiſa di forza tangenziale riguardando in conſeguenza l' attrito come una forza attiva ed eſtranea, e non come una ſemplice reſiſtenza che tende ſoltanto a contraſtare o diſtruggere parte della gravità relativa che anima il corpo a diſcendere pel piano inclinato.

Queſta terza ipoteſi, che ſerve di fondamento alle due teorie ſopraeſpoſte, cerca *Eulero* di convalidarla coll' eſperimento (III), da cui rilevandoſi che eſſendo (fig. II) $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$ il corpo $DEHI$ di baſe rettangola diſcende lungo il piano inclinato AB di ſolo moto progreſſivo, ed eſſendo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$ diſcende con moto miſto di rotatorio e progreſſivo inſieme, riflette „ Quoniam in hoc criterio elevatio plani inclinati „ ſeu angulus ABC non ineſſe deprehenditur, perſpicuum eſt, „ quod corpus in una plani elevatione ſine provolutione deſcendat, idem in omni alia elevatione quacumque ſine provolutione eſſe deſcenſurum . . . . . . Neque igitur in judicio hac de re ferendo ſpectari oportet rectam verticalem „ ex centro gravitatis corporis ductam, utrum ea extra baſin an intra cadat, uti aliquibus auctoribus placuit; ſed „ ex ſolo angulo DGF totum judicium eſt petendum. „ Ma ſe il corpo $DEHI$ diſcende di ſolo moto progreſſivo qualora $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$, non trovaſi eſſo forſe, paſſato anche l' angolo di elevazione ABC competente alla reſiſtenza dell' attrito, in grado di diſcendere prima che la verticale condotta dal centro di gravità G cada fuori della baſe ED? E poſto ciò che è infallibile, non v' ha al certo ragione alcuna che nelle ſucceſſive elevazioni debba, quantunque cada fuori della baſe la verticale ſuddetta, tentare il corpo $DEHI$ di capovolgerſi ſull' eſtremità D, come non ve n' ha nel caſo che ſi faceſſe aſtrazione della reſiſtenza d' attrito. Che ſe il corpo

DEHI, qualora $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$, ſi diſpone al moto col capovolgerſi inſieme ſull' eſtremità *D* della baſe *ED*, è manifeſto che ciò dee attribuirſi, quanto alle elevazioni compreſe dalla prima che ſia maggiore dell' angolo *FGD* fino a quella che conviene all' attrito orizzontale, ſoltanto al cadere fuori della baſe la verticale che paſſa pel centro di gravità *G*; mentre in tali elevazioni del piano inclinato *AB*, per eſſere impedito dall' attrito il moto progreſſivo al corpo, ſi trova eſſo come ſe foſſe poggiato ſopra un piano orizzontale, e cadeſſe fuori della ſua baſe la verticale accennata. E ſiccome poi nelle ſucceſſive elevazioni a quella, ch' è dovuta all' accennato attrito, va il corpo *DEHI* lentamente acquiſtando impeto alla diſceſa, così non può ad un tratto perdere la tendenza di capovolgerſi inſieme ſull' eſtremità della baſe *D*, procedendo perciò di moto miſto: di che ne fa prova il vedere che di mano in mano nelle elevazioni maggiori dell' enunciata vie più il punto *D* ſi diſcoſta, a rivoluzione compiuta, dal corriſpondente ſul piano inclinato *AB*, in guiſa che finalmente nella verticale diſcende di ſolo moto progreſſivo. Non può adunque arguirſi dal ſoprammentovato eſperimento nè che l' angolo d' elevazione *ABC* ſia indifferente nel moto del ſolido *DEHI* che diſcende pel piano inclinato *AB*, nè che non debba averſi riguardo alla poſizione della verticale che paſſa pel centro di gravità *G*; ma bensì che eſſendo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$, cioè l' angolo *DGF* minore dell' angolo di elevazione *ABC*, miſura dell' attrito orizzontale, non è ſollecitato il corpo *DEHI* dall' elevazione del piano inclinato *AB* uguale all' angolo *DGF* fino alla detta *ABC*, che di capovolgerſi ſull' eſtremità *D* della baſe *ED*, e che nelle ſucceſſive elevazioni maggiori è ſollecitato nello ſteſſo iſtante e di capovolgerſi e di procedere innanzi.

Dalle coſe eſpoſte ne ſegue pertanto che il corpo rotondo *DNFM* (fig. I.) poſto ſul piano inclinato *AB*, conſiderando anche eſteſo, com' è di fatto, il toccamento *ee*, capovolgeſi perchè è difficile non accada, che ne' ſolidi naturali in attrito non abbia *F* a *P* maggior ragione di $\frac{1}{2}ee$, cioè di

De a *GD*. Così trascurando le irregolarità che possono produrre nel moto del corpo *DNFM* le ripercussioni obblique dei successivi elementi all' *ee* che deggiono applicarsi sul piano inclinato *AB*, è chiaro che dee procedere il corpo di moto rotatorio perfetto, trovandosi ad ogni istante costituito nell' istesse circostanze; e ciò fino a quella elevazione che lo metta in istato di cominciar a sentire un moto progressivo pel piano medesimo, per cui, come è noto per esperienza, procede poscia di moto misto, ovvero di moto rotatorio imperfetto. Finalmente dovremo distinguere due casi in un corpo rotondo che cade lungo un piano inclinato, vale a dire quello in cui è dotato solamente di un moto rotatorio, e quello in cui ha insieme un moto progressivo; nel primo dee riguardarsi il moto progressivo del centro come conseguenza del rotatorio, e nel secondo come generato dal rotatorio, e da una potenza congiuntamente da cui viene sollecitato.

Lemma I.

Determinare le relazioni tra il tempo, la velocità, e lo spazio nel moto di un corpo rotondo DNFM *(fig. III) poggiato sul piano orizzontale* AB, *e su cui agisce costantemente il dato peso* R *nella direzion tangenziale* RM.

Non tenendo conto pertanto del picciol peso *F* o della piccola parte di *R* che impiegasi a vincere l' attrito della seconda specie, ch' è lo stesso che considerare il toccamento *ee* d' incomputabile estensione; è chiaro che per le cose premesse il corpo rotondo *DNFM* muovesi di moto rotatorio perfetto ed uniformemente accelerato: di modo che il moto di qualunque punto *D* secondo l' ordine *DNFM* preso nella circonferenza *DNFM* sarà uguale al progressivo del centro *G*. Ciò posto si chiami il peso del corpo $DNFM = P$, il raggio $GM = c$; e sarà la distanza dal suo centro di gravità *G* al punto *H* centro di gravità comune ad esso ed al peso *R*, cioè $GH = \frac{c \cdot R}{P + R}$. E' certo ora che il moto di rotazione nel corpo *DNFM* è cagionato dalla somma de' pesi

P ed R che agisca al punto H secondo la direzione verticale HL che cade fuori del toccamento ee; ma siccome sta GM a GH, ovvero c a $\frac{c.R}{P+R}$, come $P+R$ a R: così è evidente che il predetto moto in tale circostanza equivale a quello che può produrre il solo peso R che agisca all' estremità M del raggio GM. Quindi se si dica u la velocità angolare di qualsivoglia punto M della circonferenza $DNFM$, e con *Eulero* Pbb il momento d' inerzia del corpo rotondo intorno al di lui asse o centro G, e g la forza della gravità che anima i corpi terrestri; avremo per i principj generali della Dinamica espressa la relazione tra la velocità ed il tempo nel moto del corpo $DNFM$ prodotto dal peso G nell' equazione (A)

$$u = \frac{g.R.t}{Pbb:cc+R} \dots\dots\dots\dots (A)$$

la quale combinata con questa $(\mathfrak{Q})$ che appartiene a' moti equabili, tali dovendosi riguardare anche gli accelerati d' istante in istante

$$ds = udt \dots\dots\dots\dots\dots (\mathfrak{Q})$$

otterremo nell' equazione (B)

$$t^2 = \frac{2.s(Pbb:cc+R)}{g.R} \dots\dots (B)$$

la relazione tra lo spazio ed il tempo nel suddetto moto, e con ciò verrà determinato quanto appartiene sì al moto rotatorio che al progressivo del centro G nel corpo rotondo $DNFM$ posto dal peso R in movimento. Il che ecc.

LEMMA II.

Determinare le cose medesime nel corpo DNFM (*fig.* 1.) *che discende strisciando pel piano inclinato* AB, *perchè supponesi poggiato con una base* DEm, *in cui cade la verticale* GE *condotta pel suo centro di gravità* G.

Poichè $\frac{AC}{AB}.P$ è l' impeto che ha il corpo alla discesa, e

$\frac{BC}{AB}$. F l'attrito che incontra pel piano inclinato AB posto essere F l'attrito orizzontale, sarà adunque nella supposizione che il corpo discenda, $\frac{AC}{AB} \cdot P > \frac{BC}{AB} \cdot F$. E perciò chiamata v la velocità progressiva del centro G, o di qualsivoglia altro punto della massa, verrà espressa la relazione tra la velocità ed il tempo dall'equazione (C)

$$v = g\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{BA} \cdot \frac{F}{P}\right)t \; \ldots\ldots \; (C)$$

e col soccorso della surriferita formula (Q) scopriremo esser indicata la relazione tra lo spazio ed il tempo dall'equazione (D)

$$t^2 = \frac{2 \cdot s}{g\left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}\right)} \; \ldots\ldots \; (D)$$

Il che ecc.

PROBLEMA I.

Nelle elevazioni del piano inclinato AB (*fig. IV.*) *che il corpo rotondo* DNFM *discende di moto rotatorio perfetto; trovare le relazioni tra la velocità, lo spazio, ed il tempo sì di un qualsivoglia punto* M *della circonferenza* DNFM, *che del centro di gravità* G *del corpo medesimo.*

Rappresenti il raggio verticale GO il peso assoluto del corpo, e si compia intorno ad esso il parallelogrammo $GHOS$ col lato GS perpendicolare, e col lato GH parallelo al piano inclinato AB; e sarà GH lo sforzo che sollecita il corpo al moto progressivo; e GS quello che sostiene il piano AB. Ma per ipotesi essendo $\frac{AC}{CB} < \frac{F}{P}$, lo sforzo GH è distrutto dall'attrito: e siccome, se il corpo rotondo fosse fornito della base DLO su la cui estremità LO cadesse la verticale GO, oppure fosse applicato semplicemente un sostegno al punto O,

verrebbe

verrebbe impedito anche il moto rotatorio; così è manifesto che il solo sforzo *GS* ovvero *HO* è quello che produce questo movimento. E perciò il corpo rotondo *DNFM* si trova costituito allo stesso modo come se poggiasse sopra un piano orizzontale, e sollecitato fosse al moto rotatorio dallo sforzo *HO*, ovvero da una forza tangenziale al punto *M*, che alla *HO* stia in ragione di *GH* a *GM*. Posto ciò, tenute le solite denominazioni, essendo lo sforzo $HO = \frac{BC}{AB} . P$, ed $MG : GH = AB : AC$; sarà $\frac{AC . BC}{AB . AB} . P$ la forza che in direzione tangenziale alla circonferenza *DNFM* sollecita il corpo rotondo a discendere di moto rotatorio perfetto pel piano inclinato *AB*. Quindi mediante il Lem. I avremo determinato in queste equazioni (*E*), (*F*)

$$u = \frac{g . AC . BC . t . cc}{AB . AB . bb} \dots\dots (E)$$

$$t^2 = \frac{2s . AB . AB . bb}{g . AC . CB . cc} \dots\dots (F)$$

tutto ciò che riguarda sì al moto rotatorio di qualsivoglia punto *M* della circonferenza *DNFM*, che al moto progressivo del centro di gravità *G* del corpo rotondo discendente lungo il piano inclinato *AB*; il che ecc.

COROLLARIO I.

Dall'equazione (*E*) si rileva che nulla è la velocità rotatoria o la progressiva del centro, quando il piano inclinato *AB* è orizzontale, cioè quando $AC = o$, e nulla pure quando sia verticale, cioè qualora $BC = o$; e che va poi crescendo successivamente quanto più il piano è inclinato all' orizzonte: proprietà tutte che vengono confermate dagli esperimenti.

SCOLIO.

E' noto che se il corpo rotondo è un cilindro il momento d'inerzia intorno il suo asse, cioè il da noi supposto

Phh, è $P.\frac{cc}{2}$, e però $hh=\frac{cc}{2}$; e se è una sfera ovvero un qualsivoglia sferoide ellittico, si ha $Phh=P.\frac{2}{5}cc$, cioè $hh=\frac{2}{5}cc$. Sia però, a cagion d'esempio, il corpo $DNFM$ discendente pel piano inclinato AB un cilindro, sicchè $hh=\frac{1}{2}cc$, e sia inoltre $s=13$ piedi Veronesi, onde con tale misura la forza della gravità $g=\frac{pie.\ 28,34}{1''}$; e si troverà, fatte le debite sostituzioni nella formula (F), che nelle elevazioni di 4°, 9°, 14°, il cilindro percorre di moto rotatorio perfetto il suddetto spazio di piedi 13 ne' tempi 2'' 65, 1'' 74, 1'' 40, i quali sono prossimamente uguali a' tempi 3'', 2'' 50, 2'' che somministra l'esperienza, e ciò tanto più se si faccia, come dee farsi, considerazione alla resistenza dell'aria. Il che può riscontrarsi nella mia Memoria sopra citata. Art. IV. §. 22.

PROBLEMA II.

Determinare il moto progressivo del centro G (fig. IV) *ed il rotatorio di un qualsivoglia punto* M *della circonferenza del corpo rotondo* DNFM *in quelle elevazioni del piano inclinato* AB *nelle quali discende di moto misto, o sia di moto rotatorio imperfetto.*

E poichè la velocità che acquista il centro G in conseguenza del moto rotatorio (Prob. I.) è espressa dalla quantità $\frac{g.AC.CB.t.cc}{AB.AB.hh}$, e quella che dipende dal moto progressivo (giacchè nelle supposte elevazioni del piano inclinato, essendo $\frac{AC}{CB}>\frac{F}{P}$, ha luogo questo moto) è espressa (Lem. II.) dalla quantità $g\left(\frac{AC}{AB}-\frac{BC}{AB}.\frac{F}{P}\right)t$; dunque l'intera velocità progressiva del centro G, che si chiami v, sarà dipendente dall'equazione (G)

$$v=g\left(\frac{AC}{AB}-\frac{BC}{AB}.\frac{F}{P}+\frac{AC.CB.cc}{AB.AB.hh}\right)t \quad \ldots\ldots (G)$$

ſapendoſi per eſperienza *(VI)* che nel moto miſto la velocità progreſſiva del centro viene aumentata da quella che compete al moto rotatorio, la quale ſarà rappreſentata dall' equazione *(H)* come nel Prob. antecedente

$$u = \left(\frac{g . AC . BC . t . cc}{AB . AB . hh} \right) \ldots\ldots (H)$$

eſſendo eſſa in ogni caſo generata dalla ſola forza *HO*. Quindi combinando l' equazioni *(G)* *(H)* colla *(Q)* (Lem. I.) otterremo l' equazioni *(I)* *(L)*

$$t^2 = \frac{25}{g \left(\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} . \frac{F}{P} + \frac{AC . CB . cc}{AB . AB . hh} \right)} \ldots\ldots (I)$$

$$t^2 = \frac{25 . AB . AB . hh}{g . AC . CB . cc} \ldots\ldots (L)$$

e con ciò avremo determinato quanto ſpetta al moto miſto del corpo rotondo *DNFM* diſcendente pel piano inclinato *AB*; il che ecc.

COROLLARIO I.

Sia il ſeno dell' angolo d' elevazione *ABC*, cioè $AC = m$, il coſeno $BC = n$, ed il raggio $AB = \sqrt{m^2 + n^2}$, e poſto che il ſuddetto angolo ſia tale che il corpo rotondo *MDNF* diſcenda lungo il piano inclinato *AB* di moto miſto, le equazioni *(G)* *(H)* ci fanno conoſcere che la velocità progreſſiva alla rotatoria ſta nella ragione

$$\left(m - n . \frac{F}{P} \right) \sqrt{\left(m^2 + n^2 \right)} + mn . \frac{cc}{hh} : mn . \frac{cc}{hh}$$

dal che appariſce che generalmente, eſſendo nel moto miſto $m - n . \frac{F}{P}$ quantità poſitiva, la velocità progreſſiva è ſempre maggiore della rotatoria, oltre l' elevazione in cui è $\frac{m}{n} = \frac{F}{P}$

fino alla verticale, annichilandosi anzi del tutto in siffatta posizione del piano la velocità rotatoria perchè diventa $BC = n = o$; le quali proprietà sono pure comprovate dall' esperienza esattamente.

COROLLARIO II.

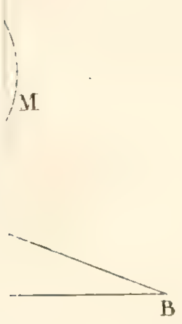
Tenute le medesime denominazioni si rileva dalle equazioni (I) (L), che, nello stesso tempo, lo spazio percorso dal centro di gravità G del corpo rotondo $MDNF$ di moto progressivo, mentre cade di moto misto pel piano inclinato AB, allo spazio percorso da qualsivoglia punto M intorno alla circonferenza $MDNF$ sta nella ragione

$$\left(m - n.\frac{F}{P}\right)\sqrt{\left(m^2 + n^2\right)} + mn.\frac{cc}{bb} : mn.\frac{cc}{bb}$$

da cui, come appunto dimostra l' esperienza, si ricava che nel moto rotatorio imperfetto lo spazio percorso dal centro è nelle successive elevazioni del piano vie maggior del rotatorio percorso dal punto segnato nella circonferenza, essendo il primo uguale al secondo, fino a che $\frac{m}{n} = \frac{F}{P}$, e nullo il secondo se $BC = n = o$.

SCOLIO I.

Si ponga essere un cilindro il corpo rotondo discendente pel piano inclinato di moto misto, sicchè sia $bb = \frac{1}{2} cc$, sia poi $s = 13$ pie., $g = \frac{pie.\ 28,\ 34}{1''}$, ed $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$. Ciò stabilito si troverà coll' equazione (I), che nelle tre elevazioni di 19°, 23°, 48°, impiega il cilindro a percorrere l' intero spazio di pie. 13 i tempi 1″16, 1″, 0″ 76, che sono quanto può desiderarsi prossimi a 2″ scarsi, 1″ $\frac{1}{2}$ scarso, ed 1″ scarso raccolti dall' esperienza nelle supposte circostanze, come può vedersi nel luogo citato allo Scolio del Problema antecedente.



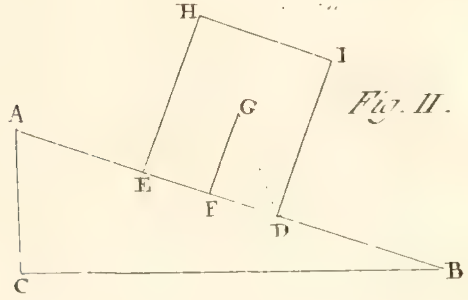
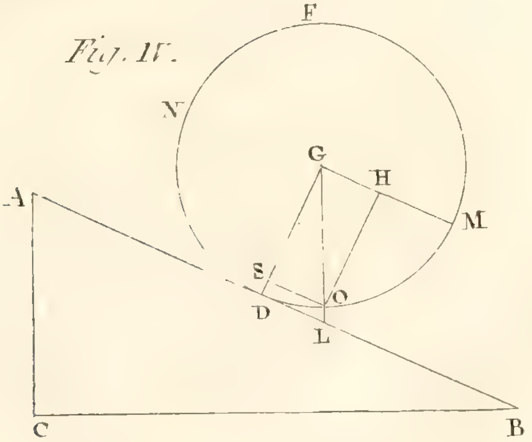
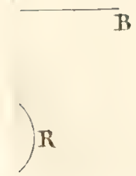


Fig. II.

Fig. IV.





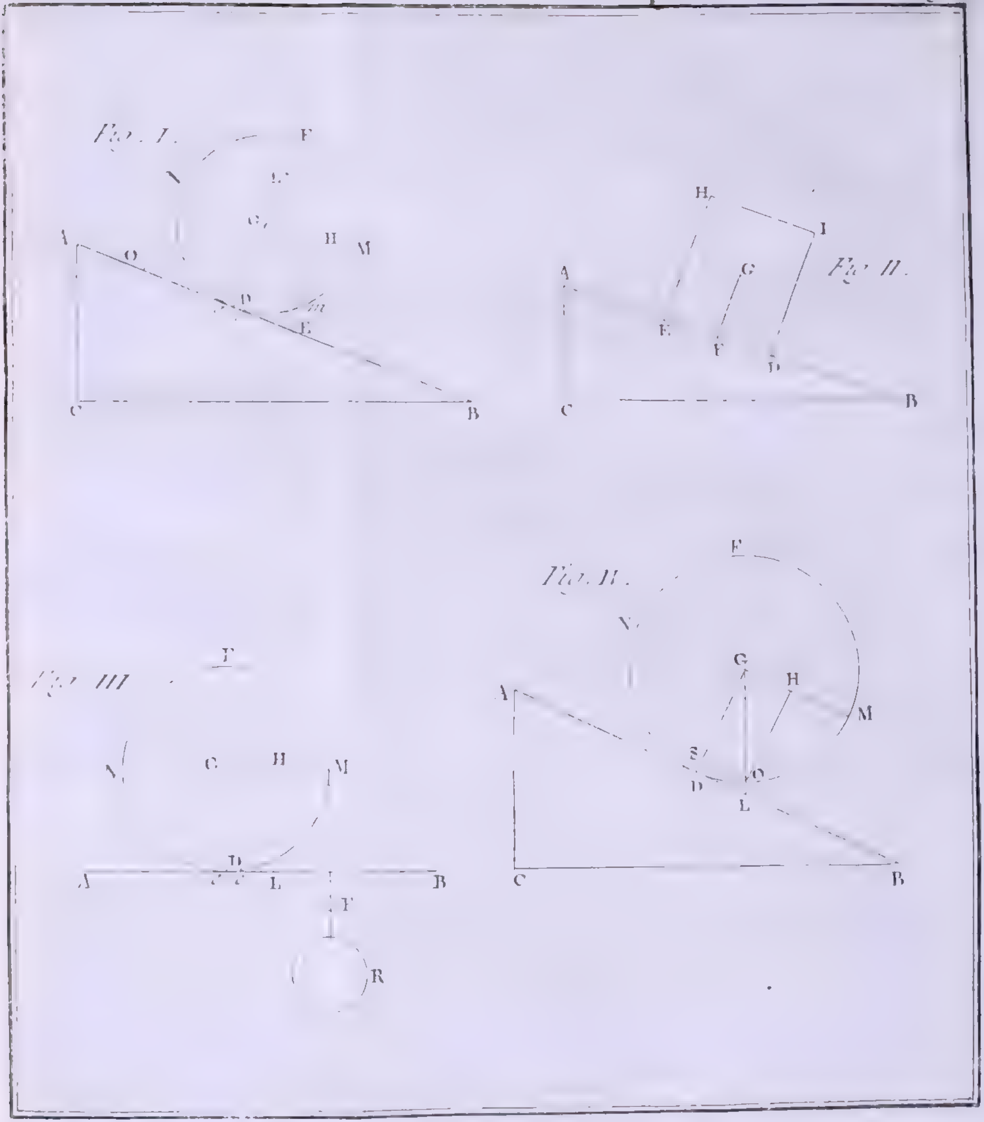


Fig. I.
F
A
O
D
m
E
H
M
C
B
Fig. II.
H
I
A
G
E
F
D
C
B
Fig. III.
N
C
H
M
A
D
L
B
F
R
A
G
H
M
S
D
O
L
C
B

Scolio II.

Per ultima applicazione della noſtra Teoria ponghiamo che il cilindro nelle due elevazioni di 45°, 60° debba percorrere di moto progreſſivo lo ſpazio di pollici 18 $\frac{2}{7}$, e ſi ſcoprirà, eſeguite le convenienti ſoſtituzioni nella proporzione eſpoſta al Corollario II. di queſto Problema, che nello ſteſſo tempo il punto fiſſato nella circonferenza del cilindro deve traſcorrere intorno alla ſteſſa poll. 13 nella prima elevazione, e poll. 9 $\frac{3}{7}$ nella ſeconda: riſultato a cui l' eſperienza (veg. la mia più volte mentovata Mem. Art. IV. §. 21 n. V.) corriſponde con tale eſattezza che non può a mio parere in argomento di sì fatta natura cercarſi riſcontro maggiore, onde certificare e porre a ſalvo d' ogni controverſia e dubbietà la Teoria generale ch' ora abbiamo dichiarata intorno al Moto rotatorio ſpontaneo de' corpi rotondi diſcendenti lungo un piano inclinato.

DELLE
ALTEZZE BAROMETRICHE
DISSERTAZIONE GEOMETRICO-ANALITICA

Del P. D. Francesco M. Franceschinis
Ch. Reg. di S. Paolo.

Presentata

Dal Sig. Cavaliere Lorgna.

L' Argomento delle altezze barometriche ha dato tante volte motivo di ſtudio a' Geometri, che parrà inutile il ripigliarlo in eſame. Ma ſiccome nel maneggiarlo con la pura Analiſi s'incorre, come ho veduto, nella difficoltà di ben interpretare il linguaggio miſterioſo di queſta Scienza; così non m'è ſembrato inutile il trattarlo con l'Analiſi e con la Geometria congiuntamente; ond'è avvenuto, che con una ſola formula mi ſi riuſcito felicemente di ſoddisfare a tutte le determinazioni. Queſto è il mio aſſunto, e il ſoggetto di queſta Memoria.

Data l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, ſi cerca l'altezza del medeſimo per qualunque luogo, o ſopra, o ſotto il livello marittimo, ſuppoſta la gravità variabile in ragione inverſa di una potenza n delle diſtanze dal centro terreſtre.

Chiamo a l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, p la diſtanza del luogo dal centro della terra, s l'altezza del mercurio in queſto luogo, f la denſità dell'aria vicino al mare, q la denſità della medeſima alla diſtanza p dal centro terreſtre, g la gravità acceleratrice nella ſuperficie del mare, ed r finalmente il ſemidiametro della terra.

Si eguagli a gA il peso della mentovata colonna di mercurio, la cui altezza a, ed essendo a fisicamente trascurabile in confronto ad r, agevolmente ci accorgeremo, che a, ed A fisicamente si eguagliano, potendosi considerare costante la gravità pel tratto $= a$.

Sarà dunque gA eguale alla pressione di tutta la colonna d'aria dalla superficie del mare fino al termine dell'atmosfera, e facendo come $\frac{1}{r^n}$ ad $\frac{1}{(p+s)^n}$, così g al quarto $\frac{gr^n}{(p+s)^n}$, esprimerà questo la gravità acceleratrice alla distanza $p+s$ dal centro terrestre. Moltiplicando per ds' si otterrà $\frac{gr^n ds}{(p+s)}n$, ed integrando, supposta p costante, ne risulterà $= \frac{-g^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} + B$ il peso della colonna di mercurio di lunghezza s posta al di sopra della distanza p dal centro della terra. Si determina la costante B osservando, che il peso della colonna è nullo, quando $s = o$. Avremo dunque $\frac{-gr^n}{(n-1).p^{n-1}} + B = o$, e conseguentemente $B = \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}}$. Per la qual cosa il peso cercato $= \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$, a cui si eguaglia la pressione dell'aria superiore alla distanza p dal centro terrestre. Secondochè sarà p maggiore, o minore di r, si avrà $gA - \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} + \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$, ovvero $-gA + \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} =$ alla pressione della colonna d'aria dell'altezza $p-r$, ovvero $r-p$.

Ora se di questa colonna si prenda l'elemento $\pm dp$, e si moltiplica per la densità q, e per la gravità acceleratrice $\frac{gr^n}{p^n}$ alla distanza p dal centro della terra, il prodotto $\pm \frac{gr^n qdp}{p^n}$ rappresenta la pressione elementare di detta colonna. Quindi è agevole l'inferire $\int \pm \frac{gr^n qdp}{p^n} = \pm gA \mp \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} \pm \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$

Pongo $\frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} = gz$, cioè a dire eguale al peso di una colonna di mercurio di lunghezza $= z$ che sia fornita della gravità acceleratrice g conveniente alla distanza r dal centro terrestre, ed effettuata la sostituzione trovo $\int \frac{\pm gr^n qdp}{p^n} = \pm gA \mp gz$.

Supposte le densità dell' aria proporzionali ai pesi superiori prementi, e ad un peso sempre eguale, e costante gC, si avrà l' analogia $gA + gC : \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}} + gC :: f : q$, o sia ponendo in vece del secondo termine il suo valore $= gz + gC$, $gA + gC : gz + gC :: f : q$, e perciò $q = f . \frac{z+C}{A+C}$

Sostituito questo valore nella scoperta formula ci si presenta $\frac{\int fr^n dp . (z+C)}{(A+C).p^n} = A - z$, e prese le differenze $\frac{fr^n dp.(z+C)}{(A+C).p^n} = -dz$. ovvero $\frac{fr^n dp}{(A+C).p^n} = \frac{-dz}{z+C}$, ed integrando $\frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l(z+C) + B$: ma quando $p = r$, $z = A$, dunque $\frac{fr}{(n-1).(A+C)} = l(A+C) + B$, o pure $B = \frac{fr}{(n-1).(A+C)} - l(A+C)$, e quindi $\frac{fr}{(n-1)(A+C)} - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l\left(\frac{A+C}{z+C}\right)$, e conseguentemente chiamando E la base della logaritmica della sottangente $= 1$; $E^{\frac{fr}{(n-1).A+C} - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}}} = \frac{A+C}{z+C}$, e finalmente $A+C . E^{\frac{-fr}{(n-1).(A+C)} + \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}}} - C = z$

Ne risulterà $z = 0$, qualora sia $\frac{fr}{(n-1)(A+C)} - \frac{fr^n}{(n-1).(A+C).p^{n-1}} = l\frac{A+C}{C}$, e perciò $p = \left(\frac{fr^n}{fr - (n-1).(A+C.)\, l\frac{(A+C)}{C}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

In

In tal sito, ed a tale distanza dal centro della terra termina l'atmosfera, e l'aria quivi non compressa da peso alcuno è fornita della densità $=\frac{fC}{A+C}$.

ESEMPIO I.

Sia $n=o$, cioè a dire la gravità costante, e ne nascerà $A+C \,.\, e^{\frac{f.(r-p)}{A+C}} - C = z = s$.

S'annullerà z, ogniqualvolta sia $C=(A+C).\,e^{\frac{f.(r-p)}{A+C}}$, e conseguentemente $\frac{A+C}{C} = e^{\frac{f.-(r-p)}{A+C}}$, o pure $l\,\frac{A+C}{C} = \frac{f.(p-r)}{A+C}$, e finalmente $p=r+\frac{A+C}{f}\,.\,l\,\frac{A+C}{C}$. Questo valore è finito, purchè C sia quantità finita, e l'aria benchè non compressa sia fornita di qualche densità, il che certamente addiviene in Fisica. Che se si supponga $C=o$, si troverà, che a $z=o$ si riferisce $p=\infty$, ascendendo all'infinito il logaritmo di $\frac{A}{o}$.

Posta $p=o$, si scoprirà, che nel centro della terra il mercurio si sostiene all'altezza $z=(A+C).\,e^{\frac{fr}{A+C}} - C$.

Facendo p negativa si avvererà la formola $z = A+C\,.\,e^{\frac{fr+fp}{A+C}} - C$, e l'altezza del mercurio seguiterà a crescere, aumentandosi p negativa, a cagione che si suppone, che la gravità costante anche di là dal centro della terra non cangi direzione.

Che se vogliasi, che passato il centro la gravità divenga negativa, e spinga verso il centro medesimo, bisognerà capovoltare il barometro, e di là dal centro si troveranno le stesse altezze del mercurio, come di qua a pari distanze. In

tale ipotesi le distanze p si assumano come positive anche di là dal centro, e si faccia uso della stessa formola, come di quà dal centro predetto.

Esempio II.

Passo a considerare la ipotesi di $n = 2$, o sia della gravità acceleratrice in ragion inversa dei quadrati delle distanze dal centro della terra, la quale mi dà $(A+C) e^{\frac{-fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)p}} - C = z$.

Qualora $z = o$ troveremo $p = \frac{fr^2}{fr - (A+C) . l\, A+C}$. Se la grandezza di C sia tale che ne risulti $fr > (A+C)\, l \frac{A+C}{C}$ si annullerà z ad una distanza finita dal centro. Posto che sia $fr = (A+C)\, l \frac{A+C}{C}$, o pure $\frac{fr}{A+C} = l \frac{A+C}{C}$ ci si presenta $p = \frac{fr^2}{o} = \infty$, e z s'annichila ad una distanza infinita dal centro terrestre.

Assegnando a C un valore più piccolo, onde divenga $fr < (A+C) . l \frac{A+C}{C}$, o pure $\frac{fr}{A+C} < l \frac{A+C}{C}$ svanisce z quando $p = \frac{-fr^2}{(A+C) . l \frac{A+C}{C} - fr}$ s'eguaglia ad una grandezza negativa.

Per ben intendere il linguaggio misterioso dell'analisi, do principio dal cercare il valore di z, quando $p = \infty$. Poichè in tale incontro $\frac{fr^2}{(A+C).p} = o$ avremo $(A+C)\, e^{\frac{-fr}{A+C}} - C = z$, e per conseguenza $e^{\frac{fr}{A+C}} = \frac{A+C}{z+C}$, ovvero $\frac{fr}{A+C} = l \frac{A+C}{z+C}$. Supponendosi $\frac{fr}{A+C} < l \frac{A+C}{C}$, dinotato colla let-

tera m un numero positivo maggiore dell' unità, si avrà $\frac{fr}{A+C} = \frac{1}{m} l \frac{A+C}{C}$: e quindi alla distanza $p = \infty$ dal centro della terra si avvererà la formola $\frac{1}{m} l \frac{A+C}{C} = l \frac{A+C}{z+C}$, da cui si deduce $\frac{\overline{A+C}^{\frac{1}{m}}}{C^{\frac{1}{m}}} = \frac{A+C}{z+C}$, ed indi $z+C = (A+C)^{1-\frac{1}{m}} . C^{\frac{1}{m}}$.

Ora $z+C$ sia di mezzo tra C, ed $A+C$. E' maggiore di C, perchè per essere eguale a C, sarebbe d' uopo, che nell' omogeneo di comparazione fosse $A = o$: è minore di $A+C$, perchè nel pareggiare essa quantità bisognerebbe, che nel detto omogeneo la grandezza $(A+C)^{1-\frac{1}{m}}$ in cambio di essere moltiplicata per $C^{\frac{1}{m}}$ fosse moltiplicata per $(A+C)^{\frac{1}{m}}$. Essendo dunque $z+C$ maggiore di C, e minore di $A+C$, s' inferisce essere z minore di A : ma il peso della colonna d' aria dalla superficie del mare fino alla sublimità $p = \infty$ s' eguaglia a $gA - gz$; dunque il detto peso è più piccolo di gA, e per conseguenza il peso della mentovata colonna non basta per far equilibrio con la colonna di mercurio di altezza a, mentre il barometro si colloca sulla superficie del mare.

Il perchè egli è necessario l' accrescere la lunghezza della colonna aerea, e farla diventare più che infinita. Mi si richiederà come ciò si possa ottenere. Ecco. Pel centro della terra C (*fig.* 1.) s' intenda tirata la linea retta DCE, la quale sia prolungata all' infinito tanto dalla parte CD delle p positive, quanto dalla parte CE delle p negative, e sia CB il raggio della terra.

Divenuta infinita la colonna aerea BD, si fa un repentino salto familiare alla Geometria dall' infinito positivo CD al negativo CE, e si continua la colonna d' aria procedendo da E verso C fino alla distanza dal centro $= CF = p$

$= \frac{-fr^2}{(A+C).l\frac{A+C}{C}-fr}$, a cui corrispondendo $z=o$, qualmente ho notato di sopra, ed è l'ultimo confine dell'atmosfera nella supposizione di $(A+C).l\frac{A+C}{C} > fr$. La legge delle gravità acceleratrici in ragione inversa dei quadrati delle distanze richiede, ch'essendo positivi i quadrati anche delle distanze negative per esempio CF, CE, le gravità stesse spingano sempre da D verso E. Il peso dunque della colonna aerea FE tenderà da F verso E, e nel punto E infinitamente lontano da C si eguaglierà a $gz=(gA+gC).e^{\frac{-fr}{A+C}}-gC$. Con una specie di magia matematica si unisce questo peso con quello $=gA-(gA+gC).e^{\frac{-fr}{A+C}}+gC=gA-gz$ della colonna d'aria DB, onde si formi la somma gA, colla quale fa equilibrio la colonna di mercurio, la cui altezza $=a$, ed il peso $=gA$, quando il barometro si mette nel sito B.

Ognuno agevolmente capisce, che l'ipotesi di $(A+C)l\frac{A+C}{C} > fr$ appartiene soltanto alla Geometria, e non può trasferirsi alla Fisica. La legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze è abbracciata dalla natura, e mostrandoci questa fisicamente impossibile, che la quantità $(A+C).l\frac{A+C}{C}$ o superi, o eguagli fr, perchè l'altezza dell'atmosfera diverrebbe o più che infinita, o infinita; chiara si scopre la conseguenza, dover essere $(A+C).l\frac{A+C}{C} < fr$. Esige ciò necessariamente, che a C convenga un valore maggiore di quello, che le competerebbe, fingendo $(A+C).l\frac{A+C}{C}=fr$ che non difficilmente si può col computo determinare.

Per facilitare il calcolo suppongo C fisicamente trascurabi-

le in riguardo ad A, onde ne risulta $A\ l\frac{A}{C}=fr$, o sia $\frac{fr}{A}$ $=l\frac{A}{C}$.

Poichè $l\frac{A}{C}$ è un logaritmo iperbolico, fatta l' osservazione, che il logaritmo di $\frac{A}{C}$ preso dalle Tavole, che dinoto per $L\frac{A}{C}$ moltiplicato per 2, 3025850 logaritmo iperbolico della decina, si eguaglia a $L\frac{A}{C}$, avremo $\frac{fr}{A}=2,3025850$ $L\frac{A}{C}$, o pure $\frac{fr}{A.2,3025850}=L\frac{A}{C}$.

Sappiamo per le sperienze del *Cotes* essere $f=\frac{1}{11900}$, ed il *Nevvton* stabilisce $r=$ piedi parigini 19695539 = poll. 236346468. Si faccia inoltre $A=$ poll. 28. Queste determinazioni ci danno $\frac{236346468}{11900.28.2,3025850}=L\frac{28}{C}$, e ridotto il calcolo $3,0805838=L\frac{28}{C}$.

Ora L 1204 =	3,0806265
L 1203 =	3,0802656
e la loro differenza	3609
Logaritmo trovato =	3,0805838
L 1203 =	3,0802656
differenza =	3182

S' inferisca essere $3,0805838=L\,1203+\frac{3182}{3691}$, e quindi $\frac{28}{C}=1203+\frac{3182}{3609}=\frac{4344809}{3609}$, o pure $\frac{3609.28}{4344809}=\frac{101052}{4344809}$ $=$ linee $\frac{1212624}{4344809}=C=$ linee 0, 2790972. L' esatto valore

di C corrispondente a $z = o$, ed a $p = \infty$, è una piccolissima quantità maggiore di quello, che si è ora determinato supponendo C trascurabile rispettivamente ad A. E conciossiachè l'altezza dell'atmosfera abbia ad esser finita, spetterà a C una misura ancora più grande, che si stabilirebbe se fosse nota la sublimità a cui l'atmosfera si estende.

Or ecco stabilita una fisica verità, che l'aria non compressa è fornita della densità $= \frac{fC}{A+C}$, e che questa dee certamente avere una grandezza maggiore di quella, che si determinerebbe ponendo $(A+C). l \frac{A+C}{C} = fr$, la quale incorrerebbe nell'assurdo, ch' esser dovesse infinita l'altezza dell'atmosfera.

M' inoltro a rintracciare il valore di z, quando è infinitamente picciola la distanza p dal centro. In tal circostanza si avvera la formola $(A+C). e^{\frac{fr^2}{(A+C)p}} = z$, e per conseguenza $\frac{fr^2}{(A+C).p} = l \frac{z}{(A+C)}$. La quantità $\frac{fr^2}{A+C.p}$ è infinita, e perciò è tale altresì la grandezza eguale $l \frac{z}{A+C}$. Ma il numero è trascendentemenre più grande del suo logaritmo infinito. Dunque $\frac{z}{A+C}$ è immensamente maggiore di $\frac{fr^2}{(A+C).p}$, e quindi anche z sarà tale in riguardo ad $\frac{fr^2}{p}$. Non ci dobbiamo meravigliare, che per equilibrare il peso dell' atmosfera di altezza finita si richieda nel centro della terra una colonna di mercurio immensamente lunga fornita della gravità acceleratrice $= g$. Nelle infinitesime distanze dal centro ella è infinita la gravità, e la densità dell' aria, e da questa cagione procede la lunghezza trascendentemente infinita $= z$ della mentovata colonna di mercurio.

Presa negativa la distanza $= p$ dal centro, abbiamo $(A+C)$.

$e^{\frac{-fr}{A+C}} - C = z$. Attenendomi all'ipotesi confacente alla Fisica, che $\frac{fr}{A+C}$ sia maggiore di $l \frac{A+C}{C}$ ho stabilito, che ad una finita distanza dal centro, che io nomino l, z si annulla, onde si abbia $A+C \cdot e^{\frac{-fr}{(A+C)} \frac{-fr^2}{(A+C)p}} - C = o$, e perciò $(A+C) \cdot e^{\frac{-fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)p}} = C$. Si cavi la conseguenza, che quando la distanza p è negativa sarà $(A+C) \cdot e^{-\frac{fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C) \cdot p}} < C$, e quindi $z = (A+C) \cdot e^{-\frac{fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C)p}} - C$ si troverà negativa. Egli è certo, che avendo la gravità e di qua e di là dal centro la medesima direzione, il peso dell'aria passato il centro si accresce, e si richiede una più lunga colonna di mercurio dotato della gravità g per equilibrarlo. Come dunque ci si presenta z negativa e finita? L'enigma si scioglie con lo stesso artifizio usato di sopra.

La curva, le cui coordinate (fig. 2) $CD = p$, $DC = z$ ha due rami $NAEG$, LHK, ai quali serve di assintoto la retta GK; a $CB = p = r$ corrisponde $BA = z = A$. Divenendo $p = o$ nel centro C, z ascende all'infinito, e ci vuole la colonna di mercurio CG di lunghezza infinita, e dotata di gravità costante g per far equilibrio alla colonna aerea CN di altezza determinata, alla sommità della quale è $z = o$, e l'atmosfera finisce. Il maggior peso della colonna d'aria CF esige una più lunga colonna di mercurio, e giacchè era infinita la lunghezza CG relativa a $p = o$, la lunghezza, che si cerca, della colonna di mercurio, appropriata a $CF = p$, esser debbe più che infinita. Descritta l'ordinata $FH = -z$ si tiri HI parallela ad NF, e si eguaglierà a $CG + KI$ la lunghezza della colonna di mercurio la cui gravità costante $= g$, che forma equilibrio colla colonna aerea, che ha la lunghezza FN.

Posto che si supponga che la gravità in ragione inversa

dei quadrati delle distanze sempre tenda al centro, di modo che passato esso centro spinga da F verso C; allora a pari distanze CD, CF corrisponderanno colonne di mercurio egualmente alte, e servirà ad ambo i casi la stessa formola dovendosi considerare in qualità di positive le p anche di là dal centro.

Fin ora ho misurato le pressioni dell' aria col peso di una confacente colonna di mercurio dotata della gravità costante g, che è quella che corrisponde alla distanza r dal centro. Cerchiamo presentemente l' altezza s della colonna di mercurio dentro il barometro collocato alla distanza p dal centro terrestre, le particole del qual mercurio sieno fornite della gravità conveniente alla relativa loro lontananza dal centro predetto, la qual colonna faccia equilibrio col peso dell' atmosfera superiore. Avendo trovato generalmente il peso di essa colonna $= \frac{gr^n}{(n-1).p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1).(p+s)^{n-1}}$, ed avendolo stabilito eguale a gz, troveremo, nella ipotesi di $n=2$, $\frac{r^2 s}{p^2+ps}=z$, e ne dedurremo $s=\frac{p^2 z}{r^2-pz}$, e sostituito il valore di z, $\frac{(A+C).e^{-\frac{fr}{A+C}+\frac{fr^2}{r^2-pz}}}{r^2-(A+C)p.e^{-\frac{fr}{A+C}+\frac{fr^2}{(A+C).p}}+Cp}=s$;

a $z=0$ corrisponde $s=0$, e ciò succede, o ad una finita distanza p dal centro, se $\frac{fr}{A+C}$ è maggiore di $l\frac{A+C}{C}$, o ad una infinita distanza se $\frac{fr}{A+C}=l\frac{A+C}{C}$, o ad una distanza negativa se $\frac{fr}{A+C}<l\frac{A+C}{C}$. In questa ultima supposizione quando $p=\infty$, z ha un valore finito $=(A+C).e^{-\frac{fr}{A+C}}-C$. Se tutta la colonna di mercurio fosse fornita della gravità $\frac{gr^2}{p^2}$

pro-

propria della diſtanza p dal centro, ſi troverebbe $s = \frac{p^2 z}{r^2}$ Ma decreſcendo la gravità delle particole del mercurio, ſecondo che maggiormente ſi allontanano dal centro mentovato, egli è certo, che la lunghezza s ha da ſalire ad una grandezza incomparabilmente maggiore.

Si formerà qualche idea della immenſità della ſua miſura trasformando la quantità $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ in una ſerie col mezzo d' iterate diviſioni, le quali ci moſtreranno $s = \frac{p^2 z}{r^2} + \frac{p^3 z^2}{r^4} + \frac{p^4 z^3}{r^6} +$ ecc. Per far dunque equilibrio colla colonna d'aria FE (fig. I.) ſi renderebbe neceſſaria una colonna di mercurio di lunghezza traſcendentemente infinita. Svanirà la meraviglia di queſto apparente paradoſſo, qualora ſi rifletta, che il peſo di queſta immenſa colonna è finito, ed $= gz$ cioè a dire al peſo della colonna aerea EF.

Merita rifleſſione l'ambiguità del valore di $\frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ ſecondo la varietà delle circoſtanze. In moltiſſimi caſi ſi eguagliarebbe ad una quantità negativa, quando p, e z ſono negative, e $pz > r^2$. Nel noſtro caſo frattanto ho fatto chiaramente vedere eguagliarſi $s = \frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ ad una grandezza più che infinita. Se foſſe $r^2 = pz$ aſcenderebbe all'infinito, eſſendo $r^2 - pz = 0$. Acciocchè s vie più creſca, biſogna che $r^2 - pz$ continui a calare, il che ſuccede paſſando dal nulla al negativo, onde $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ pareggi una grandezza più che infinita.

Gli eſperimenti c' inſegnano eſſere $s = a$, quando $p = r$. Sarà in tale incontro il peſo della colonna di mercurio, la cui altezza $= a$, eguale a $\frac{gr^2 a}{r^2 + ra} = \frac{gra}{r + a} = gz = gA$. Poichè a è ſiſicamente traſcurabile in riguardo ad r, paſſerà ſiſica eguaglianza tra a ed A, potendoſi con ſiſica adequazione

ſupporre, che per tutto il tratto a ſi mantenga la ſteſſa gravità $= g$.

Ho già notato, che quando $r^2 = pz$, o ſia $\frac{r^2}{p} = z$, l'altezza s del mercurio diviene infinita. Succede ciò quando $p < r$. Nella formola infatti $(A+C).e^{-\frac{fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C).p}} - C = z$ ſi ſoſtituiſca $\frac{r^2}{p}$ in cambio di z, e dopo le convenienti operazioni ſi troverà $\frac{fr}{A+C}.(r-p) = l\frac{r^2 + Cp}{(A+C).p}$, equazione, a cui ſoddisfa un valore poſitivo di $p < r$.

Si aſſegni a p una grandezza poſitiva ancora più picciola, e la formola $(A+C).e^{\frac{-fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)p}} - C = z$ c' inſegna, che z creſcerà e diventerà maggiore di $\frac{r^2}{p}$. In tali circoſtanze il diviſore $r^2 - pz$ della formola $\frac{p^2 z}{r^2 - pz} = s$ diverrà negativo, e l'altezza s del mercurio monterà al più che infinito.

Giunga finalmente p ad eſſere infinitamente picciola, onde ſi abbia $(A+C).e^{\frac{fr^2}{(A+C).p}} = z$, e quindi $\frac{fr^2}{(A+C).p} = l\frac{z}{A+C}$. Si raccoglie da queſta formola eſſere z immenſamente più grande di $\frac{r^2}{p}$, e conſeguentemente pz immenſamente maggiore di r^2. Il perchè in queſto incontro il più che infinito valore di $s = \frac{p^2 z}{r^2 - pz}$ ſi aumenterà a diſmiſura.

Reſta da conſiderare il caſo di p negativa, a cui come ho oſſervato corriſponde z altresì negativa. Avremo dunque

$s = \frac{-p^2 z}{r^2 + pz}$, formola, che manifesta riuscir negativa anche s. Sia (*Fig. I.*) CD l'infinitamente infinita altezza, a cui si alzerebbe il mercurio nel barometro collocato nel centro C della terra. Suppongasi parimenti immensamente infinita la linea CE, e se ad un dato valore di p negativa si riferisca $-s = CF$, sarà $CD + EF$ la lunghezza della colonna di mercurio, che farà equilibrio col peso dell'atmosfera.

Se passato il centro le forze divenissero negative, le altezze del mercurio e di qua, e di là dal centro riuscirebbero eguali a pari distanze dal centro medesimo.

La Fisica esige che sia finita l'altezza dell'atmosfera, e che per conseguenza sendo $\frac{fr}{A+C} > l\,\frac{A+C}{C}$, z ed s s'annullino ad una distanza finita p dal centro terrestre. Calando p, crescono z, ed s, e finalmente divengono fisicamente amendue eguali ad A alla distanza r dal detto centro. E qui finisce la legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze, avendo dimostrato il Cavalier *Nevvton*, che dentro il corpo della terra le forze seguono la ragione delle distanze dal centro. Per la qual cosa giudico espediente l'aggiungere un terzo esempio, in cui s'indaghino i valori di z, ed s nell'ipotesi mentovata di forze.

ESEMPIO III.

Supponendo le forze proporzionali alle distanze dal centro abbiamo $n = -1$, e la formola generale esprimente il valore di z prende il seguente aspetto $(A+C) . e^{\frac{fr}{2.(A+C)} - \frac{fp^2}{2r.(A+C)}}$

$- C = z = \frac{2ps + s^2}{2r}$.

Si annulleranno z, ed s, quando s'abbia

$(A+C) . e^{\frac{fr}{2.(A+C)} - \frac{fp^2}{2r.(A+C)}} = C$ e perciò

$\frac{fr}{2.(A+C)} - \frac{fp^2}{2r.(A+C)} = l\frac{C}{A+C}$, o pure $\frac{fp^2}{2r.(A+C)}$ $- \frac{fr}{2.(A+C)} = l\frac{A+C}{C}$, e finalmente

$\pm p = V\left(\frac{2r.(A+C)}{f} . \left(\frac{fr}{2.(A+C)} + l\frac{A+C}{C}\right)\right)$. Se l'aria non compressa sia dotata di una finita densità, siccome richiede la Fisica, eguale ad $\frac{fC}{A+C}$, e per conseguenza sia finito il valore di C, starà parimenti dentro i limiti del finito la distanza dal centro $\pm p$, alla quale z, ed s svaniscono. Che se suppongasi $C = o$, si troverà $\pm p = V\frac{2rA}{f} . l\frac{A}{o} = \infty$, e bisognerà trasportare il barometro ad una distanza infinita, acciocchè la lunghezza s della colonna di mercurio si eguagli a nulla.

Avvicinando il barometro alla superficie della terra cresceranno z, ed s, ed a livello del mare sarà $z = A$, $s = a$, ed avverandosi la formola $A = \frac{2ra+a^2}{2r}$, ed essendo a^2 fisicamente trascurabile rispettivamente a $2ra$, si troverà con fisica adequazione $A = z = a = s$. Divenga $\pm p$ minore di r, e seguiteranno a crescere z, ed s, e per ultimo qualora $\pm p = o$ ci si presenterà $(A+C). e^{\frac{fr}{2.(A+C)}} - C = z = \frac{s^2}{2r}$, e z, ed s giungeranno alla massima grandezza.

Restringendo in poche parole le cose dette; dall'altezza a cui si estolle l'atmosfera fino alla superficie del mare vale la legge della gravità in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro terrestre. L'altezza del mercurio nel barometro s'eguaglia a nulla nella predetta sublimità dove, avverandosi la condizione, che sia $fr > (A+C). l\frac{A+C}{C}$, la densità dell'aria non compressa s'eguaglia ad $\frac{fC}{A+C}$. Va cre-

ſcendo eſſa altezza ſecondo che il barometro s'avvicina alla terra, e collocato ſulla ſuperficie del mare, l'altezza del mercurio ritrovaſi $= a$.

Ponendo il barometro in ſito inferiore al livello del mare ſi muta legge, e la gravità ſeguita la ragione delle diſtanze del centro. Eſige queſta legge che l'altezza del mercurio s'aumenti ſintantochè perviene alla miſura, che viene determinata dall'equazione $(A+C)\, e^{\frac{fr}{2\cdot(A+C)}} - C = \frac{s^2}{2r}$, quando $p = o$.

Progredendo di là dal centro della terra fa duopo capovoltare il barometro, perchè la gravità diventa negativa, ed a qualunque diſtanza dal centro corriſponderà la ſteſſa altezza s di mercurio, che competeva ad una pari diſtanza preſa di qua dal centro predetto.

ESEMPIO IV.

La generale integrazione della formola differenziale $\frac{fr^n dp}{(A+C)\cdot p^n} = \frac{-dz}{z+C}$ non vale per la ipoteſi di $n = 1$, cioè a dire delle forze acceleratrici in ragion inverſa delle diſtanze dal centro, che ci darebbe $(A+C)\cdot e^{\frac{-fr}{o\cdot(A+C)} + \frac{fr^n}{o\,(A+C)\,\cdot\, p^n}}$ $- C = z$. In queſto caſo egli è duopo riaſſumere la formola differenziale, che prende il ſeguente aſpetto $\frac{fr dp}{(A+C)\cdot p}$ $= \frac{-dz}{z+C}$, la quale integrata ci ſomminiſtra $\frac{fr}{A+C}\cdot lp = B$ $- l(z+C)$, ma quando $p = r, z = A$; dunque $B = \frac{fr}{A+C}\cdot$ $lr + l(A+C)$, e conſeguentemente $\frac{fr}{A+C}\cdot lp = \frac{fr}{A+C}\cdot lr + l(A+C)$ $- l(z+C)$, o ſia $\frac{fr}{A+C}\cdot\frac{lp}{r} = l\,\frac{A+C}{z+C}$, e finalmente dopo i

neceſſarj calcoli $(A+C) \cdot (\frac{r}{p})^{\frac{fr}{A+C}} - C = z$.

L' integrale della formola differenziale $\frac{grds}{p+s}$ adattata al caſo di $n=1$, in cui p ſi ſuppone coſtante, cioè $gr\,l\frac{p+s}{p}$ eſprime il peſo della colonna di mercurio di lunghezza s poſta al di ſopra della diſtanza p dal centro della terra, e poichè $gr\,l\frac{p+s}{p} = gz$, avremo $(A+C) \cdot (\frac{r}{p})^{\frac{fr}{A+C}} - C = z = r\,l\frac{p+s}{p}$.

Si eguaglieranno a nulla z, ed s qualora ſia $r(\frac{A+C}{C})^{\frac{A+C}{fr}} = p$, ed il valore di p aſcenderà all' infinito, poſta $C=o$.

Approſſimando il barometro alla ſuperficie del mare, s' aumenteranno z, ed s, e quando $p=r$, ſarà $z=A$, $s=a$, e proſſimamente $z=A=s=a$ adeguandoſi $rl\frac{r+s}{r}$ ad s, ſtante la minutezza di s in riguardo ad r, ed eſſendo in tal circoſtanza $l\frac{r+s}{r} = \frac{s}{r}$ con fiſica adequazione.

Seguiti p a calare, e creſceranno z, ed s fintantochè diventeranno infiniti all' annullarſi di p. Che ciò avvenga di z ella è coſa patente. In riguardo ad s avrémo ſuppoſta p minima $\frac{(A+C)}{r}(\frac{r}{p})^{\frac{fr}{A+C}} = l\frac{s}{p}$ e perciò $e^{\frac{A+C}{r}(\frac{r}{p})^{\frac{fr}{A+C}}} = \frac{s}{p}$, e finalmente $p \cdot e^{\frac{A+C}{r}(\frac{r}{p})^{\frac{fr}{A+C}}} = s$.

Poichè $e^{\frac{A+C}{r}(\frac{r}{p})^{\frac{fr}{A+C}}}$ è immenſamente più grande di $\frac{A+C}{r}(\frac{r}{p})^{\frac{fr}{A+C}}$ ſe ne deduce s infinitamente maggiore di p.

$\frac{A+C}{r}\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}} = (A+C)\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}-1}$. Ma questa grandezza è infinita. Dunque tanto più infinita sarà la grandezza di s. Di sopra ho stabilito $A=$poll. 28, $f=\frac{1}{11900}$, $r=$poll. $2{,}36346468$, e C maggiore di linee $0{,}2790972$. Pongasi $C=$ linee $1=$ poll. $\frac{1}{12}$ e si troverà $(A+C)\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}-1} = \left(28+\frac{1}{12}\right)$

$\left(\frac{236346468}{0}\right)^{706+\frac{72724}{334192}}$, quantità immensamente infinita.

Senza por mano nella formola $(A+C).\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{fr}{A+C}} - C = z$ basta considerare anche di là dal centro le distanze, e le gravità tendenti al centro stesso come positive, e si torneranno a scoprire a pari distanze gli stessi valori di z, e di s come di qua dal centro.

Esempio V.

Supponendo n minore dell'unità, la formola prenderà il sottoposto aspetto $(A+C).e^{\frac{fr}{(1-n).(A+C)} - \frac{fr^n.p^{1-n}}{(1-n).(A+C)}} - C$

$$= z = \frac{-r^n p^{1-n}}{1-n} + \frac{r^n.(p+s)^{1-n}}{1-n} = \frac{r^n}{1-n}\left((p+s)^{1-n} - p^{1-n}\right)$$

Fingasi $n=\frac{1}{2}$, e ne risulterà $(A+C).e^{\frac{2fr}{A+C} - \frac{2fr^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}}{A+C}}$

$$-C = z = 2r^{\frac{1}{2}}\left((p+s)^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}\right).$$

Svaniranno z, ed s qualora sia $p=\left(r^{\frac{1}{2}} + \frac{(A+C)}{2fr^{\frac{1}{2}}}\, l\frac{A+C}{C}\right)^2$, ed un tale valore sarà infinito, posta $C=0$.

Crefceranno z, ed s accoftando il barometro alla fuperficie del mare, e quando $p=r$, fi troverà $A=z=2r^{\frac{1}{2}}\left((r+a)^{\frac{1}{2}}-r^{\frac{1}{2}}\right)$ Ora effendo a fificamente minima in riguardo ad r, $(r+a)^{\frac{1}{2}}$ fi adegua ad $r^{\frac{1}{2}}+\frac{a}{2r^{\frac{1}{2}}}$, e quindi fificamente $A=z=a=s$.

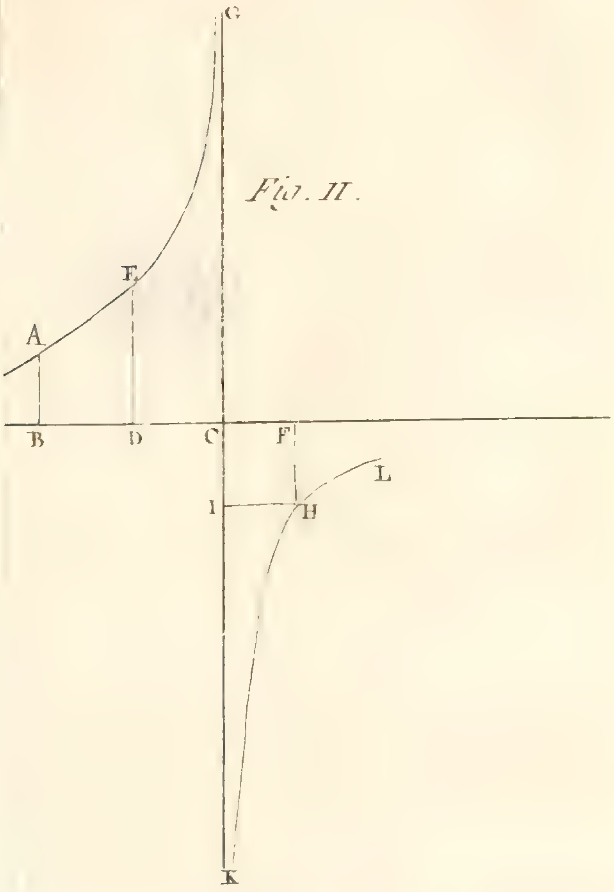
Divenga $p=o$, e ne nafcerà $(A+C).e^{\frac{2fr}{A+C}}-C=z$, e non fi richiederà falvo che un pefo finito per far equilibrio colla preffione dell'atmosfera dal centro fino al fuo termine eftremo.

Sta parimenti in quefto incontro dentro i limiti del finito il valore di s, imperciocchè fendo $z=2r^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$, fe ne deduce $s=\frac{z^2}{4r}$, ed effendo z quantità finita, fi fcopre altresì tale $\frac{z^2}{4r}=s$.

Se paffando oltre al centro la p fi confidera come negativa, i valori di z, e di s divengono immaginarj effendo tale la grandezza $p^{\frac{1}{2}}$. Addiviene ciò in tutti quei cafi, nei quali è pari il denominatore della frazione $1-n$, il che fi verifica nell'affunto efempio di $1-n=\frac{1}{2}$.

Che fe, qualmente richiede la legge delle forze tendenti sfericamente ad un centro, le diftanze in qualunque direzione fi prendano fempre come pofitive, a pari diftanze di qua e di là dal centro corrifponderanno eguali valori di z, e di s.

§. XXIX.


G
Fig. II.
E
A
B
D
C
F
L
I
H
K

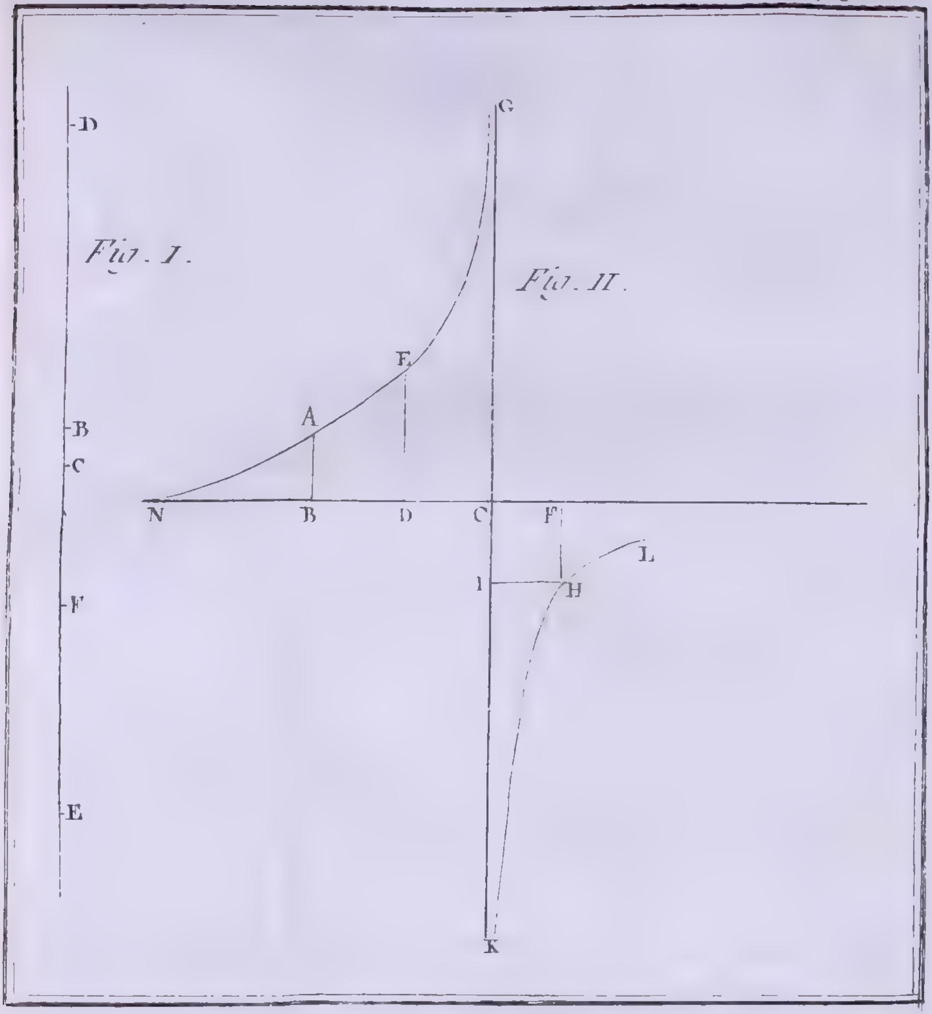


Fig. I.
Fig. II.
D
B
C
F
E
G
E
A
N
B
D
C
F
L
I
H
K

DEL MISURARE

L'ACQUA CHE ESCE DALLE CATERATTE CON MOTO LIBERO.

MEMORIA I.

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

CAPITOLO PRIMO

Nozioni Preliminari.

§. I.

NOn era al certo possibile lo stabilire alcuna regola sicura per misurare l'acqua ch'esce dalle aperture che si praticano in fianco delle conserve, e de' canali, sotto il carico di un corpo d'acqua soprastante che la incalza, mantenuto a costante altezza, se prima non erano tolte di mezzo le incertezze che ingombrano l'argomento. Non è già, che sin dai tempi di *Frontino* non si conoscesse da tutti, che la quantità dell'acqua derivata dipende e dalla condizione dell' aperture, e dalla velocità delle stille uscenti. Ma quanto è facile il prendere un partito intorno alle prime, soggette come sono le dimensioni delle aperture a meccanica misura, altrettanto misterioso è stato sempre il magistero dell' acqua in corso, e quant'altra mai delle operazioni naturali difficilissimo a scuoprirsi; ond' è che per molti versi si sono adoperati gli uomini intelligenti in farne cognizione chi per via di mentali ricerche, e chi spiando l'operar della natura ne' vasi col misurar di fatto tutto ciò che poteva a misura subordinarsi. E quanto al primo mezzo messo in opera per questa indagine, senza derogare al merito degli Autori che

l'hanno impiegato, dotti e ſapientiſſimi, convien dire francamente, che il ſoggetto maneggiato non è l'acqua de' noſtri fiumi, e che più alla ſcienza matematica, o piuttoſto a quella del calcolo, che a quella della natura appartengono le ſpeculazioni che ſi ſon fatte ſu queſto propoſito. Il ſecondo ha fruttato aſſai più del primo; perchè non poſſono ricordarſi ſenza gratitudine i nomi di tanti illuſtri uomini, per la maggior parte Italiani, che hanno promoſſo le noſtre cognizioni effettive in sì fatta materia coll'eſperienza e col ragionamento, che ſono i mezzi efficaci onde impetrare qualche ſecreto dalla natura. Ma ſiccome non può tutto diſcuoprirſi ad un tratto, ſuccedendoſi, come nel cammino, i paſſi l'uno all'altro, reſtò ſempre oſcura ſino a' dì noſtri la condizione vera, e il vero ufficio di quell'acqua, che ſopraſta al foro, e vien mantenuta a coſtante altezza, come dicemmo. E in oltre non ſi ſeppe giammai di certo, ſe foſſe o no dovuta all'attuale diſceſa dell'acqua dalla ſuperficie permanente ſino al piano del foro la velocità dell'acqua uſcente; ed eſſendo poi queſta velocità dovuta o no alla diſceſa attuale, non ſi trovò mai alcun canone fiſſo e ſicuro, onde determinare la vera altezza, cui in ogni caſo foſſe dovuta la velocità attuale ed effettiva dell'acqua, la quale altezza, ſecondo le ſperienze di tutti, e di tutti i tempi. ſi trovò ſempre non attignere nè pur la metà di detta altezza permanente ſopra il foro. Sinchè dunque non ſi foſſe tratto da queſte tenebre il ſoggetto, e ſtabilito un tal canone conforme alle ſperienze, la pratica non aveva norme ſicure, onde miſurare l'acqua uſcente da sì fatte aperture ſotto tale e tal altro carico d'acqua permanente ſopra il foro.

Neceſſità pertanto aveva fatto adottare il ſagaciſſimo ripiego della vena contratta trovato dal *Nevvton* per confermare il principio teorico, che l'acqua debba realmente la propria velocità all'attuale diſceſa. In conſeguenza di che era obbligata la pratica a tener dietro, non già all'apertura reale, ma sì bene alla ſezione della vena contratta fuor dell' apertura. Il che non eſſendo praticabile in grande, e non facilmente in piccolo, o la miſura oltrepaſſava il dovere ſenza queſta correzione del foro, o riuſciva arbitrario il diffalco.

§. II.

La via dell'esperienza e dell'osservazione ha finalmente tolto di mezzo, se non erro, tutti questi ostacoli, come può vedersi nella mia Memoria intorno al moto de' liquidi uscenti da' fori delle conserve pubblicata nel IV. Tomo della Società Italiana. Imperciocchè, lasciando da parte tutto ciò che può essere in quella Memoria di mio concetto, a cui non vo' dare altro peso fuorchè quello che costrigneranno a concedergli le considerazioni avvenire, è intanto di fatto innegabile, che la condizione dell'acqua soprastante all'orificio e mantenuta a costante altezza è quella di un'acqua assolutamente ringorgata, ed è perciò di fatto, che non è ella nè stagnante, nè costituita in istato libero. In secondo luogo è deciso per le sperienze ivi esposte fatte col caricare di olio a varie altezze l'acqua sottoposta, a cui altr'acqua dava alimento attraverso l'olio, che la velocità dell'acqua uscente non è dovuta all'attuale discesa, come pensava coll' illustre *Nevvton* la maggior parte degl'idrodinamici. Contro questi fatti non v'ha specolazione, nè discorso in contrario che possa valere.

§. III.

Adunque non è più lecito di considerare l'acqua ch'esce, come se fosse caduta dalla superficie permanente, o dal limite del ringorgo, siccome dobbiamo dire più convenevolmente, e perciò non è necessario ricorrere alla vena contratta per conciliare co' fenomeni una tal sentenza, che non ha più luogo. Basta che nel calcolare gli esborsi pel foro effettivo si adoperi la vera velocità, ch'è propria del fluido all' origine della vena, cioè quella ch'è conforme all'esperienza.

§. IV.

Ed eccoci al nodo del determinare l'altezza dovuta alla velocità che ha l'acqua effettivamente al foro naturale della conserva, altezza, ch'è molto minore, come s'è detto, che non

è quella dal limite del ringorgo al foro. Per queſt'oggetto avendo riflettuto, che i margini del foro fanno, per riſpetto all'acqua ch'eſce della conſerva, quello per appunto che fanno i reſpignenti per riſpetto all'acqua corrente ne' canali, e che per conſeguenza, come in queſti, così ai margini del foro dee ſtabilirſi un'infleſſione di corſo con perdita di forza, facendoſi ivi neceſſariamente un'impulſione obbliqua che va calcolata, mi ſono induſtriato (Veggaſi quella Memoria alla pag. 387.) di conoſcere prima la miſura dell'obbliquità del corſo che dee ſtabilirſi ſotto un'altezza indeterminata d'acqua, per cui ho preſo l'unità. Determinata queſta, ſono andato in traccia della forza compoſta che riſulta dalla coazione ſimultanea delle preſſioni circonfuſe al foro. Finalmente mi riuſcì di trovare, che l'altezza dovuta alla velocità effettiva, che ha l'acqua all'origine della vena ſotto un carico d'acqua permanente che ha l'unità per altezza, è uguale a queſta funzione dell'unità

$$2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$$

preciſamente, altezza che diremo ridotta per diſtinguerla dall'altezza attuale dell'acqua ſopra il foro; e che in conſeguenza la velocità effettiva è uguale a queſta eſpreſſione

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{(\sqrt{5}-1)}$$

Svolgendo perciò queſte eſpreſſioni, e adoperando un maggior numero di decimali che non s'è fatto alla pag. 397. di quella Memoria per una maggiore approſſimazione al vero, troveremo

I. Che, preſa l'unità per altezza permanente, l'altezza ridotta non è che $\frac{11}{25}$ dell'unità, e però ſta la permanente alla ridotta come 25 a 11.

II. Che la velocità, che ſarebbe dovuta all'altezza attuale permanente, ſta alla velocità dovuta all'altezza ridotta, come 8 a $5\frac{5}{12}$, o come 96 a 65, e che però l'esborſo d'acqua, che ſi farebbe dal medeſimo foro, ſe la velocità foſſe

dovuta all'altezza attuale, ſta all' esborſo effettivo parimente come 8 a $5\frac{5}{12}$, o come 96 a 65.

Il che è per appunto ciò che riſulta a un bel circa da tutte le ſperienze antiche e moderne, dovendo attribuirſi agl' inevitabili errori, or in più or in meno, dello ſperimentare il divario che può ravviſarſi tra l'eſperienze e la legge.

§. V.

Queſto è il canone, che dicemmo, deſiderato (§. I.), onde trovare in ogni caſo l'altezza ridotta a cui è dovuta la velocità attuale dell'acqua uſcente da' fori. Imperciocchè ſe ſia *A* un' altezza permanente qualunque, e ſi faccia, come 25 a 11, così *A* ad un quarto proporzionale, ſarà $\frac{11}{25}A$ l' altezza ridotta a cui è dovuta la celerità attuale dell'acqua uſcente da un foro ſotto l' altezza permanente *A*. Il che poſto, aperta è la via onde riſolvere tutti i problemi, che poſſono venir in campo per l'erogazione dell'acqua dalle cateratte. Sia però conceduto di premettere alcune avvertenze preliminari a lume della pratica, e perchè ſi ſappia ben diſtinguere da tutti gli altri il caſo che alle conſerve ſi riduce, e va per conſeguenza ſoggettato al metodo che ſon per eſporre.

§. VI.

Poichè dunque è dimoſtrato, che l'acqua mantenuta nelle conſerve ad una coſtante altezza, mentr' eſce da qualche foro aperto nel fondo o ne' fianchi, è un' acqua ringorgata eſſenzialmente diſtinta dall' acqua libera, e dalla ſtagnante, è indubitata coſa, che non deve confonderſi cogli altri queſto ſtato, perchè a lui ſolo poſſano appropriarſi le leggi ſtabilite qui ſopra. Biſogna dunque primamente, che il lume ſia terminato per ogni verſo, vale a dire, che preſenti all' acqua un' apertura determinata in altezza e larghezza, come ſono i fori ne' vaſi. Se l'emiſſario è aperto di baſſo in

alto, la derivazione appartiene al sistema dell'acque correnti per canali, non a quello de' vasi di cui è proposito in questo luogo. Secondariamente bisogna, che la superficie dell'acqua imminente all'apertura dell'emissario formonti il labbro superiore della bocca, e si mantenga orizzontale e quieta sensibilmente: condizione dell'acqua ringorgata che la distingue dalla corrente. E questo è quel rialto permanente che gl'Italiani chiamano *Battente*, e lo misurano da detta superficie dell'acqua all'orlo o labbro, che dicemmo, superiore della bocca, espressione convenuta di cui farò uso liberamente.

§. VII.

Cautamente pertanto dee procedere l'idrometra nell'applicare le regole fatte pe' vasi alle cateratte, dinanzi alle quali non sia l'acqua perfettamente ringorgata, ed orizzontale e permanente la superficie del ringorgo. Tutto è sconvolto, e la teorica de' vasi non ha più luogo, qualora sia imboccato il lume della cateratta da un' acqua corrente. E mal giudicherebbe pure se tenesse per soddisfatta la seconda condizione indicata qui innanzi (§. VI.) al solo vedere alcun poco formontato il labbro superiore della bocca dall'acqua uscente, mentre la superficie non fosse nello stesso tempo e si mantenesse orizzontale e quieta sensibilmente. Del che basti l'aver qui fatto parola, essendo gravissimo il danno che può farsi così al publico, come al privato interesse, confondendo condizioni d'acqua essenzialmente diverse; e può eziandio accadere, che si accusi d'insufficienza il metodo, mentre la colpa sia dell'idrometra, il quale non abbia per avventura ben accertato lo stato dell'acqua prima di appropriarle la condizione dell'acque ringorgate.

§. VIII.

Ma non finiscono qui le avvertenze per non isbagliare nell'estimazione dell'acqua uscente dalle cateratte messe in fianco de' fiumi. E' detto quanto basta per rispetto all'acqua anteriore, costituita immediatamente dinanzi alla cateratta,

ma non è detto ancora dell'acqua inferiore posta immediatamente sotto l' emissario. L'acqua ch'esce da' vasi sprizza in aria, ed è libera, prescindendo dalla resistenza dell'aria, da cui può prescindersi. Ma non sarebbe libera, nè potrebbe prescindersi dalla resistenza d'altro fluido più denso, e neppure dell'acqua medesima, se il getto vi fosse sommerso, e tanto meno quanto il fosse più profondamente. Il moto di quest' acqua fu prima di tutti considerato dal March. *Poleni* nel suo Trattato *de motu aquæ mixto* pubblicato del 1717, indi da *Danielle Bernoulli* nell'Idrodinamica, e da altri successivamente. Perchè dunque possa adattarsi agli emissarj in grande la teorica de' vasi, altro sarà il caso dell'acqua uscente libera dall' emissario, e tutt' altro quello in cui ella non abbia libera l'uscita. Per ridurre il secondo caso a quello de' getti sommersi ne' vasi, bisogna concepire, che mentre all'emissario anteriormente è accollato per uscire un corpo d'acqua ringorgata, altro corpo d' acqua ringorgata sia inferiormente accollato alla medesima bocca tendente ad uscire contrariamente sì, che due *battenti* per contrario verso si ravvisino a collo dell'emissario, e si verifichino da ambe le parti le condizioni del §. VI. Così mi pare che possa l'idrometra riconoscere sul momento a qual de' due appartenga il caso di derivazione d' acqua per una cateratta cioè se sia a flusso libero, o a flusso perturbato. Basta che esamini se la luce nel rovescio della cateratta sia accecata da acqua, che le si accolli intorno, e sommerga la vena, soprastando con un rialto o battente al labbro superiore dell'orifizio; oppure se vi si ravvisino distintamente gli orli dell'apertura liberi, come ne' cannelli che mandano acqua dalle sponde de' vasi. Nel primo caso il moto dell' acqua è indubitatamente perturbato, e libero nel secondo. Per quanto è a mia cognizione, questa condizione dell'acqua uscente dalle cateratte non è stata prima d' ora contemplata come oggetto da non trascurarsi nell' estimare gli esborsi de' nostri emissarj. Al che fare m' indusse l'osservar ch' io feci, che a poche si riducevano, tra le moltissime vedute, le derivazioni a flusso perfettamente libero. Dopo che avremo trattato in questa prima Memoria degli efflussi liberi, ci faremo a versare nella susseguente intorno a' perturbati, perchè la distribuzione

dell' acque riesca, s'è possibile, più esatta che non può essere senza aver riguardo alla diversa condizione delle derivazioni.

CAPITOLO SECONDO

Misura dell' acqua uscente dalle cateratte a flusso libero.

§. IX.

Premesse queste nozioni passiamo a rintracciare la misura dell' acqua ch' esce dalle cateratte verticali aperte in isponda de' fiumi, dinanzi alle quali si mantenga l'acqua ringorgata (§. VI.) a permanente altezza. Due elementi pertanto debbono determinarsi, la grandezza del lume, e la velocità ond' è animata la vena uscente sotto la data altezza permanente; posti i quali, si troverà per ogni caso la quantità assoluta dell' acqua ch' esce in un dato tempo. Questo è quello che cercheremo di fare nel modo più semplice e generale che sia possibile a vantaggio della pratica.

§. X.

E' costume degli Idraulici di calcolare la quantità dell' acqua fluente coll' aje delle parabole, in cui le ascisse esprimono le altezze dell' acqua, e le semiordinate le velocità a dette altezze dovute. Ma il metodo è limitato a figure di orificj puramente rettilinee, dovendo l' idrometra ricorrere ad altri partiti per le figure curvilinee. E' dunque miglior consiglio l' indagare regole più generali coll' analisi perchè in tutti i casi un solo metodo serva al bisogno; mentre, se non si voglia far uso delle Tavole, niente meno, e forse più di applicazione richiede il maneggio dell' aje paraboliche, di quel che possa esigere in circostanze simili la sostituzione de' valori numerici alle lettere nelle formule che l' Algebra può esibire.

§. XI.

§. XI.

PROBLEMA I.

Trovare l'assoluta velocità dovuta a qualsivoglia altezza.

Misurandosi la velocità nel moto uniforme dallo spazio percorso in un dato tempo, s'intenda, che la velocità dimandata sia per un minuto secondo. E poichè un grave cadendo liberamente dalla quiete percorre in un minuto secondo piedi parigini $15\frac{1}{12}$ di altezza, cioè pollici 181, e perciò mosso uniformemente con la velocità acquistata in fine di questa caduta percorre in un secondo pollici 362, sarà questa la velocità per un secondo dovuta all'altezza di piedi $15\frac{1}{12}$.

Essendo poi le velocità in fine delle discese libere dalla quiete proporzionali alle radici quadrate delle altezze percorse, se sia A un'altezza qualunque, V la velocità dovuta a quest'altezza, sarà $\sqrt{181}$ a 362 come $\sqrt{A}$ ad V, e sarà V lo spazio in parti della specie di A che percorrerà il grave di moto uniforme in un minuto secondo. In conseguenza sarà

$$181:(362)^2 = 181:2^2.(181)^2 = 1:4.181$$

$$= 1:724 = A:V^2, \text{ e avrà luogo l'equazione}$$

$$724A - V^2 = 0$$

col mezzo della quale, data in piedi, pollici, o linee l'altezza A, sarà pure dato in piedi, pollici, o linee lo spazio V che percorre un grave uniformemente in un minuto secondo con la celerità acquistata in fine della discesa dall'altezza A, cioè la ricercata assoluta velocità dovuta all'altezza A. Il che ecc.

§. XII.

PROBLEMA II.

Propoſta qualſivoglia figura per orificio verticale di una cateratta, e data l' altezza permanente dell' acqua ringorgata ſopra il medeſimo orificio, trovare la quantità di acqua che queſt' orificio ſomminiſtra in un minuto ſecondo ſotto una tale altezza.

Sia *FGD* (*Fig. I.*) la figura del lume ſommerſo, *ACB* la ſuperficie dell' acqua ringorgata, *FG* la foglia, *DE* l' altezza totale del lume ſopra la ſoglia, *CE* l' altezza del fluido ſopra la medeſima ſoglia, e ſieno *bf*, *dg* due rette infinitamente proſſime ordinate all' altezza *DE* preſa come aſſe della figura. Concepiamo pertanto l' orificio *FGD* diviſo in un numero infinito di trapezj elementari *bdgf*, conſiderando ciaſcuno di eſſi come un orificio particolare i cui punti ſieno ugualmente diſtanti dalla ſuperficie *AB* del liquore, e ſi faccia $CE = H$, $CD = b$, $Da = x$, $ab = y$; ſarà $ac = dx$, $DE = H - b$. Eſſendo dimoſtrato, che l' altezza dovuta alla velocità del trapezio elementare *bdgf* non è altrimenti l' altezza *Ca*, ma sì bene $2Ca \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3$, cioè aſſai proſſimamente $\frac{11}{25}\, Ca$ (§. V.) $= \frac{11}{25}\,(b + x)$, ſi ſoſtituiſca nell' eſpreſſione del §. precedente queſto valore in luogo di *A*, e la velocità aſſoluta di detto trapezio ſarà

$$V = \sqrt{\left(\frac{7964}{25}(b + x)\right)}$$

ch' è lo ſpazio effettivo che può percorrere uniformemente il trapezio in un minuto ſecondo ſotto l' altezza permanente *Ca*. Moltiplicando pertanto la velocità *V* per l' aja del trapezio $2ydx$, ſarà $\frac{2}{5}\, ydx \sqrt{\left(7964(b + x)\right)}$ la quantità elementare di acqua esborſata dall' orificio *bdgf* in un minuto ſecondo, e la ſomma di tutte queſte quantità elementari ſa-

rà indefinitamente la quantità di fluido che può essere somministrata dall' orificio *Dfb* coll' altezza $Da = x$ in un minuto secondo. Sarà ella pertanto espressa dalla forma integrale

$$(A) \ldots\ldots \int \tfrac{2}{3} y dx \sqrt{(796\tfrac{1}{4}(b+x))} + \text{Cost. arb. } K.$$

Se dunque dall' equazione alla figura *FDG* si sostituisca il valore di y in x e costanti, s' integri, e si determini K a condizione che posto $x = o$ sia nulla l' espressione, non resterà che porre $H - b = DE$ per x, e si otterrà la quantità totale di fluido uscente dall' orificio intero *FDG* in un secondo di tempo sotto l' altezza $CE = H$ dalla soglia, o sotto l' altezza $CD = b$ del battente. Il che ecc.

§. XIII.

Questa soluzione abbraccia tutte le figure algebraiche che possono assegnarsi alle cateratte con tutta la generalità che può mai pretendersi dal calcolo senza ricorrere in alcun caso alle aje paraboliche, o ad altro suffragio della Geometria. Che se la grandezza dell' apertura sia nota, basterà determinare la velocità assoluta della vena uscente per venir in cognizione della quantità di acqua che quell' orificio trasmette in un dato tempo. Ma gli orificj verticali collocati in fianco delle conserve o de' canali di acqua corrente differiscono in questo dagli orizzontali, che non hanno effettivamente tutti i punti del lume a eguale distanza dalla superficie del fluido ringorgato. Ragione per altro insegna, che un punto deve esistere nel medesimo lume, la cui distanza da detta superficie è tale, che se a tutti i punti dell' acqua uscente costituiti in quel lume si attribuisse una sola e comune velocità dovuta ad una tale distanza, tanto sarebbe il flusso d' acqua in un dato tempo con questa media velocità, quanto è quello che si fa con le celerità naturali e varie della vena. Bisogna dunque indicare il metodo onde determinare questa velocità media, e bisogna farlo come il richiede la generalità dell' espressione *(A)* del §. XII.

§. XIV.

PROBLEMA III.

Proposta qualsivoglia figura per orificio verticale di una cateratta, e data l altezza permanente dell'acqua ringorgata sopra il medesimo orificio, trovare l'assoluta velocità media dell'acqua ch'esce per un tale orificio.

Posta la medesima figura *FDG* (*Fig. I.*) della Prop. precedente, *AB* la superficie permanente, e la stessa denominazione per le misure, si chiami Y la velocità media ricercata. Essendo $\int 2ydx$ l'espressione indefinitamente dell'aja *Dfb*, è certo, che $Y\int 2ydx$ esprimerà l'assoluta quantità di acqua, che esce dall'orificio che ha $\int 2ydx$ per aja, giacchè Y è velocità assoluta per supposizione. Ma detta quantità di acqua è espressa indefinitamente dalla quantità (*A*) del §. XII. Dunque avrà luogo l'equazione

$$Y\int ydx = \int \tfrac{1}{5} ydx \sqrt{(7964(h+x))}$$

e però sarà la velocità media dimandata

$$(B) \ldots\ldots Y = \frac{\int \tfrac{1}{5} ydx \sqrt{(7964(h+x))}}{\int ydx}$$

qualunque siasi la figura *FDG*. Sostituito pertanto dall'equazione alla medesima figura il valore di y in x, integrata la formula (*B*), e posto $H-h$ per x nell'integrale completo, si avrà la velocità media ricercata dell' acqua ch esce dall' intero lume *FDG* sotto la superficie permanente *AB*. Il che ecc.

§. XV.

In queste due formule (*A*), (*B*) è compreso tutto ciò che può proporsi intorno agli esborsi di acqua così dalle aperture de' vasi, come dalle cateratte in fianco de' canali, ove sia l'acqua ringorgata a permanente altezza sopra le aperture. Ma oltre alla generalità per qualunque figura algebraica, e al comodo del dispensare l'idrometra dall'uso, d'altronde pregevolissimo, dell'aje paraboliche nell'estimazione degli es-

flussi, hanno il vantaggio ancora queste formule di determinare l'effettiva quantità di acqua senza bisogno di ricorrere ad alcuna correzione per la contrazione della vena. Mi propongo dunque di farne applicazione alla sola figura rettangolare, ch'è la comune ed usuale delle nostre cateratte, lasciando all'arbitrio dell'idrometra l'applicarle a qualunque altra figura. Noi abbiamo qui in mira più la pratica che la speculazione.

§. XVI.

PROBLEMA IV.

Determinare la quantità di acqua ch'esce in un minuto secondo dalla cateratta rettangolare verticale ABCD (Fig. II.) *sotto il battente* EF.

Si chiami L la larghezza CD del lume $ABCD$, e sarà $y = \frac{L}{2}$ l'equazione alla figura rettangolare, $EG = H$, il battente $EF = h$, $FG = H - h$. Posta pertanto nell'espressione

$$(A) \; \ldots\ldots \int \tfrac{2}{3} y dx \sqrt{(7964(h+x))} + K$$

la larghezza L della nostra luce in luogo di $2y$, l'integrale della forma differenziale

$$dx \sqrt{(7964(h+x))}$$

essendo $\frac{2}{3}(h+x)\sqrt{(7964(h+x))}$, si troverà, che l'integrale della formula (A) sarà

$$\frac{2L}{15}(h+x)\sqrt{(7964(h+x))} + K$$

e completamente avrà la forma (C)

$$(C) \; \ldots\ldots \frac{2L\sqrt{(7964)}}{15}\left((h+x)\sqrt{(h+x)} - h\sqrt{h}\right)$$

Ma siccome il radicale $\sqrt{(7964)}$ è costante in tutti i casi,

ed uguaglia proſſimamente 89.24, cioè $\frac{2231}{25}$, così poſta per x l'altezza $H-h$ del lume intero, l'eſpreſſione dell'effettiva quantità di acqua uſcente in un minuto ſecondo dalla luce $ABCD$ ſi ridurrà a queſta forma

$$(C') \ldots\ldots \frac{4462\,L}{375}\left(H\sqrt{H}-h\sqrt{h}\right).$$

Il che ecc.

§. XVII.

PROBLEMA V.

Trovare la velocità media dell'acqua ch'eſce dal lume ABCD *ſotto il battente* EF.

Poſte le denominazioni precedenti, ſi riaſſuma la formula generale (B) della velocità media

$$(B) \ldots\ldots Y=\frac{\int \frac{1}{5} y dx \sqrt{\left(7964(h+x)\right)}}{\int y dx}$$

Si metta $\frac{1}{2}L$ in luogo di y ſotto e ſopra, s'integri, e ſi completino ſeparaŕamente gl'integrali. Si otterrà

$$Y=\frac{2\sqrt{7964}}{15}\left(\frac{(h+x)\sqrt{(h+x)}-h\sqrt{h}}{x}\right)$$

e poſto $H-h=FG$ in luogo di x, $\frac{2231}{25}$ in luogo di $\sqrt{(7964)}$, ſarà

$$(D) \ldots\ldots Y=\frac{4462}{375}\left(\frac{H\sqrt{H}-h\sqrt{h}}{H-h}\right)$$

il valore della velocità media ricercata.

§. XVIII.

Ancorchè il maneggio di qualunque delle due formule (C'), (D) non altro richiegga dall'idrometra, se non che sostituisca ad L nella formula (C') la larghezza dell'apertura, alla lettera H l'altezza dalla superficie dell'acqua ringorgata alla soglia in entrambe le formule, e così per h il valore del battente (tutto però in misure della stessa specie), e colle prime regole dell'Aritmetica, facendo uso della Tavola delle radici che abbiamo messo in calce della Memoria, trovi in numeri il valore che ricerca, è bene che si diano alcuni esempj per facilità della pratica.

I. ESEMPIO

Trovare in pollici cubici la vera quantità che costituisce il così detto quadretto di acqua nello Stato veneto.

Per quadretto d'acqua, ove si tratti di acqua ringorgata ed accollata alla bocca di una cateratta, donde poi esca libera e s'incanali senza che sia sommersa inferiormente la bocca medesima, s'intende comunemente il corpo di acqua ch' esce da una luce rettangolare quadrata, come *ABCD* (*Fig. II.*), di un piede per ogni lato, e con due pollici di battente *EF*. Pertanto sarà $L=12$ poll., $H=14$ poll., $h=2$ poll., e però, riassunta la formula generale (§. XVI.)

$$(C') \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{4462}{375} L\left(H\sqrt{H}-h\sqrt{h}\right)$$

vi si sostituiscano i valori di L, H, h, e si avrà

$$\frac{4462 \cdot 12}{375}\left(14\sqrt{14}-2\sqrt{2}\right)=\frac{17848}{125}\left(14\sqrt{14}-2\sqrt{2}\right).$$

Ma dalla Tavola delle radici $\sqrt{14}=3.74$, $\sqrt{2}=1.41$, e perciò l'espressione ridotta sarà $7073\,\frac{1623}{3125}$. Adunque la quantità di acqua costituente un veneto quadretto libero sa-

rà per ogni minuto secondo pollici cubici $7073\frac{1623}{3125}$, la quale per facilità, trattandosi di misura modulare per l'altre bocche, potrà assumersi di pollici cubici 7074.
Il che ecc.

II. Esempio.

Trovare la quantità di acqua costituente l' oncia milanese libera.

Quest' oncia consiste in una luce rettangolare larga tre oncie lineari, ed alta quattro con due altre oncie di battente. Posto ciò, sarà $L = 3$ onc., $H = 6$ onc., $h = 2$ onc. Sostituendo questi valori nella formula (C'), si avrà

$$\frac{4462.3}{375}(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) = \frac{4462}{125}(11.88) = 424\frac{214}{3125};$$

e però somministra detta oncia libera milanese per ogni minuto secondo oncie cubiche d' acqua $424\frac{214}{3125}$, semprechè sia l' acqua soprastante all' orificio ringorgata, come le condizioni richiedono del §. VI.
Il che ecc.

III. Esempio.

Trovare quant' acqua passa in un minuto secondo per una bocca libera rettangolare alta dieci pollici, larga trentatre pollici, con due piedi e un pollice di battente.

Essendo il battente di pollici 25, e l' altezza della bocca di pollici 10, sarà $H = 25$, $h = 5$, $L = 33$, si sostituisca no pertanto questi valori nella formula (C') e si avrà

$$\frac{4462.33}{375}(35\sqrt{35} - 25\sqrt{25}) = \frac{4462.11.7\sqrt{7}}{5\sqrt{5}} - 11.4462.$$

Ma dalla Tavola delle radici $\sqrt{7} = 2.65$, $\sqrt{5} = 2.24$; dunque il valore ricercato sarà

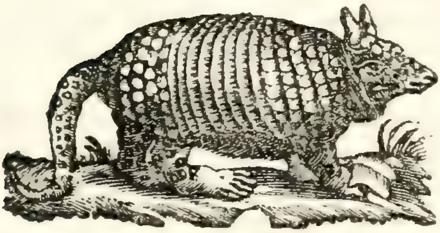
$$\frac{4462.11.7.265}{5.224} - 11.4462 = 32276.32$$

e però

e però l' acqua che paſſa per una tal luce ſarà di poll. cub. 32276.32, cioè quadretti $4 \frac{1792}{3577}$. Il che ecc.

§. XIX.

Queſto è brevemente quello che m' era propoſto di fare, cioè di ridurre a regole ſemplici il miſurare l' acqua ch' eſce dalle cateratte con moto libero, ſenza biſogno di correzioni e conformemente all' eſperienza. Non è troppo, a mio credere, ciò che ſi eſige dall' idrometra nella maniera propoſta, non eſſendo permeſſo d' ignorar tutto, o di ſeguire al più una cieca pratica a chi pretende d' immetterſi in queſte materie.



DEL MISURARE

L'ACQUA CH'ESCE DALLE CATERATTE CON MOTO PERTURBATO.

MEMORIA II.

Del Medesimo.

§. XX.

NEl primo capitolo della Memoria precedente ho dichiarato lucidamente, che cosa debba intendersi per flusso perturbato. E' sì frequente il caso, che l'esito delle nostre cateratte riesca sommerso sott'acqua, che avrà ben occasione l'idrometra di accertarsi quant'era importante il considerare non sempre libero, come s'è fatto finora, l'efflusso degli emissarj. Questo pertanto è il luogo di farne trattazione, perchè sieno in pronto le regole ond'estimare nell'una e nell'altra condizione la portata delle derivazioni.

§. XXI.

Per mettere il caso sotto gli occhi, sia *AE* (*Fig. III.*) la superficie permanente dell' acqua superiormente accollata al foro *FD*, e *BC* quella dell'acqua accollata inferiormente al medesimo foro, sicchè non solamente l' ingresso sia sommerso sotto l'altezza *AD*, ma l'esito eziandio il sia sotto l'altezza *BD*. Si chiami acqua influente la superiore, e acqua recipiente l'inferiore. Si tratta di determinare la quantità di acqua ch'esce in un dato tempo dal foro *FD* costituito tra due acque stabilite, come mostra la figura. Ho creduto bene di trattare quest'argomento da sè, perchè la dignità sua il comporta, e perchè i principj su'quali bisogna fondar-

ne la discussione si estendono ben oltre al caso delle cateratte che abbiamo in mira. Il moto dell'acque ne' vasi sommersi, il moto ne' vasi interrotti da' diaframmi, quello de' fiumi agli sbocchi nel mare o in altri fiumi, ed altri simili movimenti perturbati dell'acqua, tutti debbono contemplarsi sotto un medesimo aspetto, e tutti con quello del caso nostro debbono co' medesimi principj definirsi.

§. XXII.

Moto perturbato di un sistema di corpi è quello in cui hanno luogo azioni reciproche de' medesimi corpi l'uno sull'altro.

Considerando i movimenti che ci cadono sotto i sensi cotidianamente, non ve n'ha alcuno per avventura in cui non si verifichi, rigorosamente parlando, qualche perturbazione, per parte almeno del mezzo, ove si fa e deve giudicarsi fatto qualunque movimento. Ma più che in altro sembra, che queste perturbazioni regnino ne' moti de' fluidi, ove s'immettono, per la loro mobilità, azioni mutue d' innumerabili corpicciuoli; sicchè parrebbe disperata cosa il definire le leggi e i fenomeni di simili movimenti, se non fosse lecito di considerare un determinato volume fluido in moto, come un tutto mosso ed operante per *modum unius*, estimando le sue azioni esterne senza indagare ciò che intestinamente le parti minime operano l'una sull'altra reciprocamente.

§. XXIII.

Ne' moti perturbati di un sistema di corpi in generale tre elementi vengono necessariamente in considerazione,

I. I moti proprj e semplici de' corpi indipendentemente dal sistema, cioè le azioni che produrrebbe ciascuno da sè se fosse solo, o non agisse alcun corpo del sistema sopra di lui,

II. Le azioni del sistema che restano distrutte, cioè le parti delle azioni proprie e semplici che restano distrutte per l'azione reciproca de' corpi del sistema l'un sull'altro,

III. Le azioni residue o i movimenti attuali del sistema ne' tempi successivi.

Posti due qualunque di questi elementi, è aperta la strada onde venire in cognizione del terzo. Considerando una o più azioni del sistema come principali, le altre in moltissimi problemi dinamici vengono contemplate e denominate resistenze; il che non altera, nè diversifica la cosa. In fatto se si esaminino tutte le quistioni, ove tendano corpi a muoversi con velocità e direzioni, cui sono forzati a cangiare per l'azione mutua ch'esercitano gli uni sugli altri, si troverà, che per la loro risoluzione è mestieri ricorrere al maneggio di questi elementi. Il secondo intanto dà luogo all'importantissima conseguenza, che *le azioni perdute si consumano sempre nel vincere uguali e contrarie azioni*, la quale è la base fondamentale della Statica de' solidi, e de' fluidi, cioè di tutti gli equilibrj. E qui si ravvisa onde sieno scaturiti i luminosi principj della Dinamica del Sig. d'*Alembert* e della Meccanica analitica del Sig. de la *Grange* riducenti le leggi del moto de' corpi a quelle del loro equilibrio. Supposto un sistema di corpi in moto, riguardano il moto, ond' è animato ciascun corpo in un dato istante, come composto di due parti, una delle quali sia il moto attuale che avrà il corpo nell'istante che segue, e l'altra un moto distrutto per l'azione reciproca de' corpi l'un sull'altro. Il moto onde riguardano animato ciascun corpo in un dato istante è egli altro che il primo degli elementi venuti in considerazione qui innanzi ne' moti perturbati? e similmente gli altri due sono eglino altra cosa dal terzo e secondo de' predetti elementi? Superiore per altro ad ogni laude è l'uso che hanno fatto di tali principj questi due illustri uomini, e specialmente la felicità con cui il Geometra italiano determina i moti che devono essere distrutti, e le leggi dell'equilibrio tra le forze che li producono in tutti i rami della scienza del moto.

Ma siccome non è sempre facile nè spedita operazione il discendere a' particolari da teorie eminentemente generali, e non mancano uomini che vogliono essere guidati dall'intelletto più che dal calcolo, e vedere frequentemente la colonna migliare nella strada che fanno; così non sarà infruttuoso, che siensi qui chiaramente esposti i principj fondamentali, che vanno messi in opera nel trattare de' moti perturba-

ti, perchè ciascuno ne' casi particolari vi ricorra da sè, come meglio gli torna comodo, indipendentemente da qualunque teoria. Così ho fatto nel caso che ho per mano, e così, se non erro, parmi che vada trattata la Teoria dell' acque fluenti da' vasi sommersi, o pe' vasi attraversati da diaframmi, e quella pure, come s'è detto, degli sbocchi de' fiumi in mare o in altri fiumi.

§. XXIV.

Ripigliamo dunque il proposito del §. XXI., e la **fig. III.** E' cosa indubitata, che in questa condizione di cose la copia d' acqua ch' esce in un dato tempo dall' apertura *FD* è minore di quella che si smaltirebbe in pari tempo dal medesimo foro, se la vena mettesse capo in aria liberamente. Imperciocchè l' acqua recipiente continuamente accollata al foro *FD* oppone all' acqua influente *AE* una resistenza da vincere, la quale rintuzza e scema la velocità che le è dovuta sotto l' altezza permanente *AD*. E' chiaro pertanto, che al foro *FD* havvi un sistema di corpi tendenti a muoversi con velocità cui sono sforzati a cangiare per l' azione mutua ch' esercitano gli uni sugli altri.

Se non vi avesse l' acqua recipiente *BC*, si moverebbero le parti dell' influente *AE* liberamente pel foro *FD* con la velocità competente sotto l' altezza *AD*; e se non vi avesse l' acqua *AE*, si moverebbero le parti dell' acqua *BC* liberamente pel medesimo foro con la velocità competente sotto l' altezza *BD*. In conseguenza al foro *FD* si verifica il moto perturbato che abbiamo qui innanzi definito, e havvi necessariamente perdita di azione ad ogni istante, ossia di quantità di moto, cui possiamo stabilire così, inerendo al §. precedente:

L' azione che si perde ad ogn' istante al foro FD *per parte dell' acqua influente sotto l' altezza permanente* AD, *si consuma nel vincere l' azione uguale e contraria esercitata dall' acqua recipiente sotto l' altezza permanente* BD.

§. XXV.

Ciò determinato, che non pare poterſi mettere in dubbio, veggiamo dell' azione reſidua, o dell' azione attuale che reſta all' acqua influente dopo queſta perdita, giacchè l' azione libera di queſta ſotto l' altezza *AD* è maggiore dell' azione libera, che potrebbe produrre l' acqua recipiente ſotto l' altezza *BD*. Oſcuriſſima coſa è ſtato ſempre il definire con qual legge ſi alterino le velocità dell' acque influenti in genere pel contraſto che ſoffrono dall' acque recipienti. Graviſſimi uomini hanno preteſo ne' tempi andati, e il pretendono tuttavia Geometri viventi, che non altro debba conſiderarſi in queſto contraſto in linea di reſiſtenza fuorchè la preſſione che l' acqua recipiente eſercita all' ingreſſo dell' acqua influente. Sicchè equilibrandoſi la preſſione dell' acqua recipiente con altrettanta preſſione dell' acqua influente ſotto il comune livello *HBC*, non debba rimanere che l' eccesſo delle preſſioni il quale poſſa imprimere velocità all' acqua uſcente, vale a dire che la velocità attuale ſia dovuta all' altezza *AB*, eccesso dell' altezza *AD* ſopra l' altezza *BD*. Ma ben riflettendo alle coſe, e diſtinguendo i fluidi comunicanti in quiete nell' Idroſtatica dai fluidi comunicanti in movimento nell' Idrodinamica, forza è credere, che non ſia altrimenti mera preſſione o peſo ciò che ſi equilibra in ſimile contraſto; e conchiudere, che non d' altro naſca diſtruzione e perdita che di movimenti, e che ſieno veramente azioni eguali e contrarie quelle che ſi equilibrano. M' induco perciò ad abbracciare altra ſentenza, ſoſtenendo, che per l' azione attuale non vada già preſa l' azione che può eſſere prodotta dalla differenza delle preſſioni in contraſto, ma sì bene l' azione che ſopravanza all' acqua influente, detratta quella parte che ſi conſuma nel vincere l' azione uguale e contraria eſercitata dall' acqua recipiente, ch' è coſa diverſa.

§. XXVI.

Rappreſentiamoci pertanto la fig. I. in proſpetto, e ſia *CFE* (*Fig. IV.*) il lume della cateratta di qualſivoglia figu-

ra algebraica, *MA* la ſuperficie permanente dell' acqua influente, *QB* la ſuperficie permanente dell' acqua recipiente, e ſia, come al §. XII. della Memoria precedente, diviſa l' apertura *CFE* in un numero infinito di trapezj elementari *bfgd*. Conſideriamo ciaſcuno di queſti trapezj come un orificio i cui punti ſieno ugualmente diſtanti per un verſo dalla ſuperficie *MA*, e per l' altro oppoſto dalla ſuperficie *BQ*. Si faccia l' altezza dell' acqua influente ſopra la ſoglia $AD = H$, l' altezza dell' acqua recipiente $BD = H'$, il battente della prima $AF = h$, il battente della ſeconda $BF = h'$, $Fa = x$, $ab = y$; ſarà $FD = H - h = H' - h'$, $ac = dx$. Col metodo della prima Memoria troveremo, che la velocità aſſoluta del trapezio elementare di acqua *bfgd*, o lo ſpazio ch' egli percorrerebbe uniformemente in un minuto ſecondo, ſe foſſe rimoſſa l' acqua recipiente, ſarebbe $V = \sqrt{\left(\frac{7964}{25}(h+x)\right)}$, e quella del medeſimo trapezio fluido *bfgd* per contrario verſo, ſe foſſe rimoſſa l' acqua influente, ſarebbe $V' = \sqrt{\left(\frac{7964}{25}(h'+x)\right)}$. Moltiplicando dunque l' una e l' altra di queſte velocità V, V' per l' aja del trapezio $2ydx$, ſarà

$$\frac{2}{5} ydx \sqrt{(7964(h+x))}$$

la quantità di moto libero del trapezio liquido, oſſia la quantità elementare di acqua ch' esborſerebbe l' apertura *bfgd* in un minuto ſecondo ſotto l' altezza *Aa*, ſe foſſe libera, e

$$\frac{2}{5} ydx \sqrt{(7964(h'+x))}$$

la quantità elementare che ſomminiſtrerebbe la ſteſſa apertura in pari tempo ſotto l' altezza *Ba*, ſe foſſe libera. Dunque prendendo le ſomme di queſte quantità elementari, ſarà

$$(A) \ldots \int \frac{2}{5} ydx \sqrt{(7964(h+x))}$$

indefinitamente la quantità di moto che avrebbe la ſezione liquida *Ffb* ſotto l' altezza *Aa*, ſe foſſe libera, e

$$(B) \ldots \int \frac{2}{5} y dx \sqrt{(7964\,(b'+x))}$$

la quantità di moto della medesima sezione *Ffb* per contrario verso sotto l'altezza *Ba*, se fosse libera. Ma sono direttamente contrarj i moti (*A*) (*B*); dovrà dunque impiegarsi continuamente una parte dell' azione maggiore (*A*) nel vincere la minore (*B*): onde sarà (*B*) l'azione distrutta, e l' azione residua dell' acqua influente, cioè la quantità di moto attuale, sarà necessariamente (*A*) − (*B*), vale a dire

$$(C) \ldots \frac{2}{5} \int y dx \sqrt{(7964)} \left(\sqrt{(b+x)} - \sqrt{(b'+x)} \right) + K;$$

e questa sarà la quantità di acqua somministrata in un minuto secondo dal foro *fFb* di moto perturbato. Sostituito dall' equazione alla figura *CFE* il valore di y in x, e integrata la formula sì, che si annienti quando $x = 0$, ed abbia il suo valore completo quando sia $x = FD = H - b = H' - b'$, si avrà la quantità totale di fluido uscente per ogni secondo di tempo dall' intera apertura *CFE*; com' era proposto da trovarsi.

§. XXVII.

E se si chiami Y la velocità media, si troverà, come al §. XIV. questa espressione

$$(C') \ldots Y = \frac{1}{5} \int \sqrt{(7964)} \left(\sqrt{(b+x)} - \sqrt{(b'+x)} \right) : \int y dx$$

della velocità media nel moto perturbato.

§. XXVIII.

Nelle due formule (*C*), (*C'*) è compreso tutto ciò che può essere chiesto da determinare intorno agli esborsi assoluti di acqua dalle cateratte a flusso perturbato, qualunque siasi la figura dell' apertura per cui deve fluire l'acqua, senza bisogno di ulteriori riduzioni. Ne faremo dunque applicazione alla figura rettangolare usuale, ben persuaso che comprenda ognuno non essere che un affare di calcolo, e più di speculazione che di pratica l'applicare le nostre formule ad altre figure algebraiche.

§. XXIX.

§. XXIX.

Determinare la quantità di acqua ch' esce per ogni minuto secondo dalla cateratta rettangolare verticale ABCD (Fig. II.) *con flusso perturbato sotto l' altezza* EG *dell' acqua influente ed* HG *dell' acqua recipiente sopra la comune soglia* CD.

Si chiami L la larghezza $CD = AB$ del lume, e come qui innanzi $EG = H$, $HG = H'$, $EF = h$, $HF = h'$. Sarà $L = 2y$ l' equazione alla figura. Essendo (Mem. preced. §. XVI.)

$$(P) \ldots\ldots\ldots \frac{4462\,L}{375}\left(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}\right)$$

la quantità di liquore che somministrerebbe l' influente se fosse libero sotto l' altezza EG in un minuto secondo, e

$$(Q) \ldots\ldots \frac{4462\,L}{375}\left(H'\sqrt{H'} - h'\sqrt{h'}\right)$$

quella che sarebbe somministrata contrariamente in pari tempo dal recipiente se fosse libero sotto l' altezza HG, sarà l' effettiva copia di acqua uscente in un secondo di tempo dalla luce $ACDB$ di moto perturbato (§. XXVI.) espressa dalla forma seguente

$$(R) \ldots\ldots \frac{4462\,L}{375}\left(H\sqrt{H} - H'\sqrt{H'} + h'\sqrt{h'} - h\sqrt{h}\right)$$

Il che ecc.

§. XXX.

La formula (R) serve generalmente così per le bocche a flusso perturbato, come per le bocche a flusso libero. Basta che per queste si ponga $H' = o$, $h' = o$, e la forma si riduce all' ordinaria che abbiamo trovato per le luci libere. Non serve pertanto, che nuove avvertenze si aggiungano per l' idrometra pratico a quelle che si sono insinuate nella Memo-

ria precedente. Qualora riconosca, il che sarà non tanto di rado, che non solamente la luce dinanzi alla cateratta sia sommersa, com'esser deve, ma l'esito eziandio nella parte opposta stia sepolto sott'acqua, non ha che a far uso della formula *(R)*, la quale non involge maggior difficoltà dell'altra a luce libera, sicchè non è mestieri d'illustrarla con esempj bastando gli addotti nella Memoria precedente.

Seguono le Tavole.

Altezze		Radici	Altezze		Radici	Altezze		Radici
1		1 00	37	—	6 08	73	—	8 5[illegible]
2	—	1 41	38	—	6 16	74	—	8 6[illegible]
3	—	1 73	39	—	6 24	75	—	8 66
4		2 00	40	—	6 32	76	+	8 7[illegible]
5	+	2 24	41	—	6 40	77	—	8 77
6	+	2 45	42	—	6 48	78	—	8 8[illegible]
7	+	2 65	43	+	6 56	79	+	8 8[illegible]
8	+	2 83	44	—	6 63	80	—	8 [illegible]4
9		3 00	45	+	6 71	81		9 00
10	—	3 16	46	—	6 78	82	+	9 06
11	+	3 32	47	+	6 86	83	—	9 11
12	—	3 46	48	+	6 93	84	+	9 17
13	+	3 61	49		7 00	85	+	9 22
14	—	3 74	50	—	7 07	86	—	9 27
15	—	3 87	51	—	7 14	87	—	9 33
16		4 00	52	—	7 [illegible]1	88	—	9 [illegible]
17	—	4 12	53	—	7 28	89	—	9 43
18	—	4 24	54	+	7 35	90	+	9 4[illegible]
19	+	4 36	55	+	7 42	91	+	9 54
20	—	4 47	56	—	7 48	92	—	9 59
21	—	4 58	57	+	7 55	93	—	9 64
22		4 69	58	+	7 62	94	+	9 70
23	+	4 80	59	—	7 68	95	+	9 75
24	+	4 90	60	+	7 75	90	+	9 8[illegible]
25		5 00	61	—	7 81	97	+	9 85
26	+	5 10	62	—	7 87	98	+	9 9[illegible]
27	+	5 20	63	+	7 94	99	+	9 95
28	—	5 29	64		8 00	100		10 00
29	—	5 39	65	—	8 06	101	+	10 05
30	+	5 48	66	—	8 12	102	+	10 10
31	+	5 57	67	+	8 19	103	+	10 15
32	+	5 66	68	—	8 24	104	+	10 2[illegible]
33	—	5 74	69	+	8 31	105	+	10 2[illegible]
34	—	5 83	70	+	8 37	106	+	10 30
35	+	5 92	71	+	8 43	107	—	10 [illegible]4
36		6 00	72	+	8 49	108	—	10 39

Altezze	Radici			Altezze	Radici			Altezze	Radici		
109	—	10	44	145	—	12	04	181	—	13	45
110	+	10	49	146	—	12	08	182	—	13	49
111	+	10	54	147	—	12	12	183	+	13	53
112	+	10	58	148	+	12	17	184	—	13	56
113	—	10	63	149	+	12	21	185	—	13	60
114	+	10	68	150	+	12	25	186	+	13	64
115	—	10	70	151	+	12	29	187	—	13	67
116	—	10	77	152	+	12	33	188	—	13	71
117	+	10	82	153	+	12	37	189	+	13	75
118	—	10	86	154	+	12	41	190	—	13	78
119	+	10	91	155	+	12	45	191	—	13	82
120	—	10	95	156	+	12	49	192	+	13	86
121		11	00	157	+	12	53	193	—	13	89
122	+	11	05	158	+	12	57	194	+	13	93
123	—	11	09	159	+	12	61	195	—	13	96
124	+	11	14	160	+	12	65	196		14	00
125	—	11	18	161	+	12	69	197	+	14	04
126	—	11	22	162	+	12	73	108	—	14	07
127	+	11	27	163	+	12	77	199	+	14	11
128	—	11	31	164	+	12	81	200	—	14	14
129	+	11	36	165	+	12	85	201	—	14	18
130	—	11	40	166	—	12	88	202	—	14	21
131	+	11	45	167	—	12	92	203	—	14	25
132	+	11	49	168	—	12	96	204	—	14	28
133	—	11	53	169		13	00	205	+	14	32
134	+	11	58	170	+	13	04	206	—	14	35
135	+	11	62	171	+	13	08	207	+	14	39
136	—	11	66	172	—	13	11	208	—	14	42
137	—	11	70	173	—	13	15	209	+	14	46
138	+	11	75	174	—	13	19	210	—	14	49
139	+	11	79	175	+	13	23	211	+	14	53
140	—	11	83	176	+	13	27	212	—	14	56
141	—	11	87	177	—	13	30	213	—	14	59
142	+	11	92	178	—	13	34	214	+	14	63
143	+	11	96	179	+	13	38	215	—	14	66
144		12	00	180	+	13	42	216	+	14	70

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
217	— 14 73	253	+ 15 91	289	17 00
218	— 14 76	254	+ 15 94	290	+ 17 03
219	+ 14 80	255	+ 15 97	291	+ 17 06
220	— 14 83	256	16 00	292	+ 17 09
221	+ 14 87	257	— 16 03	293	+ 17 12
222	+ 14 90	258	— 16 06	294	+ 17 15
223	— 14 93	259	— 16 09	295	+ 17 18
224	+ 14 97	260	— 16 12	296	— 17 20
225	15 00	261	+ 16 16	297	— 17 23
226	— 15 03	262	+ 16 19	298	— 17 26
227	+ 15 07	263	+ 16 22	299	— 17 29
228	+ 15 10	264	+ 16 25	300	— 17 32
229	— 15 13	265	+ 16 28	301	+ 17 35
230	+ 15 17	266	— 16 30	302	+ 17 38
231	+ 15 20	267	— 16 34	303	+ 17 41
232	— 15 23	268	— 16 37	304	+ 17 44
233	— 15 26	269	— 16 40	305	— 17 46
234	+ 15 30	270	— 16 43	306	— 17 49
235	+ 15 33	271	— 16 46	307	— 17 52
236	— 15 36	272	— 16 49	308	+ 17 55
237	— 15 39	273	— 16 52	309	+ 17 58
238	+ 15 43	274	— 16 55	310	+ 17 61
239	+ 15 46	275	— 16 58	311	+ 17 64
240	— 15 49	276	— 16 61	312	— 17 66
241	— 15 52	277	— 16 64	313	— 17 69
242	+ 15 56	278	— 16 67	314	— 17 73
243	+ 15 59	279	— 16 70	315	+ 17 75
244	— 15 62	280	— 16 73	316	+ 17 78
245	— 15 65	281	— 16 76	317	— 17 80
246	— 15 68	282	— 16 79	318	— 17 83
247	+ 15 72	283	— 16 82	319	— 17 86
248	+ 15 75	284	— 16 85	320	+ 17 89
249	+ 15 78	285	— 16 88	321	— 17 92
250	— 15 81	286	— 16 91	322	— 17 94
251	— 15 84	287	— 16 94	323	— 17 97
252	+ 15 88	288	— 16 97	324	18 00

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
325	+ 18 03	361	19 00	397	— 19 92
326	+ 18 06	362	+ 19 03	398	+ 19 95
327	— 18 08	363	— 19 05	399	— 19 97
328	— 18 11	364	+ 19 08	400	20 00
329	+ 18 14	365	— 19 10	401	— 20 02
330	+ 18 17	366	— 19 13	402	+ 20 05
331	— 18 19	367	+ 19 16	403	— 20 07
332	— 18 22	368	— 19 18	404	+ 20 10
333	+ 18 25	369	+ 19 21	405	— 20 12
334	+ 18 27	370	+ 19 24	406	+ 20 15
335	— 18 30	371	— 19 26	407	— 20 17
336	— 18 33	372	+ 19 29	408	+ 20 20
337	+ 18 36	373	— 19 31	409	— 20 22
338	— 18 38	374	+ 19 34	410	+ 20 25
339	— 18 41	375	+ 19 37	411	— 20 27
340	+ 18 44	376	— 19 39	412	+ 20 30
341	+ 18 47	377	+ 19 42	413	— 20 32
342	— 18 49	378	— 19 44	414	+ 20 35
343	— 18 52	379	+ 19 47	415	— 20 37
344	+ 18 55	380	— 19 49	416	+ 20 40
345	— 18 57	381	+ 19 52	417	— 20 42
346	— 18 60	382	— 19 54	418	+ 20 45
347	+ 18 63	383	— 19 57	419	+ 20 47
348	— 18 65	384	+ 19 60	420	— 20 49
349	— 18 68	385	— 19 62	421	+ 20 52
350	+ 18 71	386	+ 19 65	422	— 20 54
351	+ 18 74	387	— 19 67	423	+ 20 57
352	— 18 76	388	— 19 69	424	— 20 59
353	+ 18 79	389	+ 19 72	425	+ 20 62
354	+ 18 82	390	+ 19 75	426	+ 20 64
355	— 18 84	391	— 19 77	427	— 20 66
356	+ 18 87	392	+ 19 80	428	+ 20 69
357	— 18 89	393	— 19 82	429	— 20 71
358	— 18 92	394	+ 19 85	430	+ 20 74
359	+ 18 95	395	— 19 87	431	— 20 76
360	— 18 97	396	+ 19 90	432	— 20 78

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
433	+ 20 81	469	+ 21 66	505	— 22 47
434	— 20 83	470	+ 21 68	506	— 22 49
435	+ 20 86	471	— 21 70	507	+ 22 52
436	— 20 88	472	+ 21 73	508	+ 22 54
437	— 20 90	473	+ 21 75	509	— 22 56
438	+ 20 93	474	— 21 77	510	— 22 58
439	— 20 95	475	+ 21 79	511	+ 22 61
440	+ 20 98	476	+ 21 82	512	+ 22 63
441	21 00	477	— 21 84	513	+ 22 65
442	— 21 02	478	— 21 86	514	— 22 67
443	+ 21 05	479	+ 21 89	515	— 22 69
444	— 21 07	480	+ 21 91	516	+ 22 72
445	+ 21 10	481	— 21 93	517	+ 22 74
446	+ 21 12	482	— 21 95	518	+ 22 76
447	— 21 14	483	+ 21 98	519	— 22 78
448	+ 21 17	484	22 00	520	— 22 80
449	+ 21 19	485	— 22 02	521	+ 22 83
450	— 21 21	486	+ 22 05	522	+ 22 85
451	+ 21 24	487	+ 22 07	523	+ 22 87
452	— 21 26	488	— 22 09	524	— 22 89
453	— 21 28	489	— 22 11	525	— 22 91
454	+ 21 31	490	+ 22 14	526	— 22 93
455	— 21 33	491	+ 22 16	527	+ 22 96
456	— 21 35	492	— 22 18	528	+ 22 98
457	+ 21 38	493	— 22 20	529	23 00
458	— 21 40	494	+ 22 23	530	— 23 02
459	— 21 42	495	+ 22 25	531	— 23 04
460	+ 21 45	496	— 22 27	532	+ 23 07
461	— 21 47	497	— 22 29	533	+ 23 09
462	— 21 49	498	+ 22 32	534	+ 23 11
463	+ 21 52	499	+ 22 34	535	— 23 13
464	— 21 54	500	— 22 36	536	— 23 1
465	— 21 56	501	— 22 38	537	— 23 17
466	+ 21 59	502	+ 22 41	538	+ 23 20
467	— 21 61	503	+ 22 43	539	+ 23 22
468	— 21 63	504	+ 22 45	540	+ 23 24

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
541	+ 23 26	577	— 24 02	613	+ 24 76
542	— 23 28	578	— 24 04	614	+ 24 78
543	— 23 30	579	— 24 06	615	+ 24 80
544	— 23 32	580	— 24 08	616	+ 24 82
545	+ 23 35	581	— 24 10	617	+ 24 84
546	+ 23 37	582	— 24 11	618	+ 24 86
547	+ 23 39	583	— 24 12	619	+ 24 88
548	+ 23 41	584	+ 24 15	620	+ 24 90
549	— 23 43	585	+ 24 17	621	+ 24 92
550	— 23 45	586	+ 24 19	622	+ 24 94
551	— 23 47	587	+ 24 21	623	+ 24 96
552	— 23 49	588	+ 24 23	624	+ 24 98
553	+ 23 52	589	+ 24 25	625	25 00
554	+ 23 54	590	+ 24 27	626	+ 25 02
555	+ 23 56	591	+ 24 29	627	+ 25 04
556	+ 23 58	592	— 24 31	628	+ 25 06
557	— 23 60	593	— 24 33	629	+ 25 08
558	— 23 62	594	— 24 35	630	+ 25 10
559	— 23 64	595	— 24 37	631	+ 25 12
560	— 23 66	596	— 24 39	632	+ 25 14
561	+ 23 69	597	— 24 41	633	+ 25 16
562	+ 23 71	598	— 24 43	634	+ 25 18
563	+ 23 73	599	— 24 45	635	+ 25 20
564	+ 23 75	600	— 24 47	636	+ 25 22
565	+ 23 77	601	— 24 49	637	+ 25 24
566	— 23 79	602	+ 24 52	638	+ 25 26
567	— 23 81	603	+ 24 54	639	+ 25 28
568	— 23 83	604	+ 24 56	640	+ 25 30
569	— 23 85	605	+ 24 58	641	+ 35 32
570	— 23 87	606	+ 24 60	642	+ 25 34
571	+ 23 90	607	+ 24 62	643	+ 25 36
572	+ 23 92	608	+ 24 64	644	+ 25 38
573	+ 23 94	609	+ 24 68	645	+ 25 40
574	+ 23 96	610	+ 24 70	646	+ 25 42
575	+ 23 98	611	+ 24 72	647	+ 25 44
576	24 00	612	+ 24 74	648	+ 25 46

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
649	+ 25 48	685	− 26 17	721	− 26 85
650	+ 25 50	686	− 26 19	722	− 26 87
651	− 25 51	687	− 26 21	723	+ 26 89
652	− 25 53	688	+ 26 23	724	+ 26 91
653	− 25 55	689	+ 26 25	725	+ 26 93
654	− 25 57	690	+ 26 27	726	− 26 94
655	− 25 59	691	+ 26 29	727	− 26 96
656	− 25 61	692	+ 26 31	728	− 26 98
657	− 25 63	693	− 26 32	729	27 00
658	− 25 65	694	− 26 34	730	+ 27 02
659	− 25 67	695	− 26 36	731	+ 27 04
660	− 25 69	696	− 26 38	732	+ 27 06
661	+ 25 71	697	− 26 40	733	− 27 07
662	+ 25 73	698	+ 26 42	734	− 27 09
663	+ 25 75	699	+ 26 44	735	− 27 11
664	+ 25 77	700	+ 26 46	736	+ 27 13
665	+ 25 79	701	+ 26 48	737	+ 27 15
666	+ 25 81	702	+ 26 50	738	+ 27 17
667	+ 25 83	703	− 26 51	739	− 27 18
668	+ 25 85	704	− 26 53	740	− 27 20
669	+ 25 87	705	− 26 55	741	− 27 22
670	− 25 88	706	− 26 57	742	+ 27 24
671	− 25 90	707	+ 26 59	743	+ 27 26
672	− 25 92	708	+ 26 61	744	+ 27 28
673	− 25 94	709	+ 26 63	745	− 27 29
674	− 25 96	710	+ 26 65	746	− 27 31
675	− 25 98	711	− 26 66	747	− 27 33
676	26 00	712	− 26 68	748	+ 27 35
677	+ 26 02	713	− 26 70	749	+ 27 37
678	+ 26 04	714	− 26 72	750	+ 27 39
679	+ 26 06	715	+ 26 74	751	− 27 40
680	+ 26 08	716	+ 26 76	752	− 27 42
681	+ 26 10	717	+ 26 78	753	− 27 44
682	+ 26 12	718	+ 26 80	754	+ 27 46
683	− 26 13	719	− 26 81	755	+ 27 48
684	− 26 15	720	− 26 83	756	− 27 49

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
757	— 27 51	793	— 28 16	829	— 28 79
758	— 27 53	794	+ 28 18	830	+ 28 81
759	+ 27 55	795	+ 28 20	831	+ 28 83
760	+ 27 57	796	— 28 21	832	— 28 84
761	+ 27 59	797	— 28 23	833	— 28 86
762	— 27 60	798	+ 28 25	834	+ 28 88
763	— 27 62	799	+ 28 27	835	+ 28 90
764	— 27 64	800	— 28 28	836	— 28 91
765	+ 27 66	801	— 28 30	837	— 28 93
766	+ 27 68	802	+ 28 32	838	+ 28 95
767	— 27 69	803	+ 28 34	839	+ 28 97
768	— 27 71	804	— 28 35	840	— 28 98
769	— 27 73	805	— 28 37	841	29 00
770	+ 27 75	806	— 29 39	842	+ 29 02
771	+ 27 77	807	+ 28 41	843	— 29 03
772	+ 27 79	808	+ 28 43	844	— 29 05
773	— 27 80	809	— 28 44	845	+ 29 07
774	— 27 82	810	— 28 46	846	+ 29 09
775	+ 27 84	811	+ 28 48	847	— 29 10
776	+ 27 86	812	+ 28 50	848	— 29 12
777	— 27 87	813	— 28 51	849	+ 29 14
778	— 27 88	814	— 28 53	850	— 29 15
779	— 27 91	815	+ 28 55	851	— 29 17
780	+ 27 93	816	+ 28 57	852	+ 29 19
781	+ 27 95	817	— 28 58	853	+ 29 21
782	— 27 96	818	— 28 60	854	— 29 22
783	— 27 98	819	+ 28 62	855	— 29 24
784	28 00	820	+ 28 64	856	+ 29 26
785	+ 28 02	821	— 28 65	857	— 29 27
786	+ 28 04	822	— 28 67	858	— 29 29
787	+ 28 05	823	+ 28 69	859	+ 29 31
788	— 28 07	824	+ 28 71	860	+ 29 33
789	+ 28 09	825	— 28 72	861	— 29 34
790	+ 28 11	826	— 28 74	862	+ 29 36
791	— 28 12	827	+ 28 76	863	+ 29 38
792	— 28 14	828	— 28 77	864	— 29 39

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
865	— 29 41	901	+ 30 02	937	— 30 61
866	+ 29 43	902	— 30 03	938	+ 30 63
867	— 29 44	903	+ 30 05	939	— 30 64
868	— 29 46	904	+ 30 07	940	+ 30 66
869	+ 29 48	905	— 30 08	941	+ 30 68
870	+ 29 50	906	+ 30 10	942	— 30 69
871	— 29 51	907	+ 30 12	943	+ 30 71
872	+ 29 53	908	— 30 13	944	— 30 72
873	+ 29 55	909	+ 30 15	945	— 30 74
874	— 29 56	910	+ 30 17	946	+ 30 76
875	— 29 58	911	— 30 18	947	— 30 77
876	+ 29 60	912	+ 30 20	948	+ 30 79
877	— 29 61	913	+ 30 22	949	+ 30 81
878	— 29 63	914	— 30 23	950	— 30 82
879	+ 29 65	915	+ 30 25	951	+ 30 84
880	— 29 66	916	+ 30 27	952	— 30 85
881	— 29 68	917	— 30 28	953	— 30 87
882	+ 29 70	918	+ 30 30	954	+ 30 89
883	+ 29 72	919	+ 30 32	955	— 30 90
884	— 29 73	920	— 30 33	956	+ 30 92
885	+ 29 75	921	+ 30 35	957	+ 30 94
886	+ 29 77	922	— 30 36	958	— 30 95
887	— 29 78	923	— 30 38	959	+ 30 97
888	+ 29 80	924	+ 30 40	960	— 30 98
889	+ 29 82	925	— 30 41	961	31 00
890	— 29 83	926	— 30 43	962	+ 31 02
891	+ 29 85	927	+ 30 45	963	— 31 03
892	+ 29 87	928	— 30 46	964	+ 31 05
893	— 29 88	929	+ 30 48	965	— 31 06
894	+ 29 90	930	+ 30 50	966	— 31 08
895	— 29 92	931	— 30 51	967	+ 31 10
896	+ 29 93	932	+ 30 53	968	— 31 11
897	+ 29 95	933	+ 30 55	969	+ 31 13
898	— 29 96	934	— 30 56	970	— 31 14
899	— 29 98	935	+ 30 58	971	+ 31 16
900	30 00	936	— 30 59	972	+ 31 17

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
973	— 31 19	1009	— 31 76	1045	+ 32 33
974	+ 31 21	1010	— 31 78	1046	— 32 34
975	— 31 22	1011	+ 31 80	1047	+ 32 36
976	— 31 24	1012	— 31 81	1048	— 32 37
977	+ 31 26	1013	— 31 83	1049	+ 32 39
978	— 31 27	1014	— 31 84	1050	— 32 40
979	+ 31 29	1015	+ 31 86	1051	+ 32 42
980	— 31 30	1016	— 31 87	1052	— 32 43
981	+ 31 32	1017	— 31 89	1053	+ 32 45
982	— 31 34	1018	+ 31 91	1054	+ 32 47
983	+ 31 35	1019	— 31 92	1055	— 32 48
984	— 31 37	1020	+ 31 94	1056	+ 32 50
985	— 31 38	1021	— 31 95	1057	— 32 51
986	— 31 40	1022	+ 31 97	1058	+ 32 53
987	+ 31 42	1023	— 31 98	1059	— 32 54
988	— 31 43	1024	32 00	1060	+ 32 56
989	+ 31 45	1025	+ 32 02	1061	— 32 57
990	— 31 46	1026	— 32 03	1162	+ 32 59
991	— 31 48	1027	+ 32 05	1063	— 32 60
992	+ 31 50	1028	— 32 06	1064	+ 32 62
993	— 31 51	1029	+ 32 08	1065	— 32 63
994	+ 31 53	1030	— 12 09	1066	+ 32 65
995	— 31 54	1031	+ 32 11	1067	— 32 66
996	+ 31 56	1032	— 32 12	1068	— 32 68
997	+ 31 58	1033	— 32 14	1069	+ 32 70
998	— 31 59	1034	+ 32 16	1070	— 32 71
999	+ 31 61	1035	— 32 17	1071	+ 32 73
1000	— 31 62	1036	+ 32 19	1072	— 32 74
1001	+ 31 64	1037	— 32 20	1073	— 32 76
1002	— 31 65	1038	+ 32 22	1074	+ 32 77
1003	— 31 67	1039	— 32 23	1075	— 32 79
1004	+ 31 69	1040	+ 32 25	1076	+ 32 80
1005	— 31 70	1041	— 32 26	1077	+ 32 82
1006	+ 31 72	1042	— 32 28	1078	— 32 83
1007	— 31 73	1043	+ 32 30	1079	+ 32 85
1008	+ 31 75	1044	— 32 31	1080	— 32 86

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1081	+ 32 88	1117	— 33 42	1153	+ 33 96
1082	— 32 89	1118	+ 33 44	1154	— 33 97
1083	+ 32 91	1119	— 33 45	1155	+ 33 99
1084	— 32 92	1120	+ 33 47	1156	34 00
1085	+ 32 94	1121	— 33 48	1157	— 34 01
1086	— 32 95	1122	+ 33 50	1158	+ 34 03
1087	+ 32 97	1123	— 33 51	1159	— 34 04
1088	— 32 98	1124	+ 33 53	1160	+ 34 06
1089	33 00	1125	— 33 54	1161	— 34 07
1090	+ 33 02	1126	+ 33 56	1162	+ 34 09
1091	— 33 03	1127	— 33 57	1163	— 34 10
1092	+ 33 05	1128	+ 33 59	1164	+ 34 12
1093	— 33 06	1129	— 33 60	1165	— 34 13
1094	+ 33 08	1130	+ 33 62	1166	+ 34 15
1095	— 33 09	1131	— 33 63	1167	— 34 16
1096	+ 33 11	1132	+ 33 65	1168	+ 34 18
1097	— 33 12	1133	— 33 66	1169	— 34 19
1098	+ 33 14	1134	— 33 67	1170	+ 34 21
1099	— 33 15	1135	+ 33 69	1171	+ 34 22
1100	+ 33 17	1136	— 33 70	1172	— 34 23
1101	— 33 18	1137	+ 33 72	1173	+ 34 25
1102	+ 33 20	1138	— 33 73	1174	— 34 26
1103	— 33 21	1139	+ 33 75	1175	+ 34 28
1104	+ 33 23	1140	— 33 76	1176	— 34 29
1105	— 33 24	1141	+ 33 78	1177	+ 34 31
1106	+ 33 26	1142	— 33 79	1178	— 34 32
1107	— 33 27	1143	+ 33 81	1179	+ 34 34
1108	+ 33 29	1144	— 33 82	1180	— 34 35
1109	— 33 30	1145	+ 33 84	1181	+ 34 37
1110	+ 33 32	1146	— 33 85	1182	— 34 38
1111	+ 33 33	1147	+ 33 87	1183	— 34 39
1112	+ 33 35	1148	— 33 88	1184	+ 34 41
1113	— 33 36	1149	+ 33 90	1185	— 34 42
1114	+ 32 38	1150	— 33 91	1186	+ 34 44
1115	— 33 39	1151	+ 33 93	1187	— 34 45
1116	+ 33 41	1152	— 33 94	1188	+ 34 47

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1189	— 34 48	1225	35 00	1261	— 35 51
1190	+ 34 50	1226	— 35 01	1262	— 35 52
1191	— 34 51	1227	+ 35 03	1263	+ 35 54
1192	+ 34 53	1228	— 35 04	1264	— 35 55
1193	+ 34 54	1229	+ 35 06	1265	+ 35 57
1194	— 34 56	1230	— 35 07	1266	— 35 58
1195	+ 34 57	1231	+ 35 09	1267	— 35 59
1196	— 34 58	1232	+ 35 10	1268	+ 35 61
1197	+ 34 60	1233	— 35 11	1269	— 35 62
1198	— 34 61	1234	+ 35 13	1270	+ 35 64
1199	+ 34 63	1235	— 35 14	1271	— 35 65
1200	— 34 64	1236	+ 35 16	1272	+ 35 67
1201	+ 34 66	1237	— 35 17	1273	+ 35 68
1202	+ 34 67	1238	+ 35 19	1274	— 35 69
1203	+ 34 68	1239	+ 35 20	1275	+ 35 71
1204	— 34 70	1240	— 35 21	1276	— 35 72
1205	— 34 71	1241	+ 35 23	1277	+ 35 74
1206	+ 34 73	1242	— 35 24	1278	+ 35 75
1207	— 34 74	1243	+ 35 26	1279	— 35 76
1208	+ 34 76	1244	— 35 27	1280	+ 35 78
1209	— 34 77	1245	— 35 28	1281	— 35 79
1210	+ 34 79	1246	+ 35 30	1282	+ 35 81
1211	+ 34 80	1247	— 35 31	1283	+ 35 82
1212	— 34 81	1248	+ 35 33	1284	— 35 83
1213	+ 33 83	1249	— 35 34	1285	+ 35 85
1214	— 34 84	1250	+ 35 36	1286	— 35 86
1215	+ 34 86	1251	+ 35 37	1287	— 35 87
1216	— 34 87	1252	— 35 38	1288	+ 35 89
1217	+ 34 89	1253	+ 35 40	1289	— 35 90
1218	+ 34 90	1254	— 35 41	1290	+ 35 92
1219	— 34 91	1255	+ 35 43	1291	— 35 93
1220	+ 34 93	1256	— 35 44	1292	— 35 94
1221	— 34 94	1257	— 35 45	1293	+ 35 96
1222	+ 34 96	1258	+ 35 47	1294	— 35 97
1223	— 34 97	1259	— 35 48	1295	+ 35 99
1224	+ 34 99	1260	+ 35 50	1296	36 00

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1297	— 36 01	1333	— 36 51	1369	37 00
1298	+ 36 03	1334	— 36 52	1370	— 37 01
1299	— 36 04	1335	+ 36 54	1371	+ 37 03
1300	+ 36 05	1336	+ 36 55	1372	— 37 04
1301	+ 36 07	1337	+ 36 57	1373	— 37 05
1302	— 36 08	1338	+ 36 58	1374	+ 37 07
1303	+ 36 10	1339	— 36 59	1375	— 37 08
1304	— 36 11	1340	+ 36 61	1376	— 37 09
1305	+ 36 13	1341	+ 36 62	1377	+ 37 11
1306	+ 36 14	1342	— 36 63	1378	— 37 12
1307	— 36 15	1343	+ 36 65	1379	— 37 13
1308	+ 36 17	1344	— 36 66	1380	+ 37 15
1309	— 36 18	1345	— 36 67	1381	— 37 16
1310	— 36 19	1346	+ 36 69	1382	+ 37 18
1311	+ 36 21	1347	— 36 70	1383	+ 37 19
1312	— 36 22	1348	— 36 71	1384	— 37 20
1313	+ 36 24	1349	+ 35 73	1385	+ 37 22
1314	+ 56 25	1350	— 36 74	1386	+ 37 23
1315	— 36 26	1351	+ 36 76	1387	— 37 24
1316	+ 36 28	1352	+ 36 77	1388	+ 37 26
1317	— 36 29	1353	— 36 78	1389	+ 37 27
1318	— 36 30	1354	+ 36 80	1390	— 37 28
1319	+ 36 32	1355	— 36 81	1391	+ 37 30
1320	— 36 33	1356	— 36 82	1392	+ 37 31
1321	+ 36 35	1357	+ 36 84	1393	— 37 32
1322	+ 36 36	1358	— 36 85	1394	+ 37 34
1323	— 36 37	1359	— 36 86	1395	+ 37 35
1324	+ 36 39	1360	+ 36 88	1396	+ 37 36
1325	— 36 40	1361	— 36 89	1397	+ 37 38
1326	— 36 41	1362	+ 36 91	1398	+ 37 39
1327	+ 36 43	1393	+ 36 92	1399	— 37 40
1328	— 36 44	1364	— 36 93	1400	+ 37 42
1329	+ 36 46	1365	+ 36 95	1401	+ 37 43
1330	+ 36 47	1366	+ 36 96	1402	— 37 44
1331	— 36 48	1367	+ 36 97	1403	+ 37 46
1332	+ 36 50	1368	+ 36 99	1404	+ 37 47

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1405	— 37 48	1441	— 37 96	1477	— 38 43
1406	+ 37 50	1442	— 37 97	1478	— 38 44
1407	— 37 51	1443	+ 37 99	1479	+ 38 46
1408	— 37 52	1444	38 00	1480	— 38 47
1409	+ 37 54	1445	— 38 01	1481	— 38 48
1410	+ 37 55	1446	+ 38 03	1482	+ 38 50
1411	— 37 56	1447	+ 38 04	1483	+ 38 51
1412	+ 37 58	1448	— 38 05	1484	— 38 52
1413	+ 35 59	1449	+ 38 07	1485	+ 38 54
1414	— 37 60	1450	+ 38 08	1486	+ 38 55
1415	+ 37 62	1451	— 38 09	1487	— 38 56
1416	+ 37 63	1452	+ 38 11	1488	— 38 57
1417	— 37 64	1453	+ 38 12	1489	+ 38 59
1418	+ 37 66	1454	— 38 13	1490	— 38 60
1419	+ 37 67	1455	— 38 14	1491	— 38 61
1420	— 37 68	1456	+ 38 16	1492	+ 38 63
1421	+ 37 70	1457	— 38 17	1493	+ 38 64
1422	+ 57 71	1458	— 38 18	1494	— 38 65
1423	— 37 72	1459	+ 38 20	1495	+ 38 67
1424	+ 37 74	1460	+ 38 21	1496	+ 38 68
1425	+ 37 75	1461	— 38 22	1497	— 38 69
1426	— 37 76	1462	+ 38 24	1498	— 38 70
1427	+ 37 78	1463	+ 38 25	1499	+ 38 72
1428	+ 37 79	1464	— 38 26	1500	+ 38 73
1429	— 37 80	1465	+ 38 28	1501	— 38 74
1430	+ 37 82	1466	+ 38 29	1502	+ 38 76
1431	+ 37 83	1467	— 38 30	1503	+ 38 77
1432	— 37 84	1468	— 38 31	1504	— 38 78
1433	— 37 85	1469	+ 38 33	1505	— 38 79
1434	+ 37 87	1470	— 38 34	1506	+ 38 81
1435	— 37 88	1471	— 38 35	1507	— 38 82
1436	— 37 89	1472	+ 38 37	1508	— 38 83
1437	+ 37 91	1473	+ 38 38	1509	+ 38 85
1438	— 37 92	1474	— 38 39	1510	+ 38 86
1439	— 37 93	1475	+ 38 41	1511	— 38 87
1440	+ 37 95	1476	+ 38 42	1512	— 38 88

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1513	+ 38 90	1549	+ 39 36	1585	— 39 81
1514	— 38 91	1550	— 39 37	1586	— 39 82
1515	— 38 92	1551	— 39 38	1587	+ 39 84
1516	+ 38 94	1552	+ 39 40	1588	+ 39 85
1517	+ 38 95	1553	+ 39 41	1589	— 39 86
1518	— 38 96	1554	— 39 42	1590	— 39 87
1519	— 38 97	1555	— 39 43	1591	+ 39 89
1520	+ 38 99	1556	+ 39 45	1592	+ 39 90
1521	39 00	1557	+ 39 46	1593	— 39 91
1522	— 39 01	1558	— 39 47	1594	— 39 92
1523	+ 39 03	1559	— 39 48	1595	+ 39 94
1524	— 39 04	1560	+ 39 50	1596	+ 39 95
1525	— 39 05	1561	+ 39 51	1597	— 39 96
1526	— 39 06	1562	— 39 52	1598	— 39 97
1527	+ 39 08	1563	— 39 53	1599	+ 39 99
1528	+ 39 09	1564	+ 39 55	1600	40 00
1529	— 39 10	1565	— 39 56	1601	— 40 01
1530	+ 39 12	1566	— 39 57	1602	— 40 02
1531	+ 39 13	1567	+ 39 59	1603	+ 40 04
1532	— 39 14	1568	+ 39 60	1604	+ 40 05
1533	— 39 15	1569	— 39 61	1605	— 40 06
1534	+ 39 17	1570	— 39 62	1606	— 40 07
1535	+ 39 18	1571	+ 39 64	1607	+ 40 09
1536	— 39 19	1572	+ 39 65	1608	+ 40 10
1537	— 39 20	1573	— 39 66	1609	— 40 11
1538	+ 39 22	1574	— 39 67	1610	— 40 12
1539	— 39 23	1575	— 39 69	1611	+ 40 14
1540	— 39 24	1576	+ 39 70	1612	+ 40 15
1541	+ 39 26	1577	— 39 71	1613	— 40 16
1542	+ 39 27	1578	— 39 72	1614	— 40 17
1543	— 39 28	1579	+ 39 74	1615	+ 40 19
1544	— 39 29	1580	+ 39 75	1616	+ 40 20
1545	+ 39 31	1581	— 39 76	1617	— 40 21
1546	+ 39 32	1582	— 39 77	1618	— 40 22
1547	— 39 33	1583	+ 39 79	1619	+ 40 24
1548	— 39 34	1584	+ 39 80	1620	+ 40 25

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1621	— 40 26	1657	+ 40 71	1693	+ 41 15
1622	— 40 27	1658	+ 40 72	1694	+ 41 16
1623	+ 40 29	1659	— 40 73	1695	— 41 17
1624	+ 40 30	1660	— 40 74	1696	— 41 18
1625	— 49 31	1661	+ 40 76	1697	— 41 19
1626	— 40 32	1662	+ 40 77	1698	+ 41 21
1627	+ 40 34	1663	+ 40 78	1699	+ 41 22
1628	+ 40 35	1664	— 40 79	1700	— 41 23
1629	— 40 36	1665	— 40 80	1701	— 41 24
1630	— 40 37	1666	+ 40 82	1702	+ 41 26
1631	+ 40 39	1667	+ 40 83	1703	+ 41 27
1632	+ 40 40	1668	— 40 84	1704	+ 41 28
1633	— 40 41	1669	— 40 85	1705	— 41 29
1634	— 40 42	1670	+ 40 87	1706	— 41 30
1635	+ 40 44	1671	+ 40 88	1707	+ 41 32
1636	+ 40 45	1672	— 40 89	1708	+ 41 33
1637	+ 40 46	1673	— 40 90	1709	— 41 34
1638	— 40 47	1674	— 40 91	1710	— 41 35
1639	— 40 48	1675	+ 40 93	1711	— 41 36
1640	+ 40 50	1676	+ 40 94	1712	+ 41 38
1641	+ 40 51	1677	— 40 95	1713	+ 41 39
1642	— 40 52	1678	— 40 96	1714	— 41 40
1643	— 40 53	1679	+ 40 98	1715	— 41 41
1644	+ 40 55	1680	+ 40 99	1716	— 41 42
1645	+ 40 56	1681	41 00	1717	+ 41 44
1646	— 40 57	1682	— 41 01	1718	+ 41 45
1647	— 40 58	1683	— 41 02	1719	— 41 46
1648	+ 40 60	1684	+ 41 04	1720	— 41 47
1649	+ 40 61	1685	+ 41 05	1721	— 41 48
1650	— 40 62	1686	— 41 06	1722	+ 41 50
1651	— 40 63	1687	— 41 07	1723	+ 41 51
1652	— 40 64	1688	+ 41 09	1724	— 41 52
1653	+ 40 66	1689	+ 41 10	1725	— 41 53
1654	+ 40 67	1690	+ 41 11	1726	+ 41 55
1655	— 40 68	1691	— 41 12	1727	+ 41 56
1656	— 40 69	1692	— 41 13	1728	+ 41 57

Fig. I.

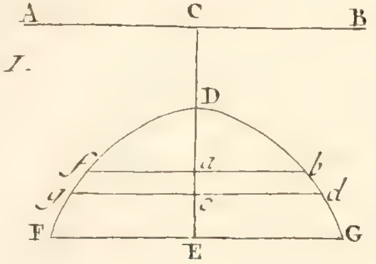
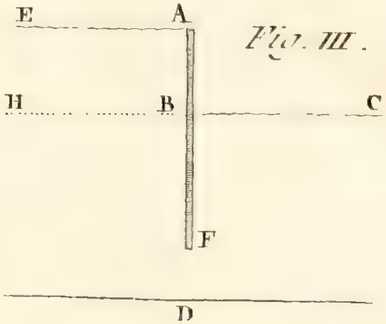
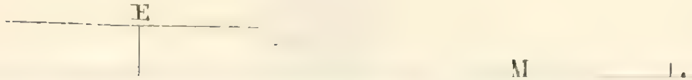


Fig. III.





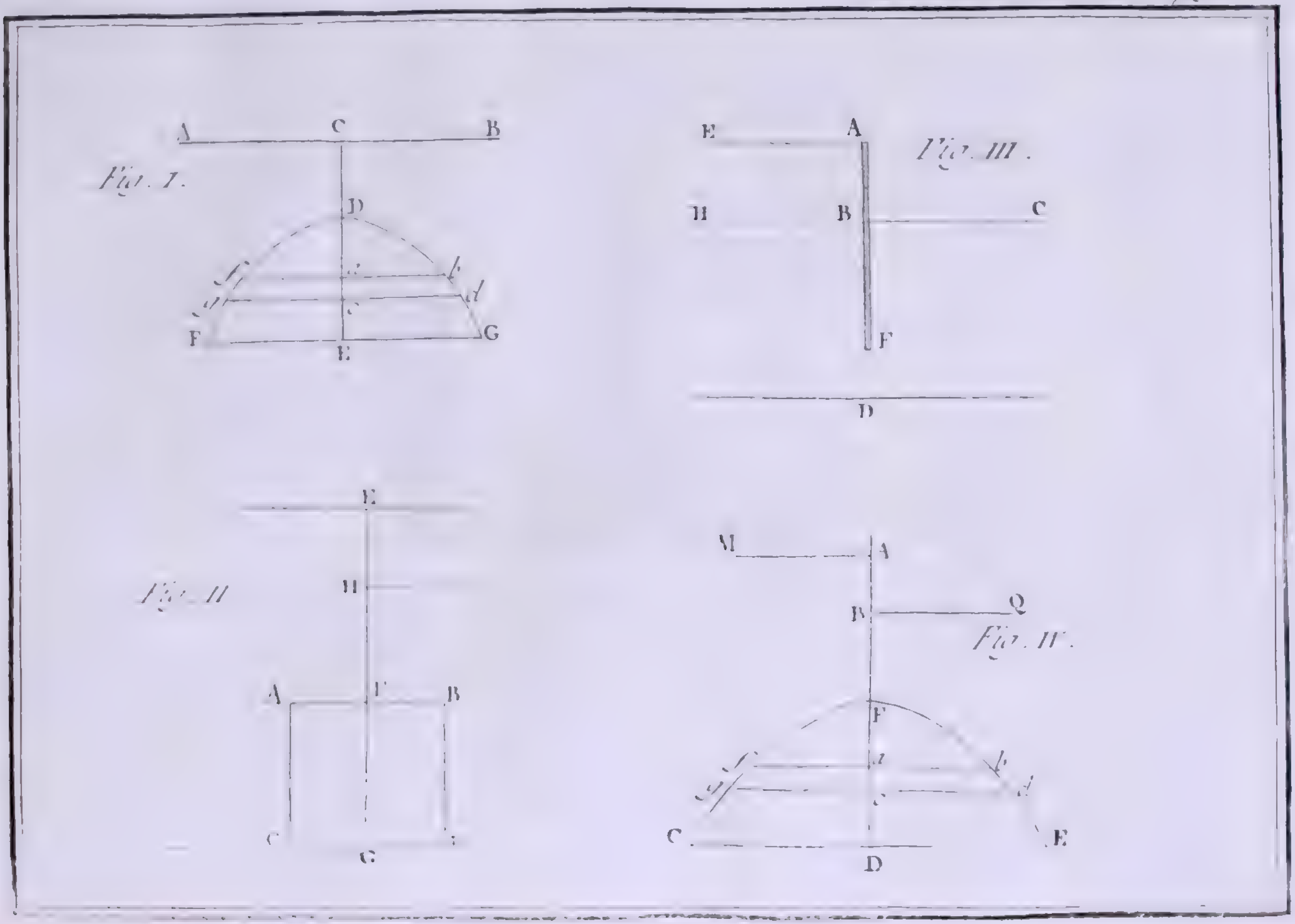


Fig. I.
A
C
B
D
b
d
G
F
E
Fig. III.
E
A
H
B
C
F
D
Fig. II
E
H
A
F
B
G
M
A
B
Q
Fig. IV.
F
a
b
d
C
D
E

Altezze	Radici	Altezze	Radici	Altezze	Radici
1729	— 41 58	1753	+ 41 87	1777	— 42 15
1730	— 41 59	1754	— 41 88	1778	+ 42 17
1731	+ 41 61	1755	— 41 89	1779	+ 42 18
1732	+ 41 62	1756	— 41 90	1780	— 42 19
1733	+ 41 63	1757	+ 41 92	1781	— 42 20
1734	— 41 64	1758	+ 41 93	1782	— 42 21
1735	— 41 65	1759	— 41 94	1783	+ 42 23
1736	+ 41 67	1760	— 41 95	1784	+ 42 24
1737	+ 41 68	1761	— 41 96	1785	+ 42 25
1738	+ 41 69	1762	+ 41 98	1786	— 42 26
1739	— 41 70	1763	+ 41 99	1787	— 42 27
1740	— 41 71	1764	42 00	1788	— 42 28
1741	+ 41 73	1765	— 42 01	1789	+ 42 30
1742	+ 41 74	1766	— 42 02	1790	+ 42 31
1743	+ 41 75	1767	+ 42 04	1791	— 42 32
1744	— 41 76	1768	+ 42 05	1792	— 42 33
1745	— 41 77	1769	+ 42 06	1793	— 42 34
1746	+ 41 79	1770	— 42 07	1794	+ 42 36
1747	+ 41 80	1771	— 42 08	1795	+ 42 37
1748	+ 41 81	1772	+ 42 10	1796	+ 42 38
1749	— 41 82	1773	+ 42 11	1797	— 42 39
1750	— 41 83	1774	+ 42 12	1798	— 42 40
1751	— 41 84	1775	— 42 13	1799	— 42 41
1752	+ 41 86	1776	— 42 14	1800	+ 42 43

DESCRIZIONE

DELL' OSSERVATORIO METEOROLOGICO ERETTO AL FINE DELL' ANNO 1780

Dal Regio Professore emerito Don Pietro Moscati.

CHe la diligente osservazione delle variazioni atmosferiche in tutto il dettaglio ora chiamato *Meteorologia* molto conferisse ai progressi ed all' utile esercizio della pratica Medicina, ella è cosa stata creduta per fino dai più remoti quasi empirici principj dell' arte. Difatti *Ipocrate* fino dai suoi tempi scrisse, che niuno senza queste nozioni poteva essere buon Medico, poichè non v' era forse malattia che dalla varia azione dell' atmosfera nel nostro corpo origine non avesse (*a*). *Plinio* seniore nominando diversi venti ne chiama decisivamente alcuni salubri, altri perniciosi, parlandone come di cosa ai suoi tempi conosciuta da tutti: e di Augusto Cesare si legge, che dimorando nelle Gallie eresse un tempio al turbinoso vento *Circio*, al quale pubbliche feste si facevano e ringraziamenti sebbene alcune case ne fossero qualche volta distrutte, perchè fermamente si credeva doversi al violento soffiare di esso la salubrità del gallico clima (*b*). Nè solamente l' umana specie risente le variazioni dell' atmosfera; ma par che mostrino chiaramente di risentirsene anche quegli animali che più vicini all' uomo, e più socievoli con esso si lasciano meglio, e più costantemente osser-

(*a*) *Medicinam quicumque vult recte consequi, eum hæc agere oportet; primum quidem anni tempestates animadvertere; quid harum quæque possit efficere; non enim quidquam habent simile . . . . Deinde vero ventos tum calidos tum frigidos, maxime quidem omnibus hominibus communes; deinde eos qui unicuique regioni sunt vernaculi &c. Hipocrates de aere aquis, & locis edit. Ren. Carter.* T. 6. pag. 187.

Huic orationi subjiciendum morbos unquam vix aliunde quam ab aere oriri posse. Idem de flatibus.

(*b*) Seneca quæst. natur. L. 5. Cap. 17.

vare (*a*); anzi i vegetabili ſteſſi moſtrano la medeſima ſenſibilità (*b*). Ella è quindi ſtata ferma opinione ereditaria di molti valenti Medici dopo *Ipocrate*, che ſi doveſſero le variazioni atmoſferiche dal pratico Medico oſſervare con diligenza non ſolo per contrapporvi ſempre le malattie che hanno nello ſteſſo tempo dominato ſiccome fecero principalmente *Malovin*, *VVintringam*, *Huxam*, e ricavarne in ſeguito dei riſultati utili all' arte ed alla umanità; ma ancora per regolarſi nell' amminiſtrazione de' rimedj, i quali ſecondo l' oſſervazione del celebre *Berriat* non agiſcono ugualmente, e debbono diverſificarſi nelle doſi ſecondo la diverſa altezza del barometro, che è quanto dire ſecondo il diverſo peſo dell' atmosfera (*c*).

Egli è ben vero, che vi ſono ſtati Scrittori di credito, i quali non molto credendo alla influenza delle varietà atmoſferiche ſi ſono ſtudiati di provare la poca utilità delle meteorologiche oſſervazioni applicate alla Medicina, fra i quali debbono leggerſi principalmente i diſcorſi premeſſi dal dotto Medico il Sig. *Retz* alla ſua Bibliografia medica (*d*); ma oltre a che ſiamo ancor aſſai lontani dal vedere con perſuadente chiarezza dimoſtrato queſto aſſunto; oltre a che non ſi ſpiegherà facilmente altrimenti il vederſi nello ſteſſo tempo in un popoloſo Spedale ora toſſire forſe ſeicento ammalati ſopra mille, ora eſſere quaſi la metà ſorpreſi da febbri intermittenti, ora dominare quaſi generalmente la diſſenteria ecc. egli ſarà ſempre vero che queſta quiſtione altronde utiliſſima ai progreſſi dell' Arte non potrà mai eſſere poſiti-

---

(*a*) Veggaſi fra gli altri libri il breve ed erudito diſcorſo del Sig. *Tommaſo Ofman*: *de præſagiis tempeſtatis naturalibus* Baſileæ 1781.

(*b*) Vegganſi gli Scrittori *rei ruſticæ*; du Hamel elementi d' agricoltura; Cotte *Meteorologie* che cita varj Autori intorno a queſto argomento: Bertolon *electricitè des vegetaux*, ed *electricitè du corps humain*: Gardini *de influxu electricitatis atmosfericæ in vegetantia*. *Taurini* 1784. *de influxu electricitatis in homine*. *Genuæ* 1780. *&c.*

(*c*) Memoires preſenteès a l' academie des ſciences par des Savants etrangers T. 2. e Collection Accademique T. 8 dove è ſtata riſtampata la memoria ſuddetta.

(*d*) Vegganſi i tomi 2. 3. 4. 5. delle Nouvelles inſtructives bibliographiques hiſtoriques, & critiques de Medecine, Chirurgie & Pharmacie ecc. 16. Paris chez Mequignon dall' anno 1785 al 1789.

vamente decisa, se non appunto con un lungo paziente, ed esatto parallelo fra le variazioni atmosferiche diligentemente osservate e le malattie che dominato avranno per lo spazio di molti anni in un popolo abitualmente solito nutrirsi vestire abitare lavorare vivere ad un dipresso nello stesso modo, siccome è quello per esempio che abita la nostra ampia ed uniforme pianura.

Molte possono essere le accidentali proprietà dell' atmosfera che possono agire sull' animale organizzazione, fra le quali principalmente le seguenti cioè

1. Il vario peso di essa che ora sorpassa la pressione sul nostro corpo di 37680 libbre; ora non arriva a quella di libbre 35360 con passaggio alcune volte assai celere di questa enorme differenza di peso.

2. La varia temperatura di caldo e freddo, la quale nel nostro paese si osservò balzare dalli gr. 19 in inverno oltre alli 84 in estate del termometro di Fareneith.

3. La siccità ed umidità cotanto fra noi diversa che dalla capacità della secca atmosfera di ricevere ottantasei danari d' acqua per evaporazione di una superficie d' otto pollici quadrati passa fino all' estrema umidità di deporre spontaneamente il proprio elemento acqueo sopra i corpi ad essa esposti.

4. La quiete, ed agitazione dell' aria, che respiriamo, e che ci attornia, la quale agitazione è tanta alcune volte da tenere alzate oltre cento oncie di peso in un anemometro di superficie moltissimo piccola in proporzione dell' area del nostro corpo.

5. La quantità, e durata delle pioggie che ha pure una differenza sommamente variabile.

6. La quantità e qualità dell' elettricità atmosferica così variabile che dalla totale privazione passa fino alla capacità terribile di fulminare.

Quindi varj e tra di loro diversi debbono essere i meccanismi col mezzo de' quali conoscer si possono tutte le suddette proprietà dell' atmosfera, nell' assortimento de' quali consiste un Gabinetto meteorologico, quale appunto io mi sono per privata mia soddisfazione fatto sul fine dell' anno 1780 in mia casa, e che ora sono per brevemente descrivere. Io

non intendo d'aver fatto l'ottimo, ma solamente di descrivere ciò che ho fatto principalmente per ottenere delle macchine, le quali essendo di facile economica e solida costruzione potessero anche da se stesse segnare le variazioni atmosferiche orarie senza che l'osservatore sia eternamente vincolato a vivere in una stanza per saperne il risultato.

Non è nuova, nè assolutamente mia l'idea di costruire delle macchine meteorologiche orarie; poichè il celebre orologiaro Inglese *Cummings* quasi trent'anni sono costruì un pendolo che mostrava le varie altezze del barometro quotidianamente colla più grande esattezza (*a*). Il Sig. *D. Onsenbray* diede la descrizione molto prima d'un anemometro che segnava le variazioni de' venti col mezzo d'un' orologio (*b*); il Sig. *Changeux* presentò nel 1780 all'Accademia delle scienze di Parigi una macchina che mostrava le mutazioni barometriche con un meccanismo analogo assai a quello di *Cummings* (*c*), ed il Sig. *Magellan* nel 1779 pubblicò il progetto di alcune macchine meteorologiche orarie col nome di Meteorografo perpetuo (*d*): ma queste macchine tutte, comunque molto utili, in parte erano quasi del tutto ignorate come quella di *Cummings*, in parte assai complicate e perciò non adoprate dai Fisici come quelle del Sig. *Onsenbray*, e del Sig. *Changeux*; ed in parte non furono che semplici bei progetti siccome il Meteorografo perpetuo del Sig. *Magellan*, così che egli non è a mia notizia che abbia esistito una collezione di macchine meteorologiche orarie ridotte ad uso di pratiche osservazioni avanti la mia: almeno in Italia ciò è certo, ed è forse vero anche per altrove, se riguardar si voglia il complesso di tutte insieme. Io debbo però qui rendere la dovuta giustizia al celebre socio il Sig. Cavaliere *Don Marsilio Landriani* che il primo pensò a rendere oraria la macchina per raccogliere, e notar la pioggia col nome

(*a*) Veggasi *Magellan* Collection des differents traités sur les instruments d'astronomie, & de physique §. 374 dove parla dei barometri.

(*b*) Veggasi Memoires de l'acad. des sciences 1734, e la raccolta delle macchine da esso presentate alla suddetta Accademia.

(*c*) Journal de l'Abbé *Rozier* 1780. pag. 75.

(*d*) *Magellan* loc. citat. n. 373 col titolo di *idée d'un meteorographe perpetuel*.

di Croniometro, e del quale l'ingegno e le estese cognizioni mi giovarono a successivamente migliorare le altre mie macchine che ora sono per descrivere.

§. I.

Della ventaruola, ossia Anemoscopio.

Ognuno conosce la costruzione ordinaria di questo ordigno, poichè le torri, le cime de' camini, ed i campanili ne sono spessissimo forniti: ora ecco il meccanismo col quale io ho resa assai semplicemente oraria la ventaruola in modo che segni in qualunque tempo da se sola le varie direzioni de' venti senza punto essere sconcertata o pel troppo, e non rare volte rovinoso impeto, o per la moltiplice irregolare e spesso celeremente variabile direzione de' venti.

La figura seconda ne pone sott' occhio con sufficiente chiarezza la intiera costruzione.

19 E' una larga ventaruola che invece d' essere più stretta, e fessa nella parte più remota dall' asta come si usa comunemente, vi è invece più larga perchè il vento vi abbia più presa e diale maggiore mobilità. 20. 20. 20 Si è una lunga asta di ferro, che scendendo dal tetto nella stanza posa con una conica mobilissima e forte punta d'acciajo sopra la rosa de' venti 34.34, che è pure d'ottone inargentato, e potrebbe anch' essere di legno purchè avesse nel mezzo un pezzo incavato o d'acciajo o di pietra dura per ricevere la suddetta punta, e sostenerne con facile mobilità, e senza guastarsi il non piccolo peso.

21 E' un conico coperchio di rame, che cuopre il foro per il quale scende dal tetto in casa l' asta 20, ed impedisce la penetrazione delle pioggie.

22 E' una grossa asta di vetro solidissima, che finendo in un liscio anello di rame da una parte saldatovi riceve l'asta della ventaruola perchè il vento non la curvi, e dall'altra parte è piantata sodamente in un grosso trave 23. che forma parte immobilissima della travatura del tetto. Questo meccanismo non è necessario per la costruzione del semplice anemoscopio, ma egli è posto nel nostro caso sic-

ſiccome la interruzione 25. 25 dell' aſta 20, la quale interruzione è anch' eſſa fatta da una groſſa aſta di vetro verniciato a gomma copal affine di far ſervire l' anemoſcopio anche per conduttore elettrico ſenza moltiplicar le macchine, ſiccome ſarà detto in ſeguito.

24 E' un altro anello liſcio di rame iſolato per mezzo d' altro cilindro di vetro piantato nel muro, il qual anello è deſtinato anch' eſſo a tenere in regiſtro la lunga tratta dell' aſta e renderne più facile il movimento. Tali anelli dovrebbero accreſcerſi in proporzione della lunghezza, che biſognaſſe dare nelle diverſe abitazioni all' aſta 20.

26. 26 E' un cilindro di ſottile laſtra d' ottone cavo, e ſaldato per mezzo di due croci leggiere all' aſta 20 immobilmente, ed intorno a queſto cilindro ſpiralmente in giuſto comparto ſtanno equidiſtanti ſaldati otto ſegmenti di circolo 27. 28. 29. 30, i quali ſporgono alquanto in fuori dal cilindro 26. 26 per mezzo d' un gambo pure d' ottone che ogni ſegmento ha dove è ſaldato ſul cilindro. Ognuno di queſti ſegmenti dev' eſſere un poco più della ottava parte del circolo intiero, che tutti eſſi ſpiralmente compartiti compiano intorno al cilindro 26. 26, coſicchè non ſolo non ſiavi interruzione tra l' un ſegmento e l' altro, ma ſi ſoprappongano alquanto l' un l' altro. Inoltre queſti ſegmenti ſono ſaldati al cilindro comune l' uno ſotto l' altro diſtanti circa mezzo pollice fra di loro in modo che, girando comunque la ventaruola, mai non ſi potrà preſentare ad una data linea perpendicolare poſta avanti il cilindro 26. 26, ſe non uno ſolo dei ſegmenti, gli altri tutti sfuggendo per la natura della ſpirale loro poſizione.

Dirimpetto al cilindro 26. 26 è piantato perpendicolarmente nel muro per mezzo d' una ſoda forchetta di ferro 33 un quadrilatero pezzo d' ottone 31. 31. 31, il quale equidiſtanti fra di loro d' un mezzo pollice contiene articolati a cerniera ed a molla otto altri ſegmenti d' ottone circolari ſimili ai già deſcritti, ognuno de' quali porta una matita bianca a molla affinchè la compreſſione ſia ſempre mobile e dolce, nè mai poſſa pel ſoverchio sfregamento impedire, o render difficile il moto della ventaruola. Ognuno dei ſegmenti 31. 31 a cerniera ſta oppoſto colla ſua con-

vessità ad un segmento della spirale sopra descritta in tale distanza, che quando le massime convessità di due segmenti corrispondenti si toccano, la matita del segmento 31 soffre la massima compressione contro il cilindro di legno 32. 32, e questa compressione va gradatamente diminuendo a misura che il contatto de' due corrispondenti circolari segmenti si scosta dalle rispettive loro massime convessità. Dunque ogni segmento del cilindro 26. 26 ha quasi un solo punto, nel quale possa fare la massima compressione contro il suo corrispondente segmento 31, che porta la matita; ed allora quando questa massima compressione succede, ogni matita è obbligata a segnare in bianco sopra il cilindro 32 di legno verniciato di nero, che sta innicchiato nel muro dietro alla quadrilatera asta d'ottone 31. 31. 31: e siccome i segmenti d' ottone spiralmente, ed equidistanti compartiti l' un sotto l'altro sul cilindro 26. 26 sono otto, così tutto il giro della ventaruola è diviso in otto parti uguali, ognuna delle quali rappresenta uno de' principali rombi di vento. Dunque per le rispettive varie compressioni dei segmenti, ossia delle lunette 27. 28. 29. 30 contro le corrispondenti lunette 31. 31 saranno colle diverse matite segnate l' una sotto l' altra le direzioni degli otto principali venti assai distintamente.

E' stata a questi segmenti d' ottone tutti data la figura circolare, e si sono messe in opposizione le rispettive convessità, affinchè massima essendo in un sol punto la compressione, e per gradi uniformi o crescente, o decrescente in tutti gli altri punti del contatto, non si venisse mai ad arrestare o alterare il moto in giro della ventaruola: inoltre i segmenti uniti alla quadrangolare asta 31. 31 stanno sempre in contatto contro i loro corrispondenti del cilindro 26. 26 perchè le mollette delle rispettive cerniere li tengono in tal posizione, e dall' altra parte la compressione massima non arresta il movimento della ventaruola perchè le molle che sono attaccate alle matite cedono dolcemente a tale compressione premendo solo quanto basta per fare che la matita segni sul vicino cilindro di legno 32. 32 verniciato di nero.

Il meccanismo col quale sono messe in opera le matite si può vedere nelle figure 5, e 6, e l' ho rappresentato in due

diverſe maniere, perchè in due modi appunto l'ho adoperato, cioè nella figura 5 la canna 47 che è una delle attaccate alle lunette 31. 31 (fig. 2) contiene una molla ſpirale aſſai dolce, contro la quale ſta appoggiata la matita 49 che può muoverſi nel cavo della canna 48. 48 qui per facilità d'intendere rappreſentato aperto. Per lo contrario nella figura 6 la canna 50 d' ottone, che pure ſta unita al riſpettivo ſegmento 31; dov' eſſa finiſce ſi ha ſaldato un pezzetto di molla d' orologio 51. 51 ad angolo retto; ed all' altra eſtremità della molletta 51 ſta attaccato ancora ad angolo retto un altro pezzetto di canna 52 che contiene fiſſa la matita 53. Ambi queſti meccaniſmi ſervono all'uopo, ma più utilmente e con minor conſumo di matite ſerve il meccaniſmo figura 6, perchè la molla in eſſo vi agiſce con più coſtante ed uniforme pieghevolezza.

Dalla deſcrizione fin' ora fatta di queſta macchina egli appare,

1 Che la ventaruola non può eſſere moſſa, o voltata in verun modo dal vento ſenza che qualcuno degli otto ſegmenti prema contro una delle matite corriſpondenti, e ſegni la ſua attuale poſizione ſull' oppoſto vicino cilindro nero di legno 32. 32.

2 Che eſſendo gli otto ſegmenti, componenti tutto l' intiero giro della ventola, poſti l'uno ſotto l'altro lungo il cilindro 26. 26 ſpiralmente, dovranno ſtamparſi dalle matite otto diverſi ſegni l'uno ſotto l'altro diſtinti ſecondo le varie poſizioni della ventola, ognuno de' quali ſegni rappreſenterà coſtantemente una tale e non altra mai poſizione della ventola.

3 Che ſiccome la ventola muta le ſue poſizioni ſecondo le varie direzioni de' venti; così le otto matite ſegneranno otto diverſe direzioni di vento, che è quanto dire otto diverſi rombi. Rimane ora a determinare, ed a qual vento corriſponda la preſſione d'ogni matita, ed a far sì che i ſegni di ognuna delle matite moſtrino oltre la qualità del vento anche per quanto tempo, ed in qual ora del giorno o della notte ogni vento abbia ſoffiato.

Per ottenere il primo intento cioè ſapere la giuſta ſignificazione de' ſegni delle matite baſta nella prima coſtruzione

della macchina orizzontare la ventaruola in modo che si sappia qual sia il vento, che corrisponde alla prima e più alta matita; poichè le altre allora acquisteranno la lor giusta significazione da sè stesse. Nella mia macchina il primo segmento 26 marca il vento est, ossia levante, dunque il secondo che è alla diritta discendendo sarà il sud-est ossia scirocco; il terzo è il sud ossia mezzodì; poi viene il sud-west ossia libeccio; quindi il west ponente; in seguito il nort-west maestro; dopo di esso il nort tramontana; e per ultimo compie il circolo l'ottavo rombo nort-est cioè il greco; nè il girar della ventaruola ora per un verso ora per un altro, nè l'andar di essa ora avanti ora in dietro può mai cambiare la significazione una volta determinata dei venti.

Il secondo scopo poi, che è il principale forse di questa macchina cioè quello di farla segnar le ore, nelle quali i diversi venti hanno soffiato unitamente alla loro durata, si ottiene col rendere orariamente mobile sul suo asse verticale il cilindro di legno verniciato nero 32. 32, così che in ventiquattro ore esso presenti alle matite tutta la sua superficie in una intiera rivoluzione diurna. Ciò si ottiene nella mia macchina facilissimamente dell'orologio 17 posto in mezzo fra l'anemometro e l'anemoscopio, il di cui movimento diurno essendo orizzontale sulla sega 18. 18 fa muovere i due cilindri 32. 32 (fig. 2.), e 14. 14. 14. 14 (fig. 1.) solamente col semplicissimo meccanismo d'avere avvolto ad uno de' cilindri 32. 32 la funicella 16. 16 che porta il peso movente l'orologio, il quale scende per una girella verticalmente abbasso, e a misura che l'orologio avanza da 17 in 18, ed all'altro cilindro 14. 14 similmente l'altra funicella 16. 16 che porta il contrappeso dello stesso orologio. La sola avvertenza necessaria perchè ogni cilindro abbia il suo moto orario esatto si è che la periferia d'ogni cilindro di legno dove la funicella vi è avvolta sia esattamente simile in estensione alla lunghezza della sega dell'orologio 18. 18, così che quando l'orologio ha percorsa tutta la sega, ogni cilindro abbia fatta una intiera rivoluzione. Ciò posto la lunghezza delle righe orizzontali bianche segnate sul cilindro 32. 32 segnerà il numero delle ore, nelle quali ogni vento è soffiato, poichè ogni cilindro deve avere all'alto una

zona bianca divisa in ventiquattro parti uguali che sono le ore; e la diversa altezza delle righe corrispondenti alla posizione delle otto matite segnerà i diversi rombi del vento in ogni ora del giorno. Egli accade non rare volte, principalmente quando i venti sono forti, che la ventaruola oscilla avanti ed in dietro per l'ordinario per lo spazio di tre rombi; ma allora essendo la di lei posizione più costantemente sforzata nella vera direzione del vento, e le oscillazioni essendo più variabili del vento, trovasi segnata nel vero rombo una linea bianca marcata fortemente e continova; mentre nei due rombi adjacenti trovansi delle linee interrotte poco marcate e punteggiate: ed è questa pratica osservazione che mi ha determinato dopo varie sperienze a circoscrivere il mio anemoscopio a soli otto rombi, il che altronde per osservazioni meteorologiche terrestri è più che sufficiente, sebbene egli sarebbe assai facile il fargli segnare sedici, ed anche trentadue rombi, volendo, senza punto complicar la macchina solamente allungando molto il meccanismo 26. 26. Un'altra osservazione da farsi su questa macchina si è che quando l'aria è affatto quieta, il che nella nostra pianura lombarda accade spesso, vedesi dall'anemoscopio segnata solamente con uniformità e continovazione una linea che corrisponde a quel luogo dove la ventaruola sta ferma: e questa linea non può confondersi col soffio d'alcun vento sì per le di lei proprietà, come perchè l'anemometro, del quale dirò, fin'ora vedesi non aver segnati punti soffj di venti: ed ecco così compito con facile, solido e durevole meccanismo l'anemoscopio orario, del quale in nove anni che lavora la manutenzione mi costa appena qualche lira. Egli è ben vero che la mia macchina segna la sola direzione de' venti, non la inclinazione di essi all' orizzonte, siccome coll' ingegnoso suo anemometro ha fatto il Sig. Cavaliere d'*Alberg* (*a*) riunendo nello stesso stromento la indicazione della direzione, della inclinazione, e della forza del vento con meccanismi assai felici; ma ol-

(*a*) Veggasi Anemometre proposè aux amateurs de meteorologie. Erfurt 1781. 4. e Giornale dell'Abate *Rozier*. t. 17. anno 1781. *pag.* 438.

tre a che questo non è stromento orario, io non ho preferito nelle mie macchine meteorografiche la riunione di più effetti in un solo stromento, perchè allora se la macchina si guasta, il che principalmente può accadere in quelle destinate a notare gli effetti de'venti non rare volte violentissimi e turbinosi, io vengo a perdere le annotazioni di tutti gli effetti insieme; laddove separando per esempio l'anemometro dall' anemoscopio, se uno di essi si guasta, perderò per quel tempo o la sola direzione, o la sola forza del vento, non ambe insieme: oltre di che egli sembra che macchine continuamente soggette a cotanto irregolari movimenti per varj anni debbano essere della maggiore semplicità unita alla solidità per non esporsi spesso a perdere il frutto delle quotidiane osservazioni. A tale oggetto io ho fatto che nelle mie macchine il moto orario dipendente dall' orologio fosse così separato dal resto della macchina, che venendo a fermarsi o guastarsi l'orologio la macchina seguitasse a segnar tutto ciò che dee, eccettuata la distribuzione del tempo (*a*).

§. II.

Dell' Anemometro, ossia misuratore del vento.

Se le osservazioni della direzione varia dei venti sono utili alla Fisica, ed alla Medicina; non v'ha dubbio che ugualmente lo debbono essere quelle della varia forza dei

(*a*) Egli può accadere alcune volte, ed è anzi accaduto in mia casa, che non si possa nell'anemoscopio far discendere rettamente l'asta della ventaruola dal tetto alla stanza, e bisogni fare delle piegature, e mutar direzione; in tal caso il migliore, ed il più solido meccanismo per ottenere questo vantaggio si è l'uso delli snodi indicati nella figura 7. Al luogo dell'asta dove essa dee cangiar direzione si salda il pezzo a forchetta di ferro 54: con esso si unisce a perno mobile una croce di ferro, quindi pure a perno mobile il pezzo di ferro 56; poi un'altra croce 57. poi il pezzo 58 che dev'essere conficcato sopra l'asta che scende nella stanza; a questo meccanismo si può dare molta lunghezza allungando secondo il bisogno l'asta del pezzo 56; ed al caso potrebbe esso anche duplicandosi, e triplicandosi estendersi alla lunghezza di molte braccia e produrre diverse inflessioni senza danneggiare il movimento della ventaruola. Il meccanismo delle ruote dentate posso assicurare per esperienza essere assai peggiore di questo, oltre a che produce un maggiore sfregamento.

venti ſteſſi, oſſia del vario impulſo, col quale agiſcono per eſempio ſul noſtro corpo. Eſemplari di macchine deſtinate a queſto ſcopo poſſono vederſi nel ſuddetto bell' opuſcolo del Sig. Cavaliere d'*Alberg*; nella Filoſofia Britannica di *Martin* tomo ſecondo; nelle Tranſazioni Filoſofiche dove leggeſi la deſcrizione dell' anemometro di *Smeaton*; nelli due anemometri propoſti dal Sig. *Brequin* de Demençe (*a*); nella Meteorologia del celebre Padre *Cotte* (*b*); nelle ſopraccitate macchine del Conte *D. Onſenbray*; negli opuſcoli ſcelti di Milano (*c*) tomo terzo dove è delineata la coſtruzione dell'anemometro di *Marſhall* ſempliciſſima, e nel tomo quarto dell' opera ſteſſa dove è la deſcrizione di altro nuovo anemometro propoſto dal dotto Ingegnere Collegiato *Steffano Calvi*. La generale coſtruzione di tutti gli anemometri, ſiccome avverte beniſſimo il Sig. *Calvi*, può ridurſi alle tre claſſi ſeguenti cioè

1 Ad un piano diverſamente inclinabile ſopra d' un perno che rappreſenti colle diverſe ſue inclinazioni la varia velocità del vento che lo percuote. Tale ſi è quello del Sig. *Marſhall*.

2 Ad una ruota di molino a vento o verticale o orizzontale con anneſſi peſi o molle, le quali conſiderate come reſiſtenze rappreſentano la forza del vento che le muove, ſiccome è l' anemometro di *Martin*, di *Smeaton* ed il mio che ora ſono per deſcrivere.

3 Ad un piano verticale di una data ſuperficie orizzontalmente e ſempre direttamente oppoſto al vento che ſpira, il movimento del qual piano rappreſenta l' impeto del vento che lo muove. Non è del mio argomento l' entrare ora a diſcutere gl' inconvenienti, ed i vantaggi di ognuna di queſte coſtruzioni; e ſolo dirò che ho preferita quella a molino orizzontale con anneſſi peſi determinati perchè mi è ſembrata queſta coſtruzione più durevole ed atta a ſoffrire ſenza pericolo le ingiurie de' venti e delle ſtagioni: perchè l' azione dei peſi è più coſtantemente uniforme di quella delle molle,

---

(*a*) Giornale dell' Abate *Rozier* t. 16. 1780. pag. 433.

(*b*) *Cotte* traitè de meteorologie 4. Paris 1774. pag. 198 tav. 12. fig. 2.

(*c*) Vegzaſi Opuſcoli ſcelti T. 3. pag. 262. 1780 e T. 4. pag. 45 1781.

perchè gli sfregamenti con questa costruzione mi sono sembrati meno alterabili che nelle altre, ed anche minori, il che fa ritornare con maggiore facilità, e costanza la macchina allo stesso punto nello stato di quiete, ed è una condizione utilissima, se non necessaria, volendovi adattare l' orario movimento. Frattanto mentre edotti altri degl' inconvenienti di tutti gli anemometri antecedenti, ed anche dell' anemometrografo mio ne miglioreranno la costruzione, io descriverò quello di cui mi servo da quasi un decennio.

N. 1. 1. (fig. 1.) è un robusto trave fermato solidamente alla travatura di tutto il tetto, il quale sale quattro buone braccia sopra il tetto medesimo. 2. 2. è un coperchio di rame perchè la pioggia non scenda lungh' esso e penetri in casa. Al disopra di questo coperchio tutto il trave è a molte mani verniciato a olio per preservarlo dalle ingiurie delle stagioni. N. 3. 6 è un' asta orizzontale di ferro immobilmente attaccata al trave, che in 6 ha un buco d' acciajo ben tornito e liscio, entro cui gira il perno superiore del mobilissimo mulino. 9. 9. è un' altra asta di ferro orizzontale immobile che finendo in un pezzo d' acciajo con una rotonda incavatura riceve la punta inferiore dell' asta verticale 6. 6 del mulino. 4. 4. 4. 4. sono quattro ale di latta rinforzate con orli di ferro e declinanti di circa 22 gradi dal perpendicolo, perchè il vento motore si sdruccioli sopra, e ne renda maggiore la mobilità. Esse ale sono più larghe alla estremità remota dal comune loro centro, e ne ho determinata la superficie per poter poi calcolare la forza del vento che le muove. 5. 5 è un coperchio pure di rame pel solito intento d' impedire che l' acqua entri lungo l' asta verticale in casa. 7 è un rocchetto fermamente saldato sull' asta reggitrice del mulino, al quale è attaccata una funicella che attraversando la girella 8 scende 10. 10. 10 nella stanza attaccata al meccanismo, che sostenta i pesi rappresentanti nell' alzarsi la forza del vento. Questa fune deve essere così tesa e legata che ad istromento quieto tenga tese le catenelle sostentatrici del primo peso senza alzarlo, e lo alzi poi al menomo moto del mulino corrispondente.

La fune 10. 10 scendendo dalla soffitta a perpendicolo arri-

arriva fino all'ultimo n. 10 nella ſtanza dove col mezzo d'un anello s'annoda ad un'anſa ſcorſoja d'acciajo 13. che ſoſtiene e la matita che preme ſempre uniformemente contro il cilindro di legno nero 14. 14. 14. 14. e quattro catenelle tutte annodate all'anſa ſteſſa, le quali ſoſtengono ventidue pezzi di piombo fatti tutti a ſerro di cavallo 11. 11. 11. 11. ed attaccati tutti equidiſtanti l'uno dall'altro con quattro ugualiſſime catenelle per ognuno di queſti peſi. Li primi diciotto ſono di tre oncie l'uno, i due ſuſſeguenti di ſei oncie, e gli ultimi due di dodici oncie per cadauno. Ed affinchè l'alzamento, e l'abbaſſamento molte volte rapido, ed oſcillatorio di queſti peſi ſi faccia con una coſtante direzione, vi è 1°. una forte sbarra di ferro liſcia quadrangolare 12. 12. ſodamente fermata ſulla tavola che ſoſtiene i peſi, lungo la quale con direzione ſempre perpendicolare ſcorre l'anſa ſcorſoja 13 : 2°. v'è una rotonda bacchetta forte pure di ferro che attaccata all'anſa paſſa per entro la cavità di tutti li peſi, fatti perciò a ferro di cavallo, e ſcende regiſtrata entro la ſolidità della ſottopoſta tavola in modo da mantener coſtante il perpendicolo di tutti i peſi tanto nel ſalire quanto nello ſcendere.

Da queſta coſtruzione ne ſiegue che qualunque vento faccia muovere le ale del molino 4. 4. 4. dovrà far avvolgere la fune 10. 10. 10. ſopra il rocchetto 7. e per mezzo di queſto avvolgimento di fune ſi alzeranno tanti peſetti 11. 11. 11. quanti baſtino a far l'equilibrio colla forza del vento, che muove il mulino; quindi a rappreſentarne la medeſima forza. Ma non poſſono alzarſi i peſi ſenza che s'alzi l'anſa ſcorſoja, la quale porta la matita 13; e queſta perchè premente con molla (veggaſi meccaniſmo figura 5. e 6. ſopra deſcritto) contro il cilindro di legno nero 14. 14. non può ſtriſciarvi ſopra ſenza laſciar ſegno del ſuo alzamento; dunque ſarà ſempre ſegnato ſul cilindro qualunque alzamento di peſi dal primo fino all'ultimo, oſſia qualunque forza di vento dall'equivalente di tre oncie in pèſo fino alle oncie novanta.

Ora ſiccome il cilindro grande di legno nero 14. 14. ſimile a quello 32. 32. dell'anemoſcopio ſi avvolge ſopra il ſuo aſſe in ventiquattro ore, così preſentando ſempre diverſa

ſuperficie alla matita accaderà che ſi vedranno ſul cilindro notati tutti i ſoffj di vento in ogni momento in modo che le ordinate linee moſtreranno la forza del vento per la quantità de' peſi alzati, e le aſciſſe l' intervallo di tempo che è corſo fra un ſoffio e l' altro, ſiccome indicato vedeſi nella figura.

Egli è appena biſogno di far avvertire agl' intelligenti di queſte materie, che per potere calcolare la forza del vento con queſta macchina conviene prima aver trovato per eſperienza ripetuta di tempo in tempo la quantità dello ſfregamento della macchina ſteſſa, che nel mio caſo equivale circa al peſo di un' oncia e mezza, e la ſuperficie delle ale 4. 4. 4. 4. del mulino, oltre la loro inclinazione, delle quali coſe parlerò quando una volta pubblicherò almeno i generali riſultati delle mie oſſervazioni. Piuttoſto egli è più neceſſario l' aggiugnere che ſiccome la forza del vento ſulla mia macchina ſorpaſſa non rariſſime volte le oncie novanta, ed anche cento, io ho provveduto alla ſicurezza e durata del mulino ne' tempi turbinoſi col meccaniſmo ſeguente che fin' ora mi è rieſcito felicemente.

All' alto dell' aſta quadrangolare di ferro 12. 12. è un orlo prominente in fuori che impediſce l'anſa ſcorſoja 13. d'alzarſi più oltre ſebbene una forza ſuperiore tentaſſe di tirarvela: dunque arrivata fin lì l' anſa, non ſi può avvolgere più altra fune al rocchetto 7. ed avrebbe il mulino un oſtacolo inſuperabile a muoverſi comunque ſpinto dal vento fortiſſimo, ſe non vi foſſero nel comune centro delle ale del mulino due molle con una ruota dentata, la reſiſtenza delle quali eſſendo ſuperiore al peſo d' oncie novanta non agiſce finchè vi ſono peſi da alzare, e dall' altra parte laſcia girare il mulino ſolo ſulla ſua aſta *6. 6.* allora quando queſt' aſta per avere avvolta tutta la fune che poteva diventò immobile. Io non ho nel mio anemometro voluto tener conto della forza del vento ſuperiore a cent' oncie, perchè eſſendo ſtato mio ſcopo principale di applicare le oſſervazioni meteorologiche alla Medicina ho veduto poterſi chiamar vento maſſimo in generale il ſuperiore alla forza ſuddetta, e baſtare all' intento propoſtomi il poter diſtinguere di tre in tre oncie le differenze di ogni vento fino alla quantità ſopra indicata.

Già egli è ſtato detto deſcrivendo l' anemoſcopio che lo ſteſſo orologio 17. 17 muove ambi i cilindri di legno, e che ſopra ambi queſti neri cilindri v' è una zona che moſtra le ore 24 del giorno. Dunque per ſapere con ambe queſte macchine che coſa ſia accaduto in tutto il giorno, o nella direzione, o nella forza non ſi ha che da oſſervare le righe bianche ſegnatevi dalle riſpettive matite; notare col favore della zona oraria ſotto quali ore ſieno le principali mutazioni accadute; in ſeguito dopo avere regiſtrato tutto in un libro per eſempio la ſera, rimontar l' orologio facendolo retrocedere per la ſua ſega da dritta a ſiniſtra, e per ultimo caſſare col mezzo d' una ſpugna umida in ambi i cilindri le ſegnature tutte delle matite.

Vi ſarebbe un metodo anche migliore per ottenere, e caſſare più facilmente le ſegnature delle matite in queſte macchine, il quale mi è ſtato recentiſſimamente comunicato dal celebre Sig. Cav. *Landriani*, cioè di porre in opera delle matite nere comuni, e far che ſegnino non ſopra legno verniciato, ma ſopra vetro ſmerigliato, cioè ſpulito collo ſmeriglio. Le ſegnature così fatte rieſcono nette viſibiliſſime; lo sfregamento delle matite è molto minore, quindi la macchina muoveſi con maggiore agilità, ed è faciliſſimo il modo di levare i ſegni paſſandovi ſopra un' umida ſpugna. Io non ho poſto fin ora in opera queſto metodo che credo preferibile al ſopra deſcritto, perchè non l' ho ſaputo che in queſti ultimi tempi. Può ancora adoperarſi quella carta perpetua ſulla quale ſi ſcrive la muſica, che è ſuſcettibile di quotidiane caſſature, ma ho trovato in pratica che eſſa corriſponde male all' uopo, perchè alterandoſi ed incurvandoſi col caldo, freddo, umido, e ſecco eſſa arreſta qualche volta le matite, o fa loro fare de' ſalti che ne rendono dubbj in ſeguito i ſignificati.

§. III.

Dell' Elettrografo, o dimoſtratore orario dell' elettricità aerea.

Egli è noto che il celebre P. *Beccaria* tanto benemerito e delle ſcienze fiſiche e particolarmente dell' elettricità propoſe nel 1780 uno ſtromento col nome di ceraunografo,

perchè segnar potesse lo scoppio de' fulmini; il tempo, nel quale ogni fulmine scoppiava; e la qualità positiva o negativa della elettricità che lo produceva (*a*). Quest' opuscolo mi venne alle mani nel tempo che costruivo il mio osservatorio meteorologico, e pensai d'adattarvi anche questo a dir vero più curioso che utile ordigno. Per ottenere ciò con facile meccanismo dopo avere isolata col mezzo di due grossi bastoni di vetro verniciato la ventaruola fig. 2 vi unii sotto il tetto una liscia canna d' ottone 20. 37, la quale fa comunicare la fig. 2 colla 3, e scende diventando perpendicolare 36. 36 fino nella stanza vicino al centro di un quadrante da orologio di cartone 42. 42. 42 fig. 3. Dove la canna si curva ad angolo retto è sostenuta con cordone di seta e canna di vetro verniciato 37. 37, e dove attraversa la soffitta della stanza, ed entra nella cassetta a vetri quadrangolare che si vede disegnata nella fig. 3, ivi dico passa la canna attraverso a lunghi tubi di vetro verniciati di cera lacca, perchè sia sempre bene isolata. Finisce questa canna al n.° 38 in un campanello attaccatovi ed isolato, vicino al quale ve n'è un altro 39 sospeso pure alla medesima altezza per mezzo d' un grosso filo d' ottone che scendendo in angolo lungo la parete della cassa esce dalla stanza per terminare con lungo giro in un pozzo facendo le veci di filo di salute. Tra i due campanelli v' è pendolo un battente metallico sospeso con un filo di seta che produce il continovo suonare de'campanelli, ed avverte l' osservatore, quando vi è nell' atmosfera della elettricità scintillante.

Al n.° 43 v' è un pezzo di filo d' ottone terminato in ottusa punta attaccato alla canna 36, e curvato in modo che stia dirimpetto perpendicolarmente alla zona esteriore 42 del quadrante orario. Dietro a questa zona, che dee essere di carta verniciata con cinabro, v' è un filo metallico terminato anch' esso in grossa ed ottusa punta vicino alla zona medesima comunicante col filo sopraddetto di salute. La zona di carta, ed il quadrante orario girano con moto uniforme sul proprio asse per l' azione dell' orologio a sega 44. 44. al quale è il quadrante unito con una corda

(*a*) D'un cerannografo, e della cagione dei tremuoti Scritti due di *G. B Beccaria* Torino 8. 1780 presso *Briolo*.

avvoltolata ad una girella, la di cui circonferenza equivale alla lunghezza di tutta la ſega 44. 44. Dunque quando in ventiquattro ore l'orologio ha percorſa tutta la ſega, il quadrante ha egualmente compito un intiero giro. Il facile meccaniſmo della girella fiſſata al centro del quadrante mobile ſul ſuo perno centrale, e della fune attaccata all'orologio, ed alla girella è poſto dietro al quadrante, nè può vederſi; ma appunto perch'eſſo è ſemplice e facile, ho creduto inutile moltiplicar le figure per rappreſentarlo.

Poſta queſta coſtruzione, allora quando viene un temporale ed io voglio veder ſegnate le ſcintille fulminee, levo il pendoletto 40. poichè eſſendo allora più diſtanti i campanelli fra di loro che lo ſieno li due fili metallici 43 pure fra di loro, la ſcintilla ſalta ſempre dalla punta anteriore alla punta poſteriore, e fora la carta. E ſiccome la zona di carta gira con moto orario, così io veggo ed a qual'ora ha cominciato la prima ſcintilla, e per quanto tempo ha durato la elettricità ſcintillante, anzi anche quanti colpi ſono ſcoppiati. Oltre di che dalla diverſità delle impreſſioni fatte ſulla carta ſi può conoſcere ſe poſitiva o negativa è ſtata la elettricità; per lo contrario poi quando ſi vuole eſſere avvertiti, eſſendo in caſa, ſolamente del principio d'un temporale, ſi laſcia a ſuo luogo il pendoletto, ſi accorre al ſuonare de'campanelli, e ſi fanno quelle oſſervazioni che vogliono farſi.

Per ottenere anche i ſegni della minima elettricità non ſcintillante io vi tengo vicina una boccetta di leiden 46 che comunica col campanello 38, col mezzo della quale diſtaccata dal campanello ed applicata ſubito al conoſciuto elettrometro del Sig. *Sauſſure* (fig. 4) ſi diſtingue e la piccola elettricità, e la di lei qualità. Meglio è ancora applicarvi il condenſatore del Sig. *Volta*, o quello più recente del Sig. *Cavallo*, la di cui utilità ed efficacia io ho potuto confermare anche colla propria eſperienza (*a*). Non poſſo però a me-

---

(*a*) Veggaſi intorno al condenſatore del Sig. *Volta* il giornale di *Rozier* T. 22. 23. anno 1783; intorno al condenſatore del Sig. *Cavallo* lo ſteſſo giornale t. 34. 1789. pag. 258.

Sopra un altro elettroſcopio adattabile al conduttore elettrico aereo la memoria del Sig. *Boyer-Brun* nella ſteſſa opera t. 28. 1786 pag. 133. ſopra un elettrometro adattabile allo

no di ricordar quivi, qualunque metodo si siegua, o meccanismo si adoperi, una somma cautela e nella prima posizione dei conduttori aerei, e nell'osservare intorno ad essi; non solo perchè si leggono esempj d' illustri Fisici disgraziatamente sagrificati al troppo fervido desiderio d' investigazione in questo pericoloso argomento, ma perchè a me medesimo accadde un violento fenomeno, del quale se ne può vedere un breve ragguaglio nell'opera sui conduttori elettrici del chiarissimo Sig. Cavalier *Landriani*.

§. IV.

Del Pluviometro, ed Atmidometro Orarj. Dell'Igrometro, de' barometri, termometri, e delle macchine magnetiche costituenti il compimento dell' osservatorio meteorologico.

Il pluviometro, ossia stromento misuratore della pioggia, entra necessariamente nel corredo delle macchine meteorologiche. La costruzione di esso era assai semplice, e meno atta allo scopo delle più diligenti diurne osservazioni avanti che il Sig. Cavaliere *Landriani* lo rendesse il primo tra i Fisici a mia notiza orario col nome di croniografo, quindi capace di segnare oltre la quantità totale dell' acqua caduta in un dato tempo anche la durata della pioggia *(a)*. Io ho adottato l' uso di questo ingegnoso stromento, e per la pratica che ne faccio di nove anni continovi posso conchiudere che esso serve assai bene all' intento, e non porta seco bisogno di dispendiosa manutenzione, o soverchia cura per conservarlo, principalmente quando venga posto in uso colle modificazioni ed avvertenze che ora sono per indicare. Non

---

stesso scopo la memoria del Sig. *Cavallo* l. c. t. 13. 1779 pag. 220.

E volendo conoscere ciò che è stato proposto intorno alle macchine per raccogliere l' elettricità aerea, ed osservarne i fenomeni vegganfi li dotti opuscoli de' Signori *Saussure*, *Beccaria*, *Bertolon*, *Le Roy*, *Pasumot*, *Rouland*, *Ferry*, *Ronaine*, *Tourry*, *Liktemberg* ecc. sparsi in varj luoghi dell' utilissima opera periodica sopraccitata.

(*a*) Veggasi intorno alla costruzione degli antichi pluviometri la meteorologia del P. *Cotte* sopra citato; il giornale di *Rozier* anno 1776 t. 8. pag. 58. lettera del Sig. Pasumot. Opuscoli scielti di Milano dove è indicato il pluviometro della Specola di Brera ecc.

ho creduto in primo luogo di far uso dell' iometografo, comunque bene imaginato, sì perchè ho trovato in pratica che utilissima cosa riesce il conservare tutta l'acqua che cade per fino a che se ne sia fatta l'annotazione, e verificata la misura indipendentemente dall' orologio ; sì perchè rendendosi necessariamente per l'unione di questi due meccanismi più composta, delicata, e guastabile la macchina, non può esserne così durevole, economico, e facile l'uso. Altronde poi non essendo mio scopo il fare delle osservazioni dettagliatissime di uso fisico, ma l'applicare le meteorologiche osservazioni alla Medicina, non ho creduta importante per me la scrupulosa annotazione del quantitativo esatto orario di pioggia bastandomi d'avere il tempo, ossia la durata della pioggia oltre alla quantità caduta in ogni giorno. Ho detto il quantitativo esatto orario, perchè anche senza l'iometografo si ottiene benissimo per approssimazione sufficiente anche la quantità oraria della pioggia d'un giorno dividendo la totale osservata acqua pel numero delle ore che ha piovuto; e se qualche volta cade un rovescio d'acqua abbondante, e raro, nel qual caso dubito che l'iometografo qual'è fin' ora stato costruito possa servir bene; allora basta notar subito dopo senza aspettare la sera la quantità dell' acqua caduta, e dividerla pel tempo, nel quale essa cadde.

Ella sarebbe una inutilità il voler qui dare la figura, e minuta descrizione del pluviografo da me adoperato, ed è perciò che quantunque esso faccia parte costante della collezione di mie macchine meteorologiche non l' ho fatto disegnare : solamente basterà l' indicare che il vaso superiore, il quale riceve la pioggia sul tetto tav. 2. fig. 9. l'orologio orizzontale tav. 1. fig. 2. la matita a molla tav. 1. fig. 3, il vasetto conico *R.* tav. 1. fig. 3., ed il sifoncino *N. v.* fig. 6. essendo i medesimi che descritti sono dal Sig. Cavaliere *Landriani* nel Tomo 1. di questi medesimi Atti pag. 203, io ho sottoposto poi al conico vasetto *R* armato del suo sifoncino un parallelepipedo di rame del diametro di sei pollici francesi, alto quattro piedi, e chiuso di sopra in modo che vi rimane solamente un foro per penetrarvi l'acqua versata dal conico vasetto. A questo recipiente sta lateralmente unita una canna di vetro dell' altezza pure di quattro piedi

che fa tubo comunicante colla ſua ſcala diviſa in pollici e linee cosicchè per eſſa veggo ſempre le quantità anche minime d'acqua contenuta nel recipiente. Per ultimo al fondo del recipiente è ſaldata una chiave, oſſia robinetto d' ottone pel di cui mezzo ſi vuota il recipiente ſempre con facilità dopo aver ſegnata l'acqua. Con queſto ſemplice meccaniſmo ſi ottengono i ſeguenti comodi.

1 Eſſendo il diametro del recipiente la venteſima parte del diametro del vaſo che è ſul tetto a ricevere l'acqua piovuta, io vengo ad avere ingrandita venti volte l'acqua caduta; e ſiccome ſi può ad occhio nudo facilmente prendere un terzo di linea ſenza errore ſenſibile, io vengo colla mia ſcala diviſa in linee anneſſa al tubo di vetro a conoſcere ſempre ſenza microſcopj la ſeſſanteſima parte di linea dell'acqua piovuta.

2 Per eſſere profondo quattro piedi il recipiente di rame altronde ſtretto molto per tanta profondità, egli fa pozzo, e produce pochiſſima evaporazione maſſime quando l'acqua è vicina al fondo del vaſe, il che accade nelle piccole pioggie, nelle quali è più neceſſaria l'eſattezza.

3 Se per avventura mi ſi viene a fermare, o guaſtare l'orologio o il meccaniſmo ſoſtenitore del conico vaſetto, ovvero il ſiſoncino, io perderò in quel giorno la ſegnatura delle ore, nelle quali è piovuto, che pure poſſo per approſſimazione ſapere ſempre, ma non perderò mai la quantità dell'acqua caduta, che è il più importante oggetto; ciò che non accade nel più delicato e compoſto iometografo. Alle quali rifleſſioni poi mi ſembra che ſe ne debba un'altra aggiugnere più generale, cioè che la matematica eſattezza, e perfezione degli ſtromenti non ſerve in quelle ſperienze, nelle quali la natura del fenomeno da oſſervarſi non ammette che l'approſſimazione.

Nel noſtro caſo la quantità della pioggia che cade per la natura dello ſtromento ſteſſo, e delle circoſtanze accompagnanti la pioggia, non può raccoglierſi ſe non in un determinato piccolo ſpazio, ſopra il quale pe' diverſi venti che ſoffiano, e per altre accidentali circoſtanze potrà cadere ora più ora meno acqua, grandine, e neve di quello cada negli ſpazj circonvicini. Dunque poſſono beniſſimo ritenerſi per

ſufficientemente

ſufficientemente eſatti i riſultati delle quotidiane oſſervazioni pluviometriche quando eſſe ſieno per lungo tempo continovate, e ſi confrontino moltiſſimi, e non troppo brevi ſpazj di tempo fra di loro, perchè in tal caſo gli errori poſſibili ora in più ora in meno ſi compenſano; ma non potrà mai dirſi per eſempio che in un meſe la pioggia indicata da un tale pluviografo ſia preciſamente quella che è caduta in quel meſe ſopra tutta la ſuperficie della città.

Fin qui del pluviografo; venghiamo ora all' atmidometro o atmidografo. Io diedi nel tomo quarto degli Opuſcoli ſcielti milaneſi (*a*) fino dall' anno 1781 la deſcrizione colla figura dell' ordigno, col quale miſurare ſi poteſſe giornalmente la evaporazione dell' acqua; in ſeguito nel 1782 reſi orario queſto ſtromento coſicchè con eſſo ſi poteſſe vedere ſegnata in ogni ora del giorno la quantità parziale di eſſa evaporazione, ed a quell' Opuſcolo ancora mi riporto per evitare le inutili ripetizioni; ſe non che debbo ora aggiugnere che in queſta macchina principalmente più che nelle ſopraddeſcritte è neceſſario mettere in pratica il meccaniſmo della matita, che ſcriva ſul vetro per diminuire al poſſibile lo sfregamento che nuoce moltiſſimo alla ſenſibilità della bilancia. Del rimanente le ragioni, per le quali mi ſia ſembrata preferibile la bilancia agli altri metodi di miſurare l' evaporazione, e l' utilità di queſte oſſervazioni per giudicare dello ſtato dell' atmosfera poſſono vederſi nelli due Opuſcoli ſopraccitati.

Anche un igrometro è neceſſario in un oſſervatorio meteorologico, il quale potrebbe aſſai facilmente renderſi orario, e difatti io l' aveva reſo tale adottando la coſtruzione delle due tavolette che ſi ſcoſtano fra di loro riſtringendoſi per lo aſciutto, e ſi accoſtano gonfiandoſi ad un dipreſſo come ſi vede indicato preſſo il Sig. *Magellan* (*b*); ma l' eſperienza moſtrato avendomi che tale ſtromento indica ſempre il paſſato non l' attuale ſtato dell' atmosfera, ho rinunziato

(*a*) Ved. pag. 118 lettera del R. P. D. *Pietro Moſcati* al Ch. Sig. de *Sauſſure* ecc. e T. V. pag. 46. Deſcrizione d'un nuovo atmidometro orario col quale ſi può ſapere in aſſenza dell'oſſervatore la quantità della evaporazione che ſiegue ogni ora del giorno.

(*b*) *Magellan* Collection des differents traitès ecc. Londres 1780. Sur les meteorographes perpetuels pag. 163.

al vantaggio non grande nelle igrometriche osservazioni dirette solo ad uso meteorologico d'avere questo stromento orario adottando la costruzione conosciuta del celebre Sig. de *Saussure*, dal quale lo stromento è stato colla maggiore precisione descritto unitamente alle più delicate ed ingegnose sperienze sopra questo articolo (*a*); perchè io debba entrare in dettagli inutili sopra lo stesso argomento. Solamente aggiugnerò che temendo a principio la fragilità del capello che doveva sempre stare esposto alle atmosferiche irregolarità ho voluto usare del crine di cavallo comparativamente per potervelo sostituire; ma l'esperienza m'ha dimostrato esservi ne' movimenti del crine molta, ed incostante irregolarità così che io non lo credo atto a simili osservazioni; dall'altra poi ho dovuto vedere non senza meraviglia la tenuità appena visibile d'un capello reggere per alcuni anni continovi all'inclemenza atmosferica, la quale pure aveva alterate, e quasi distrutte funicelle e di canape e di cotone e di seta e di budello esposte per paragone un uguale spazio di tempo, e nello stesso luogo.

Intorno al barometro dirò, che io ne uso uno fatto colle cautele socialmente già esposte insieme al più volte lodato Sig. Cavalier *Landriani* nel Tomo primo di questi Atti, del quale la superiore altezza si determina con un nonio scorrevole assai delicato secondo il metodo de' migliori barometri portatili Inglesi, ed il livello inferiore si ha sempre costante col mezzo di una vaschetta di vetro che circonda l'estremità in su rivolta del tubo barometrico. Si versa del mercurio ogni volta in questa vaschetta cosicchè sopravanzi il livello della canna barometrica; poi si assorbisce il versato mercurio con un sifone annesso ad una boccia di cont-cont, ovvero resina elastica in modo che a nudo rimanga la canna barometrica colla quantità di mercurio che nel tempo della osservazione dee contenere. Così si ha con facile meccanismo un livello esattamente costante. Una curiosa osservazione mi è accaduto di fare usando di questo mecca-

(*a*) Veggasi l'eccellente libro del Sig. de *Saussure* Essay sur l'higrometrie 4. Neuchatel 1783.

nifmo, ed è che il mercurio alla lunga, cioè in un anno o poco più, fi combina colla foftanza della refina elaftica, la ammollifce, ne forma una pafta fimile ad un cerotto facendole perdere la propria fodezza, ed elafticità. Per ultimo finifce coll' affottigliarla e forarla. Egli è dunque non fempre vero che tale o tal altra foftanza fia intaccabile, o infolubile da un'altra, ficcome fuolfi afferire dai Chimici, perchè il contatto reciproco di poco tempo non le altera, o combina. Così lo ftagno, ed il piombo, che contengono l'acqua per molto tempo fenza alterarfi, vi fi fcompongono lafciandoveli immerfi per intieri anni, ficcome io ho dovuto offervare. Può dunque la natura per la mefcolanza, per la immerfione, pel contatto di diverfe foftanze continovato non folamente per anni, ma per interi fecoli produrre de' rifultati de' quali noi non acquifteremo mai idea nelle effimere operazioni de' noftri piccoli laboratorj.

De' termometri non è nulla da dir di particolare, io mi fervo abitualmente di quelli di Farheneith perchè la divifione n' è più minuta; perchè fopra di effi è già fatto il calcolo delle operazioni barometriche con molta diligenza dal celebre Fifico *Milor Shukbourg*. E perchè in quefta fcala non v' è bifogno di notare fe tal grado fia fopra o fotto al zero cioè al punto di congelazione. Solamente potrà forfe qui cadere in acconcio il riferire una offervazione da me fatta per quafi tre anni continovi fopra due termometri, de' quali il movimento era ftato prima trovato uguale; in feguito ne ruppi uno alla cima cofìcchè l'aria vi aveffe libero acceffo, e lafciandoli nella fteffa maniera e fotto le fteffe circoftanze ne regiftrai tre volte al giorno le altezze fenza trovar mai notabile differenza tra l'uno e l' altro: dico notabile perchè la maffima non fu mai maggiore di mezzo grado, e quefta differenza aveva luogo principalmente nello ftato della maggiore ficcità atmosferica. Potranno altri e feguitare e variare quefte offervazioni, e ricavarne forfe degli utili corollarj.

Per compiere la ferie delle meteorologiche offervazioni conviene anche notare i fenomeni diurni del magnetifmo nella fua direzione, nella fua inclinazione, nella fua forza, ed anche quefte diligenze non fono ftate da me neglette, nè

mancano le macchine opportune a tali bisogni nel mio meteorologico gabinetto. La direzione viene osservata con un ago calamitato molto lungo posto in una cassetta lunga poco più dell'ago e stretta, bastando che l'ago percorrer possa lo spazio di cinque gradi al più per parte. Egli è bene che possa aversi una sufficientemente piccola suddivisione del grado, e la mia bussola declinatoria segna di cinque in cinque minuti; perchè si possano vedere le minime variazioni diurne. Di tutte le macchine magnetiche applicate alle osservazioni meteorologiche la declinatoria si è la più importante perchè le variazioni diurne, e periodiche sempre dentro ventiquattro ore dell'ago calamitato sono assai notabili oltrepassando i due gradi e mezzo qualche volta in un giorno; perchè non sono uguali in tutte le stagioni dell' anno essendovi due volte l'anno la minima declinazione diurna che lentamente va crescendo fino al suo massimo: nè dipendono questi movimenti o dalla presenza del sole, poichè hanno ugualmente luogo a tempo nuvolo e piovoso, o dalle altre variazioni atmosferiche, o finalmente nemmeno dall'atmosferica elettricità, poichè il moto diurno non è spesso punto alterato nemmeno dai temporali, siccome avrò luogo di esporre pubblicando i risultati delle mie osservazioni.

L'inclinazione, altro dei movimenti magnetici, si osserva colla macchina detta inclinatoria, che descritta trovasi presso *Muskembroek* e presso *Adams* (*a*) fra gli altri. Io mi sono sempre servito della macchina inclinatoria di *Brander* sufficientemente esatta, e di semplice costruzione; e non ho durato lungo tempo ad osservare, perchè in due anni non mi è riescito mai di vedere sensibili variazioni nella magnetica inclinazione, nè mai ho veduto più di dodici minuti di differenza, senza che altronde anche questo minimo movimento avesse visibile relazione con alcuna delle atmosferiche variazioni. Lo stesso mi è accaduto per riguardo alle osservazioni magnetometriche, le quali io ho fatto col conosciuto magnetometro del celebre Sig. de *Saussure*, del quale il movi-

---

(*a*) *Muskembroek* de magnete. *Adams* an essais on electricity vith an essais on magnetism London 1787. 8.

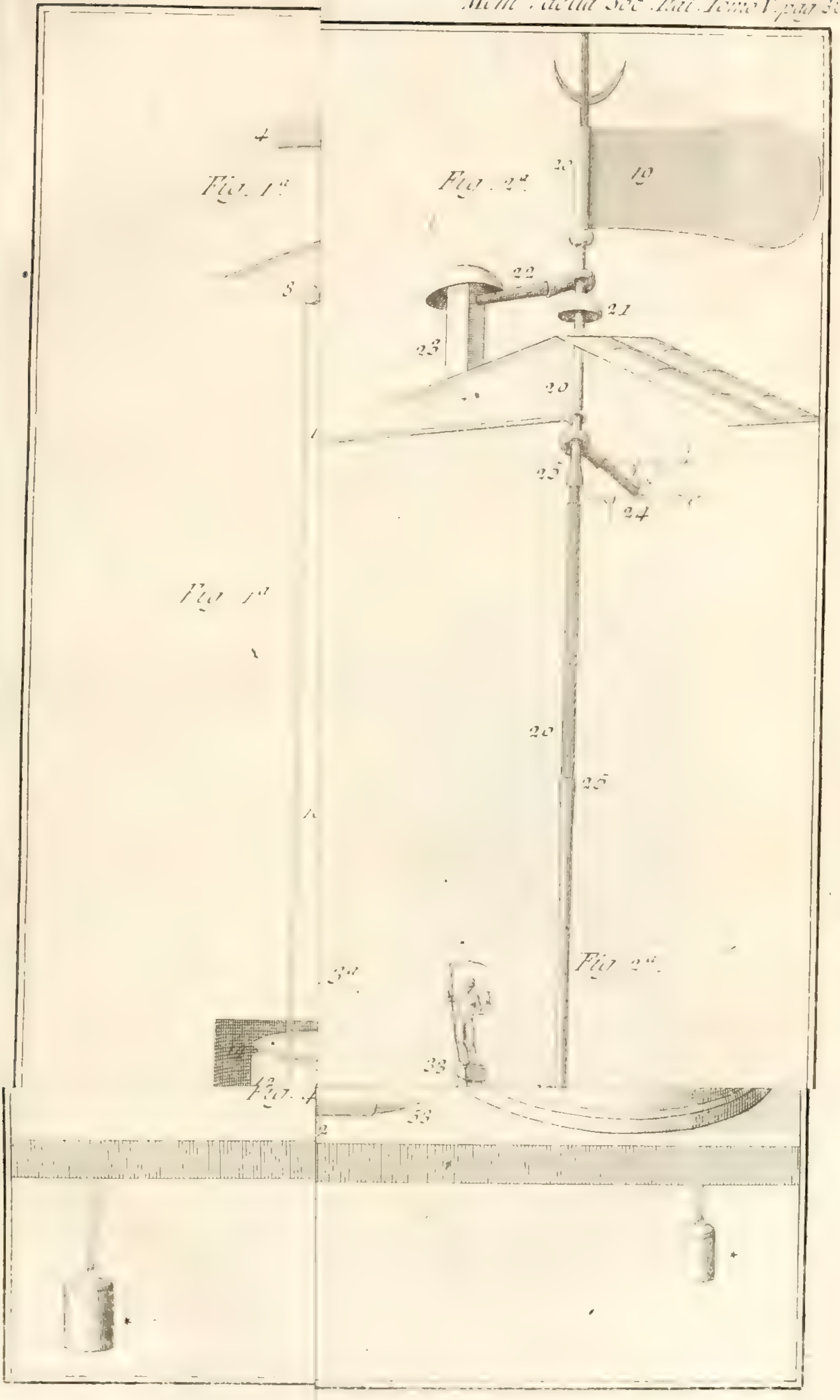
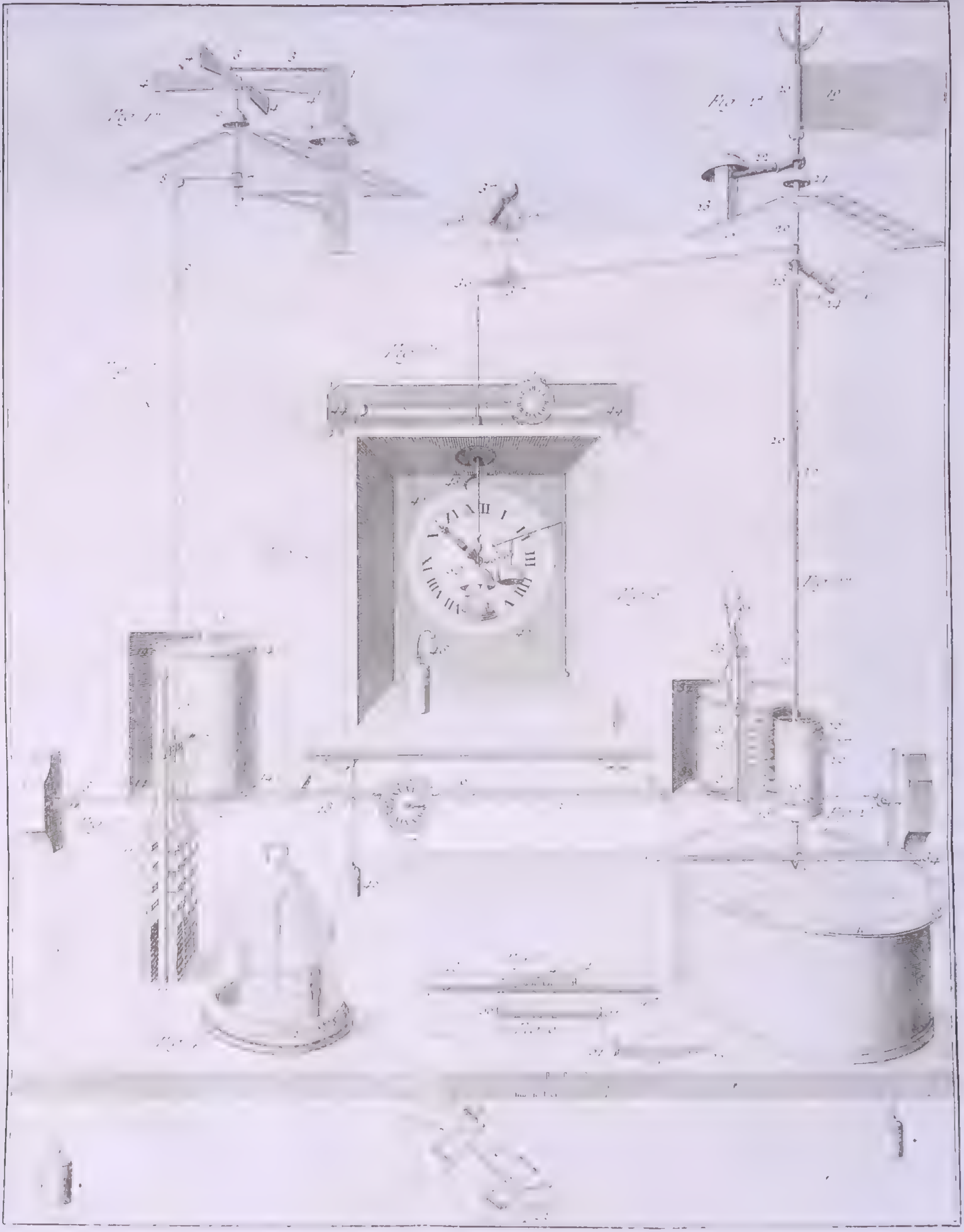
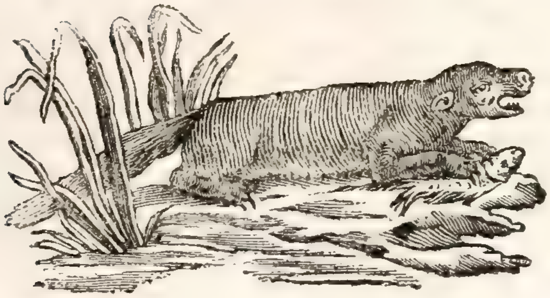


Fig. 1.a
Fig. 2.a
Fig. 2.a
Fig. 3.a
Fig. 4.a
19
20
21
22
23
24
25
33



mento e le variazioni ſono ſenſibili finchè eſſo ſi adopera incaſſato in legno, e diventano piccoliſſime, iſolate da ogni altra mutazione atmosferica; non diurne, nè ebdomadarie, nè menſuali, allora quando ſi poſa la macchina ſopra un inalterabile ſoſtegno di pietra, e ſi cuopre con una caſſa di criſtallo. Io non intendo perciò di biaſimare l'uſo di queſte ingegnoſe macchine, o di diſtrarre l'attenzione de' Fiſici da queſte oſſervazioni, che poſſono o rieſcire diverſamente in altri paeſi, o preſentare ſotto altre viſte che le meteorologiche degli utili riſultati. Ed ecco compiuta la deſcrizione degli ſtromenti che compongono il mio meteorologico Gabinetto, il quale aveva forſe qualche pregio rimontando all' epoca di ſua fondazione, ma ſarei preſto ſuperato dalla generale fervida attività colla quale ed i Fiſici coltivano, ed i Principi proteggono in oggi lo ſtudio della meteorologia.



STORIA

DI UN' EGAGROPILE RITROVATA NEL SECONDO VENTRICOLO DI UN BUE,

Scritta da Francesco Toggia
Regio Professore di Veterinaria

Presentata

Dal Sig. Cavaliere Lorgna.

Medicina sola observatione crevit, sola observatione firmanda est.

§. I.

Un'accurata cognizione de' fenomeni, che scorgonsi ne' corpi degli animali, i quali di certe malattie periscono, dee considerarsi come un necessario fondamento per ben giudicare de' corpi infermi. Questa cognizione non si può acquistare senza le anatomiche osservazioni, le quali massime nella nostr' arte ci abilitano a poter formare e sulla malattia, e sulle di lei cagioni un accurato, e sicuro giudizio. Quindi appare quanto i maniscalchi in molte malattie giuochino a indovinare per mancanza di tali osservazioni, e quanto ciecamente decidano di questo, o di quell' altro accidente come cagione della morte di un animale, quando non sarà, che una conseguenza della malattia. Questa verità è confermata dal seguente esempio.

§. II.

Un bue d'anni 8. circa fu assalito da una leggiera timpanitide, la quale cresceva a misura che l'animale si nutriva, e diminuiva in massima parte colla dieta: del resto era alle-

gro, ſenza febbre, mangiava, e ruminava ſecondo il ſolito, in una parola tutte le ſue funzioni erano in perfetto ſtato di ſanità. Paſſati ſette giorni principiò la timpanitide a farſi conſiderabile per poco che il bue mangiaſſe, o beveſſe, veniva in ſeguito aſſalito da interpolati tremori a tutte due le coſcie, mandava ad intervalli qualche gemito, provava un' inquietudine maſſime nel reſtar coricato, aveva il reſpiro affannoſo, ed un leggier battimento de' fianchi, e col diſtenderſi, e contorcerſi interpolatamente dava ſegni di dolore. Tutti gli accennati ſintomi diminuivano qualche poco, ſe l'animale ſi teneva ad una dieta rigoroſa, ma ſubito ritornavano, allorquando gli veniva ſomminiſtrata qualche ſoſtanza ſolida, o fluida. Finalmente fattaſi coſtante la timpanitide, e ribelle ad ogni rimedio, mi determinai di far uccidere il bue.

§. III.

Prima di paſſare all'eſame del cadavere ſembrami convenevole di eſporre il metodo di cura da me praticato durante la malattia. Chiamato io pertanto a viſitare detto bue giudicai dai ſintomi, che la malattia era probabilmente un effetto d' indigeſtione, per cui gli preſcriſſi una dieta rigoroſa, ed una decozione di fiori di camomilla da darſi alla doſe di tre pinte per volta (*a*).

Con queſto metodo di cura continuato per tre giorni conſecutivi ſi riſolſe la timpanitide; e ſiccome la lingua non era paſtoſa, e le dejezioni erano nello ſtato naturale, feci dare all'animale un po di fieno, ma con mia ſorpreſa ritornò ſubito dopo il paſto il meteoriſmo, e quel, che m'è paruto più ſingolare in ſimile circoſtanza, ſi è, che il bue pochi momenti dopo ſi miſe a ruminare come foſſe ſano ſaniſſimo ſenzachè ſiaſi riſolta la timpanitide, al qual effetto gli fu preſcritta nuovamente la dieta, e la ſovraccennata deco-

(*a*) Non feci uſo in queſta circoſtanza del tanto decantato, e potente rimedio dell' acquavite col nitro, perchè ſapeva beniſſimo, che il meteoriſmo non era prodotto dall'aver il bue mangiato trifoglio, medica, o altre ſimili piante.

zione; e ſupponendo qualche vizio nelle prime ſtrade, ſtimai di dargli il giorno ſeguente a digiuno due once di *aloe ſoccotrino* in boccone con miele, il qual rimedio ſebbene abbia prodotto delle abbondanti evacuazioni, non apportò all' animale un benchè menomo ſollievo.

§. IV.

Veggendo infruttuoſi queſti mezzi, gli feci prendere a digiuno per alcuni giorni conſecutivi due once di china per volta in una bottiglia di vino roſſo generoſo, e nello ſteſſo tempo proccurai, che foſſe nutrito di una parca doſe di ottimo foraggio, ma neppure con queſto mezzo ho potuto ottenere qualche alleviamento.

Non ſapendo da qual cauſa poteſſe eſſere mantenuta queſta così oſtinata timpanitide, mi determinai di fargli la paracenteſi del ventre, cioè di penetrare col *trequarti* un palmo ſotto la teſta dell' oſſo iliaco in mezzo al fianco ſiniſtro nella cavità ſteſſa del ventricolo *(a)*. Con queſta operazione uſcì una quantità d' aria, e l' animale reſtò alquanto ſollevato: ma paſſati appena tre giorni comparve colla ſteſſa forza il meteoriſmo, ceſsò la ruminazione, e reſtarono ſoppreſſe le evacuazioni fecali. Tentai di rimediare a queſto nuovo accidente coll' impoſizione di frequenti lavativi emollienti, e col fargli ingojare in una decozione appropriata due libbre d' olio di ulive, le quali produſſero una tale inquietudine al bue, che perduta ogni ſperanza di guarigione ſtimai di farlo uccidere.

§. V.

Aperto il cadavere eſaminai primieramente i viſceri contenuti nel torace, e nulla vi ritrovai di morboſo a riſerva dei polmoni, i quali erano un po ſovraccarichi di ſangue, ed alquanto infiammati: il qual accidente fu da me attribuito alla difficoltà, con cui il ſangue circolava in queſto viſcere

---

(a) V. il mio Tom. II. ſulle malattie eſterne del cavallo pag. 32.

ſcere per la preſſione continua del grande ventricolo ſul diaframma.

Paſſai quindi all'eſame della cavità del baſſo ventre, e non trovai vizio di ſorte alcuna nella milza, nel pancreas, nel fegato, e nella veſcica del fiele: gl' inteſtini craſſi erano naturali, ed affatto ſgombri di materie fecali, ma il colon era ſtraordinariamente diſteſo da ventoſità puzzolenti; al contrario negl' inteſtini tenui vi ſi ſcorgeva una tenuiſſima porzione di materie liquide fetenti. Il grande ventricolo detto volgarmente il *panzone* era enormemente gonfio. Fatto un taglio longitudinale per tutta l'eſtenſione di queſto viſcere vi uſcì una quantità d'aria fetente, e di ſoſtanze ſolide, e fluide, per lo più di quelle preſe negli ultimi giorni della malattia; oſſervai in ſeguito l'orifizio cardiaco alquanto dilatato, e floſcio; nel reſto queſto ventricolo era ſano, e naturale, ſalvo che ſi ſcorgeva alla ſua grande curvatura la ferita da me fatta col *Trequarti*.

§. VI.

Nulla avendo ritrovato da appagare le mie brame, paſſai ad eſaminare il ſecondo ventricolo detto la *cuffia*, e dai Franceſi *bonnet*, *chapeau*, o *reſeau*, e ſpaccandolo per la ſua lunghezza m' avvidi, che tra la ſua baſe ed il terzo ventricolo detto volgarmente il *millefoglio*, dai Franceſi *mellier*, o *pſeautier*, eravi un corpo bruno avvolto di foraggio, che per la ſua capacità era arrivato ad otturare del tutto l' orifizio comunicante tra queſti due ſacchi. Eſtratto queſto corpo vidi, che era un' egagropile di notabile groſſezza (*a*), la quale col chiudere il paſſaggio degli alimenti al

(*a*) Queſta egagropile unitamente alla deſcritta ſtoria fu da me inviata al chiariſſimo Sig. Co. *Ignazio Somis* di Chiaurie Medico di S. M., Profeſſore primario di Medicina, e Capo del protomedicato, il quale mi fece l' onore di ſcrivermi la ſeguente lettera.

„ Ho letto con ſommo piacere la „ ſtoria dell'egagropile, che ſi è compiaciuta inviarmi: ella è ſcritta con „ diligenza, e con erudizione tale, „ che ſtampandola le recherà onore. „ L' oſſervazione è per quanto mi „ ricordo ſingolare, e ſervirà di lu- „ me in conſimili circoſtanze ecc.

Torino addì 27. Gennajo del 1790.
Sottoſcritto Ignazio Somis di Chiaurie.

terzo ventricolo aveva dato luogo a quella incurabile timpanitide, ed agli altri surriferiti accidenti. Continuai intanto ad osservare il terzo, e quarto stomaco, ma questi erano affatto vuoti, ed in perfetto stato di sanità.

§. VII:

Moltissimi sono gli scrittori, che parlano delle *egagropili*, che si trovano nei ventricoli de' ruminanti; ma la maggior parte sono d' accordo, che queste hanno soltanto la loro sede nel primo stomaco, che viziano la digestione quando sono giunte ad una certa grossezza, ma che non sono capaci di dare la morte all' animale. " I tori, dice il Sig. *Buffon*, le ,, vacche, ed i buoi sono molto soggetti a leccarsi massime quan- ,, do sono in pieno riposo,, ; e poichè si crede, che questo ne impedisca l' ingrassamento, si ha cura di strofinare col loro sterco tutte le parti del corpo, dove possono arrivare a leccarsi; quando non si usi questa cautela, colla lingua assai rozza alzano del pelo, e ne inghiottiscono in quantità grande. Siccome questa è una sostanza, che non si può digerire, ella si rimane nel loro stomaco, e vi forma de' gomitoli rotondi, che s' appellano *egagropiles*, e che talora sono di sì notabile grandezza da doverli tormentare pel volume, e per la dimora loro entro lo stomaco, ed impedirne la digestione. Questi gomitoli col tempo si rivestono d' una crosta bruna molto soda, che poi non è, che una mucilaggine spessa, la quale per lo strofinamento, e la cottura s' indurisce, e luce. Essi non trovansi che nella pancia, e se negli altri stomachi c' entra del pelo, non vi si ferma, siccome neppure nelle budella, e passa visibilmente colla feccia degli alimenti (*a*). Il Sig. *Geoffroy* parlando delle egagropili è dello stesso sentimento del prelodato Sig. *Buffon* (*b*).

(*a*) Storia naturale degli animali quadrupedi Tom. II. pag. 114. Venezia in 8. 1782. Lo stesso *Buffon* dà la figura, e grandezza di varie *egagropili*. V. in seguito la descrizione della parte del Gabinetto, che ha rapporto alla storia naturale del toro pag. 204.

(*b*) Mater. Medic. Tom. III. de quadruped. pag. 575.

§. VIII.

Michele Tonini definisce l'egagropile quel cumulo di peli, che si veggono talvolta radunati massime nel ventricolo del vitello, e che quasi ad arte sembrano disposti in forma di globo, o palla. Discendono questi peli nel ventricolo mediante il lambire, che fa il vitello se stesso, o la madre, o i compagni, e giungono tali animali ad inghiottirne qualche volta con tanta frequenza, ed in tanta copia, che queste palle, o egagropile si formano in una mole così prodigiosa, che sembrano la testa di un bambino, come nelle Efemeridi di Germania si legge; ma ordinariamente però acquistano il volume di un pomo, o per lo meno di un uovo *(a)*. Non potendo il vitello, soggiunge l'autore, digerire l'egagropile, o farla passare negl'intestini, se ne sta melanconico, colla schiena incurvata, perde il ruminare, cessa dal succhiare il latte, e se ne muore, se non è prontamente soccorso (*b*): prescrive a tal effetto per ottenere la guarigione del vitello cinque once di olio di ulive unito a tre once di ranno dolce da darsi per due volte nello stesso giorno, soggiungendo; che se malgrado il rimedio la palla non passa negl' intestini, allora è segno, che il di lei diametro supera quello dell' orifizio del piloro, ossia della bocca inferiore dello stomaco (*c*), on-

(*a*) *Germanorum ephæmerides sunt, quibus relatum legimus, vituli cujusdam sextum vitæ mensem agentis in stomacho, cumulum pilorum flavidorum, & quasi arte dispositorum fuisse repertum. Hic figuram quasi rotundam, & magnitudine sua caput infantis repræsentabat, cujus originem vituli alius pilis, quem stabulo detentus ille delamberat, tribui posse censemus. Qui quidem tophi mortem vituli, nisi mactando acceleraretur, dubio procul producerent. Frequentissima enim lanionum experientia comprobata res est, quod & taurorum, & boum, & vitulorum in stomachis, cumuli pilorum jam ovi, jam pugni magnitudine reperiantur. Tantus enim est, sic Cardanus, naturæ lusus, ut vel armenta interdum esse velit ovipara. Tophos igitur, ovorum formam imitantes, pro ovis habuisse vides Cardanum.* Geoffroy loc. cit. pag. 584.

(*b*) Io credo, che sia molto difficile il poter conoscere dagli accennati sintomi l' esistenza di un' egagropile nei ventricoli di un vitello, e qualora il maniscalco avesse una tale abilità egli è impossibile per poco che sia voluminosa di farla passare con qualche rimedio nel tubo intestinale e successivamente fuori del corpo. L' ignoranza dell' Autore nella scienza Anatomica ha dato luogo a sì strabocchevole errore. Dirò col Sig. *Vitet: sans l' anatomie la medecine ne presente qu' incertitude & danger.*

(*c*) Il *piloro* nei ruminanti, che so-

de convien ben tosto mandarlo al macello per prevenire l'irreparabile morte con minor perdita *(a)*.

§. IX.

Diderot *(b)*, e l'eruditissimo Abate *Rozier* *(c)* dopo aver dato la definizione delle egagropili, ed aver fatto vedere quest' ultimo, che quelle, che sono vestite di una crosta nera, e soda, provano soltanto la loro lunga esistenza, ma non differiscono dalle altre, che sono nude, essendo amendue composte di peli, conchiudono, che parecchi Autori hanno attribuito una virtù alessifarmaca, e diaforetica alle egagropili date internamente agli uomini, ed agli animali, che altri ne raccomandano l'uso ne' morbi epizootici, e contagiosi, e che molti seguaci di *Velschio* le credono buone per il flusso di sangue, per le emorragie, per le vertigini ecc. Si può dare di più ridicolo, che l'attribuire simili proprietà alle egagropili? *N'y a-t-il pas de l'absurdité d'attribuer des pareilles vertus á des semblables productions?* *(d)*.

§. X.

Il *Ramazzini* racconta, che nell' Epizoozia dell' anno 1711 si ritrovò nel terzo stomaco de' buoi, detto dai Latini *omasus*, una massa dura, e compatta, aderente alle sue pareti, d'un odore insopportabile, la quale egli considerò come il germe del miasma contagioso. *Illud vero corpus durum, & compactum ad instar calcis, quod in omaso observatur, primum*

---

no dotati di quattro ventricoli, trovasi all' estremità inferiore dell' ultimo ventricolo detto il *coagulo*, dai Francesi *caillette*, *franche mulle*, dai Latini *obomasus*; e siccome la sede dell' egagropile è soltanto nel primo, o secondo stomaco, così non è possibile, come già abbiamo detto, che pel suo diametro possa superare l'orifizio, che comunica col terzo stomaco, passare consecutivamente per i foglietti del centopelle, e portarsi al piloro. Quel che è certo, non si sono mai trovati tali corpi negli ultimi due ventricoli, nè nel tubo intestinale, nè tampoco si sono colle feccie evacuati.

(a) Manuale del Maniscalco pag. 43. 44.

(b) Encyclopedie au mot *Egagropile*.

(c) Dictionnaire d'agricul. au mot *Egagropile*.

(d) *Rozier* ivi.

productum esse contagiosi miasmatis pro certo habeo, dum tacite sævitiem suam exercens, stomachicum fermentum labefactat, & corrumpit (*a*). Il *Lancisi*, che descrisse parimente questa Epizoozia, pretende che quella massa di fieno nera, che si è osservata nell'*omaso*, e che rassomiglia a ciò, che *Plinio* chiama *juvencarum tophus*, non sia altro, che un' egagropile formata, com'egli dice, dai peli, che gli animali portano via colla lingua nel leccarsi, e che cadono nello stomaco mischiati colla saliva (*b*).

§. XI.

Narra *Adam Jensel*, che nell'Epizoozia del 1712, che attaccò il bestiame nella bassa Ungheria, si ritrovarono nel ventricolo di più animali delle egagropili della grossezza di una noce, rivestite di una membrana molto forte, le quali con molta difficoltà si potevano tagliare (*c*).

§. XII.

Mi giova sperare, che questo tenue mio lavoro sarà gra-

(*a*) De contag. Epid. an. 1711.

(*b*) *Dissertatio historica de bovilla peste an.* 1711.

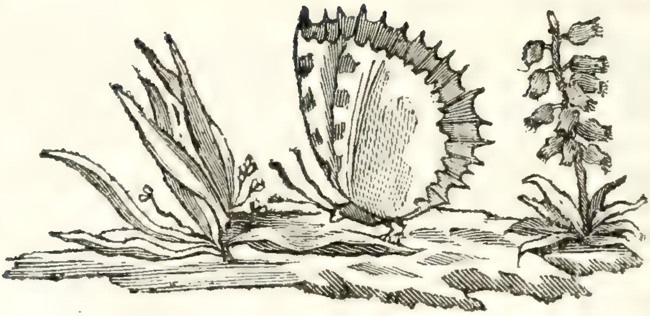
(*c*) *Constit. Epidemic. Hungariæ inferioris an.* 1712. Notisi, che le egagropili ritrovate nel ventricolo degli animali bovini in tempo di epizoozie non debbono considerarsi come una causa morbifera, come pare che siasi preteso dal *Lancisi*, e da *Adam*. Le palle di foraggio dure, appiattite, e quasi abbruciate, che ben sovente s'incontrano nei foglietti dell'omaso sì nelle epizoozie, che in molti altri morbi, possono essere qualche volta un accidente della malattia, ed altre volte la prima causa del miasma contagioso, come ha osservato il citato *Ramazzini*. Può anche accadere, che in quelle palle formate dagli alimenti induriti, e divenuti neri pel vizio de' sughi gastrici, e per l'infiammazione dell' *omaso* s'incontrino talvolta dei peli framischiati insieme se la massima malattia è comparsa nel tempo della *muda*, in cui gli animali bovini per le ragioni superiormente addotte ne ingoiano una quantità, ma non per questo dobbiamo supporre, che i peli in simili casi osservati possano aver dato origine al morbo.

Egli è costante, che le egagropili non cagionano alcun danno all'animale, salvochè per la troppa grossezza impediscono il passaggio agli alimenti, perchè io ne conservo alcune, che sono state a caso ritrovate dai macellaj nel panzone de' buoi, e vitelli stati macellati sani, sanissimi: fra le quali una se ne ritrovò di un volume considerabilissimo, la quale fu da me presentata al Sig. Marchese di *Berzesio* Brigadiere di Cavalleria, e Membro della R. Accademia delle Scienze di Torino.

dito dai Fiſici, perchè tratta di un corpo eterogeneo molto familiare ne' ruminanti, il quale ſi è dalla maggior parte degli ſcrittori creduto, che ſi formaſſe nel primo ſtomaco, nè più oltre paſſaſſe, nè foſſe capace di dare la morte, come ſi è oſſervato nel noſtro caſo.

Mi ſia dunque permeſſo, dottiſſimi, e riſpettabiliſſimi Accademici, di preſentarvi come un contraſſegno di mia ſervitù, e del mio più profondo riſpetto queſta Memoria, la quale vi ſupplico ad accettare come uno di quei lavori, che poſſono in qualche modo meritare la voſtra attenzione.

Trino 4. Marzo 1790



SEZIONE

DI UN CADAVERO.

Del Sig. Giovanni Verardo Zeviani.

NElla Storia Anatomica Medica, compilata dal *Lieutaud*, e riordinata dal *Portal*, si legge fra i casi più rari e stravaganti una Osservazione dello stesso *Lieutaud*, contenente la sezione del cadavero di un uomo gran bevitore, che morì dopo aver patiti de' dolori ricorrenti che sembravano reumatici. Trovossi in esso con istupore de' risguardanti una porzione del ventricolo entrata nella cassa del petto per un foro che era nel diaframma, a guisa d'ernia all' insù *(a)*. Nella Storia che io sono qui per narrare si espone un caso egualmente strano, e forse non più veduto: la sezione cioè del cadavero di un infelice uomo bevitore del pari, in cui trovossi la milza salita e concentrata dentro il ventricolo per una grande apertura, che era in esso, nella parte a quella risguardante.

Antonio Franzoso, di professione macellajo, uomo corpulento e pingue, ozioso, ed agitato da una forte e diuturna passione di animo, essendo nell'età sua di anni presso a sessanta, cominciò a provare di tratto in tratto de' dolori di stomaco, a guisa di una colica ricorrente: i quali in pochi giorni cedevano all' uso dell' olio di mandorle dolci, del siero di latte, e di qualche missione di sangue. Poco dopo divenne magro e scarnato, e cadè in una profonda malinconia. Allora se gli manifestò al sinistro ipocondro una dolorosa tumefazione, per cui sospettai di un mal purulento alla milza. Rifiutando ogni sorte di alimento, provato in va-

(a) Lib. 2. sect. 6. art. 3. n. 779.

no per alquanti dì per consiglio di un altro Medico l' estratto di cicuta, febbricitante e tabido morì li 28 di Dicembre del passato anno 1789.

Fu demandata da questo pubblico Uffizio di Sanità la licenza di aprire il cadavero all' esperto Chirurgo Sig. *Luigi Monterossi*: il quale poi nei seguenti termini ne presentò la relazione.

„ . . . . . Veramente è cosa rara da sapersi (come io
„ già rinvenni nello sbarro del sopraddetto cadavero) la par-
„ ticolar malattia tumorosa del ventricolo: la rottura del
„ suddetto: e più la copiosa materia marciosa e sanguinolen-
„ ta scaricata in detto viscere della milza: e l' ingresso del-
„ la milza entro il ventricolo . . . . Prima di tutto vidi il
„ ventricolo, ch' era reso scirroso e tutto ostrutto. La sua
„ figura quasi perduta e alquanto piccola; il suo colorito al-
„ terato, tendente al giallastro rossigno smorto; la cavità
„ impoverita e piuttosto piccolissima; la sua sostanza ingros-
„ sata straordinariamente. Indagata e tagliata la sua sostan-
„ za e tessitura, la rilevai vasculosa, scirrosa, contenente
„ molti corpi glandulosi, avente molta materia di qualità
„ sebacea e di colorito biancastro. Alla sua parte sinistra e
„ obbliquamente inferiormente ho veduto un pertugio fatto
„ dalla suppurazione nata dalla milza; e la milza internata
„ nel sopraddetto viscere: e le membrane erano tutte sfacella-
„ te e consunte. La materia effusa dalla milza al ventricolo
„ era in gran copia, di qualità sanguinolenta marciosa; che
„ persino si empirono li primi intestini, dimostrando il sud-
„ detto colorito. La milza, che era tumorosa e grossa fuori
„ di modo da prima, era annichilata, di colorito fosco e
„ *nogaraceo*, consunta e sfacellata, ridotta come una borsa
„ vuota, e conteneva solamente certa porzione della suddet-
„ ta materia del suo ascesso. „ Fin qui il Chirurgo.

E' cosa molto ordinaria e comune il trovarsi ne' cadaveri per forza di morbo agglutinate insieme, aderenti e congiunte viscere e parti che secondo natura sono staccate e disgiunte. Spesso il polmone o tutto o in parte si trova unito e aderente alla pleura. Qualche volta il fegato si attacca al ventricolo, o alla parete del ventre, dove se ne aprono degli ascessi all' esterno che la sua interna materia al di fuori trasportano.

portano. Questo pure succede ne' reni: i quali tal volta la loro purulenta materia generata per l'intraversatura de' calcoli tramandano dal dorso. Qui pure abbiam noi ultimamente con nostro stupore nel cadavero di un Signore morto per uno sfracellamento del sinistro rene veduta una mirabile morbosa congiunzione del rene medesimo col vicino tratto dell' intestino colon: nel centro della quale stava aperto un foro di comunicazione, che portava liberamente la marcia del rene dentro l'intestino, e cagionava una perpetua diarrea dell' infermo, la quale era purulenta: di cui non sapevano i Medici assistenti trovare una sufficiente ragione. Sembra che avvengano queste morbose concrezioni per effetto della infiammazione, qualora per essa disseccasi quella untuosa umidità che naturalmente copre e rimpalma la superficie delle viscere, per la quale conservansi sdrucciole e staccate, onde dal morbo gonfie e una contro dell' altra compresse si uniscono e internano. Per la quale stretta unione avvien altresì che il loro morbo da una all' altra passa a comunicarsi: come succede alla giornata ne' morbi infiammatorj del petto, che nel sito del polmone infiammato si trova aderente la pleura, e con esso contaminata: ignorandosi ancora dopo tante aperture de' cadaveri in quale di queste parti stesse a principio fitto il morbo.

Nel caso nostro una vita sedentaria ed oziosa in corpo pingue e di mollissima fibra, un animo inquieto, e da forte e diuturna passion d'animo ingombrato, avranno probabilmente cagionata qualche ostruzione di milza. Questa viscera era tenuta da' nostri Antichi per sede dell' affezione ipocondriaca. Ma è più giusto il dire che quella che essi tenevano per causa fosse effetto: e che infatti ne' morbi ipocondriaci non a principio ma in fine dopo lungo corso melanconico la milza venga ad ingrossarsi e a patire. In questa viscera scorre il sangue proveniente dalla vena porta assai tardo, e però tenace e concreto qual atra pece. La sua tessitura e sostanza è floscia e cellulosa, e però atta ad ingombrarsi da un sangue lento che passa: massimamente se non sia promosso il suo giro dall' azione del corpo. Queste ostruzioni però per tal causa nate sono di natura croniche e fredde, rade volte passano a farsi infiammate e a suppurare; e

ſolo ſon valevoli a produrre qualche moleſto peſo, oſtinate febbri periodiche, o gonfiamenti d'idropiſia. Ma ſe lo ſtomaco in tale circoſtanza ſi trovi, come fu nel *Franzoſo*, quotidianamente repleto e diſteſo da enorme quantità di cibo groſſolano e difficile e di vino pretto infiammante, compreſſo eſſo ſtomaco alla ſottopoſta milza, può far trapaſſare in eſſa una forza infiammante, e farla paſſare da uno ſtato di oſtruzion fredda in quello di una infiammazion vera e ſuppurativa.

Nel cadavero trovoſſi guaſto e ſuppurato tanto il ventricolo come la milza. Qual di queſte due viſcere fu la prima ad eſſere offeſa dalla infiammazione? Attendendo io al corſo primo del male, non dubito di aſſerire che fu dal principio offeſo il ventricolo: perchè prima ancora che appariſſe veſtigio alcuno di durezza o enfiagione al ſito della milza, fu travagliato l'uomo da una colica ricorrente di ſtomaco, che moſtroſſi prodotta da infiammazione dalla utilità, che recarono i ſalaſſi, gli olioſi, ed il ſiero di latte. Queſto però poco importa il definire: ſtantechè torna la coſa al medeſimo effetto, o vogliaſi dalla milza cominciato il morbo, ovvero dallo ſtomaco. La ſuppurazione in ſeguito di una o d'altra parte, o di tutte due inſieme logorando a poco a poco e conſumando le fibre, ſi è aperto da una all' altra parte un foro di comunicazione, che faceva la marcia comune.

Perchè traforato il ventricolo non caddero gli alimenti nella cavità del ventre? In un ſomigliante caſo di ventricolo traforato tale interrogazione fece il *Mezzavia* al *Morgagni*: *Cum autem eſſet in medio fere ulcere ventriculus penitus perforatus; ex me quærebat Mediavia, num cenſerem potuiſſe forte id foramen per incuriam cultro fieri, dum ventriculus eximebatur; nihil enim vel diligenti perquiſitione repertum eſſe affirmabat in ventre præter aliquid ſeri in ima pelvi, quod fortaſſe ex ventriculo dici poſſet effuſum, cum tamen in muliere perpetuo decumbente multum videretur effundi debuiſſe*. Quanto ſegue ebbe per riſpoſta dal dottiſſimo uomo: *Ego vero etſi minus veri ſimile exiſtimabam, ſi cultro lædi ventriculus fortuito debuiſſet, in ea potiſſimum ſede læſum eſſe, quæ medio ulceri reſponderet, nec forma, & magni-*

tudo foraminis, quod capax erat propemodum apicis minimi digiti, eæ viderentur quæ facile ad cultelli mucronem, aut aciem referri possent; tamen ut ipsi, mihique simul verum dignoscere cupientibus satisfacerem iterum ac tertio foraminis oras accurate inspexi. Quas cum viderem non modo callosas, sed inæquales, & quo magis extrorsum foramen pergebat, eo minorem ambitum complectentes, quæ duo certe ab exterioribus introrsum illapsus culter minime facere potuisset; non huic sed morbo imputandum esse foramen censui. Nam quod nihil effusum esset in ventrem, inde fieri potuisse quod paulatim quidem extenuata esset membranula extima, nec tamen penitus nisi extremo tempore erosa demum atque pertusa, cum videlicet moribundæ mulieris contractus & corrugatus ventriculus nihil haberet quod effunderet (a). Questa ottima spiegazione convenientissima al caso narrato non compete per nulla al caso nostro. Perchè in questo non trattasi di una piccola apertura che poco prima della morte potesse essere nell'esterior parte ancor chiusa da un resto di membrana: ma si tratta di una grande apertura capace di accogliere la sottoposta milza. Altra ragione però bisogna rintracciare a render conto perchè non sieno fuor di essa caduti gli alimenti e spanti nel ventre. La ragione di questo stranio avvenimento si può trarre dal riflettere che non in un punto solo, ma in grande estensione sarà stata la milza aderente e conglutinata al ventricolo: d'onde poi nata la suppurazione in una o altra parte, questa a poco a poco logorando la superficie di amendue le viscere s'è aperto un foro di comunicazione da una nell'altra: il qual foro certamente dovea farsi nel centro, e non ne' lati della adesione. In questa maniera il foro nel contorno era chiuso, e non dava luogo di spandersi in cavità del ventre nè alla materia purulenta, nè a quella che dentro cadeva per alimento nel ventricolo: e restava dentro la milza chiusa come dentro una borsa: o rigurgitava al ventricolo, e dopo si distribuiva agl' intestini come fu veduto e dichiarato dal Chirurgo che la trovò nel

(a) De Sedibus ec. lib. 3. epist. 29. art. 14.

cadavere in que' ſiti ſimile a ſe ſteſſa e della ſteſſa natura e colore.

Tanto avvenne nel caſo di una femmina, narrato dall' *Allero*, (*a*) nel di cui cadavero trovoſſi una forte coeſione dell' inteſtino colon al ventricolo, coll' aperto paſſaggio di una nell' altra parte, ſenza che ſi faccia menzione di alimenti, o fecce inteſtinali ſpante nel ventre; come certamente niente della copioſa fetidiſſima materia del rene creſciuto e conſunto nel cadavere del ſopra deſcritto Signore ſi ſpandeva nel ventre per il foro di comunicazione che ſtava aperto fra il rene ed il colon inteſtino.

Per qual forza, e in qual tempo la milza vuota di ſoſtanza e dentro conſunta dalla putredine è ſalita ed entrata per la morboſa apertura dentro il ventricolo? Può queſto inſolito accidente eſſere intravenuto nella reſpirazione. In eſſa riempiendoſi di aria il petto, ſi abbaſſa il diaframma, preme queſto ſopra il ventricolo, e ſopra le parti inferiori, le quali quindi urtano per ogni lato e tentano d' inſinuarſi ove trovano minore la reſiſtenza. Così in quel tempo può eſſere entrata nel vacuo ventricolo la vicina ſottopoſta milza. Ma ben anche queſto può eſſere nato facilmente in uno sforzo di toſſe o di ſtarnuto: nella preſſione de' muſcoli del ventre nell' evacuare le fecce inteſtinali, nel piegare a terra la perſona, o in qualche altra ſimile occaſione. Nè repugno ſe altri creda meglio che nato ſia queſto fenomeno dopo morte, o per lo coſtringimento che il freddo eſterno produce nella pelle, o per la ſoverchia dilatazione degl' interni ſpazj del ventre originata dalla putredine che l' aria interna gonſia e dislega. Molte leſioni ſi trovano ne' cadaveri, le quali da' meno periti ſi credono coſtitutive della malattia antecedente degl' infermi, quando ſono puri effetti di eſſa nati poco prima o dopo la morte.

(*a*) Opuſc. pathol. obſ. 23.

CATERATTA IDROMETRICA

PROPOSTA

Dal Sig. Cavaliere Lorgna.

§. I.

POchiſſime ſono le derivazioni di acqua che ſi fanno dai fiumi per uſo degli uomini, le quali non ſieno di limitata quantità, sì perchè è limitato il biſogno che n'hanno coloro che ne fan uſo, e sì ancora perchè deve avere un limite l'impoverimento del tronco, e l'obbligazione de' terreni pe' quali è forza che tragittino le acque derivate. E tanto più geloſamente ſuol eſſere preſcritta la miſura delle erivazioni, quanto più ſi moltiplicano ſul medeſimo fiume, e ſi ſuddividono nel condotto le eſtrazioni. In tre modi adoperano gli uomini comunemente per limitare queſte miſure, laſciando da parte i ſifoni galleggianti, e altre artificioſe maniere che non poſſono felicemente praticarſi e aver effetto in grande, come l'hanno in piccolo. Il primo conſiſte nel praticare delle aperture di lume determinato nelle ſponde del fiume, ond'eſca l' acqua a ſua poſta. Il ſecondo nell'armare d'impoſte di legno, chiamate dagl'Italiani paratoje, dette aperture, onde calarle e rialzarle ſecondo che ſi alza e ſi abbaſſa il fiume, perchè nell' acqua del condotto abbia ſempre luogo la medeſima altezza ſenſibilmente; e finalmente una terza maniera v' ha ancora conſiſtente nel coſtruire nel medeſimo condotto a qualche diſtanza dalla prima un' altra apertura determinata, regolando la prima ſecondo le vicende del fiume in guiſa, che ſopraſtia ſempre alla ſoglia della ſeconda apertura una data altezza di acqua, cioè al dir noſtro comune un dato battente. Del primo modo è inutile che ſi faccia parola non avendo luogo che in quelle contrade, ove tuttora ſi miſura buonamen-

te l' acqua per due dimenſioni, traſcurando il più e meno di velocità ond'è animata ſotto il più e meno di altezza che ha il fiume ſopra il medeſimo foro. Degli altri due il terzo è il più eſatto e corriſpondente al fine dell' idrometria, di cui abbiamo in Lombardia e altrove più d' un eſempio. A queſto ſi riduce pure l'artificio con cui ſi eſtrae l' acqua da' così detti *Navigli* di Milano, deſcritto del 1779 dal Sig. *Franceſco Bernardino Ferrari*, e contro di cui aveva per l'innanzi declamato a torto il fu d' altronde reputatiſſimo Sig. Ab. *Friſi*. Se qualche coſa aveſſe da deſiderarſi in ſimili derivazioni, ella ſarebbe una condizione nell'acqua interpoſta tra la prima e la ſeconda apertura più analoga a quella dell'acqua contenuta ne' vaſi a coſtante altezza ſopra i fori di efflusſo, cioè la condizione dell'acqua perfettamente ringorgata. Senza queſta uniformità di condizioni non può rigoroſamente applicarſi alla derivazione la teorica de' vaſi. Imperciocchè in tutti i caſi che ho potuto eſaminare non mi è accaduto giammai di riconoſcere in quell' intervallo, e ſegnatamente in vicinanza della ſeconda bocca, l' acqua coſtituita in iſtato di ringorgamento, come ho dimoſtrato eſſer ella ne' vaſi (Mem. della Soc. Italiana Tom. IV.), e però con la ſuperficie orizzontale e quieta ſenſibilmente (§. IV. della I. Mem. di queſto volume). Ho ſempre veduto, che un' acqua ſi affacciava alla bocca a un bel circa corrente.

§. II.

Tutto dunque conſiſte l'artificio di queſto metodo nell'alzare ed abbaſſare pazientemente l'impoſta della prima cateratta, aumentando e ſcemando il foro per tentativi ſinchè il pelo dell'acqua tocchi un ſegno ſtabilito, e ſi riduca ſopra la ſeconda apertura all'altezza modulare convenuta. Ma il magiſtero è alquanto difettoſo, perchè oltre alla ſoggezione perpetua del cateratta jo di cercare il ſegno aſpettando ad ogni moſſa dell'impoſta la permanenza del nuovo ſtato d'acqua nel caſtello, è coſa indubitata, che le piccole variazioni nel fiume sfuggono, e sfugge anche gran parte delle maggiori, ſe accadano nottetempo, o in aſſenza del cuſtode. Sarebbe dunque deſiderabile

I. Che fosse tolta interamente la soggezione di tentare, e che si riducesse l'inspezione del custode a calare od alzare l'imposta tanto nè più, nè meno, quanto contrariamente si fosse alzato od abbassato il fiume, o secondo qualche determinata proporzione cogli alzamenti od abbassamenti del fiume.

II. E molto più che l'operazione fosse fatta dal fiume medesimo senza custode per qualche facile meccanismo, sicchè ogni minima crescenza o decrescenza nel fiume inducesse da sè il proporzionato scemamento o accrescimento di luce alla cateratta. Questo è l'oggetto utilissimo cui tende a soddisfare la presente Memoria.

§. III.

Cominciamo pertanto dal supporre nota e determinata in pollici cubici la quantità di acqua che si vuol estrarre dal fiume, a cagion di esempio per ogni minuto secondo. Siccome è stato mostrato nella Mem. precedente come vadano ridotti i così detti quadretti di acqua, le oncie ecc. secondo le denominazioni de' paesi in piedi e pollici cubici, così basterà che segniamo qui con la lettera Q una tal misura ch' è proposito di derivare. Condizione del nostro assunto è, che l'apertura di efflusso riesca ad ogn' istante tanta, quanta occorre per tirar dal fiume costantemente la quantità di acqua Q sotto l'altezza che ha il fiume in quell' istante. Ed è pure condizione assunta, che nella cateratta variabile così costituita tanto solamente debba calarsi ad ogni mutazione del fiume, od alzarsi verticalmente l'imposta o paratoja, quanto nè più nè meno si fosse contrariamente alzato od abbassato verticalmente in quella mutazione il pelo del fiume, o secondo qualche determinata proporzione con dette mutazioni. E' dunque mestieri, che livellata col fondo del fiume la soglia di questa cateratta, gli stipiti abbiano una figura tale, onde possa soddisfarsi a questa condizione puntualmente. Posto ciò sia l'orizzontale AB (*Fig. I.*) la soglia di questa cateratta, e le curve AP BQ simili ed eguali rappresentino gli stipiti della cateratta. Condotta ovunque l'orizzontale IK, sia proprietà caratteristica di que-

ſte curve, che il prodotto dell' area *AIKB* da eſſe compreſa per la velocità v, onde debbono intenderſi animate le ſtille uſcenti ſotto l' altezza attuale del fiume, come *CE*, uguagli la coſtante quantità Q. Diviſa pertanto in due ugualmente in *C* la *AB*, ſia l' indefinita *CD* perpendicolare ad *AB* l' aſſe delle aſciſſe, e *C* l' origine delle coordinate; e però, preſa $CM = x$, $MI = y$, $Mm = dx$, e per m condotta la *ab* parallela alla *IK*, ſarà l' elemento dell' area $MIam = ydx$, e $aIKB = 2ydx$; in conſeguenza, eſſendo l' area $AIKB = 2\int ydx$ dovrà eſſere in qualunque ſito $2v\int ydx = Q$. Ora per ridurre a due variabili queſt' equazione biſogna trovare la relazione convenevole tra v ed x, giacchè ſul medeſimo aſſe delle x *CD* deve miſurarſi anche l' altezza variabile del fiume *CE* imminente alla ſoglia *AB*. Per la qual coſa ſia *cd* la ſuperficie del fiume altiſſimo, onde *CD* rieſca la maſſima altezza con cui può egli ſopraſtare alla ſoglia. Tutte le mutazioni del fiume dovendo accadere ſotto l'ultimo limite *cd*, ſi riferiſcano gli abbaſſamenti e rialzamenti del pelo al punto *D*, e di là in giù ſi miſurino ſopra la *DC*. Si faccia perciò $CD = f$, qualunque mutazione $DE = z$, onde ſia $f - z$ l' altezza attuale *CE* del pelo d' acqua ſopra la ſoglia, $f - z - x = EM$ l' altezza attuale dell' acqua ſopra il labbro dell' apertura *IK*, e le curve cardinali *AL*, *BN* abbiano queſt' altra proprietà, che $f - z - x = EM$ rappreſenti l' altezza dovuta alla velocità ragguagliata v delle ſtille uſcenti dalla luce ſottopoſta *IKBA*. Secondo i principj noti della Dinamica ſarà $v = \sqrt{(f - z - x)}$, e però combinando inſieme le due proprietà di queſte curve, dovrà aver luogo la ſeguente equazione

$$2\sqrt{(f - z - x)} \times \int y\,dx = Q$$

Ma per condizione del Problema alle mutazioni verticali z del fiume ſotto il pelo altiſſimo debbono riſpondere in data proporzione contrariamente le mutazioni delle altezze verticali delle luci all' emiſſario; è dunque neceſſario, che ſi determini un punto per origine di queſte mutazioni nelle aperture, com' è fiſſo il punto *D* da cui ſi miſurano le mutazioni nel fiume. Il punto *C* nella ſoglia non può eſſerlo, altrimenti ſotto l' altezza maſſima non ſarebbe preparato

alcuna

alcuna uſcita, e in tal caſo dovrebbe ſtar chiuſa la cateratta, che può eſſere, e può non eſſere neceſſario. Laonde biſogna determinare una luce, come $AGHB$, la quale, quando il fiume è altiſſimo, traſmetta la data quantità di acqua Q. Sia dunque preſa $CF = a$, e ſi traſporti in F l' origine delle mutazioni $FM = t$, che debbono corriſpondere contrariamente a quelle del fiume, onde ſarà $x - a = t$, e ſia ſtabilito ch' eſſer debba generalmente $DE(z) : FM(t) = n : 1$, ſecondo la condizione del Problema, poſto n numero intero. Per la qual coſa ſarà $z = nt = n(x-a)$. Soſtituito queſto valore di z nell' equazione fondamentale, avremo

$$2\sqrt{(f-n(x-a)-x)} \times \int y dx = Q$$

Ma $f - n(x-a) - x$ non è in fatto un' altezza libera a cui ſia dovuta la velocità $v = \sqrt{(f-n(x-a)-x)}$. Ella è un' altezza di acqua che ſopraſta al foro attuale, e di acqua che deve ſupporſi in iſtato di ringorgamento perchè poſſa cadere ſotto la legge de' vaſi, ſicchè ſotto un tal carico non hanno le ſtille uſcenti velocità dovuta a tutta l' intera altezza ſopraſtante; perciò l' equazione trovata ha biſogno di correzione. Inerendo pertanto a quanto abbiamo ſtabilito nella Mem. preced. §. §. IV. V. ſarà

$2(f-n(x-a)-x)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ la vera altezza ridotta,

e la noſtra equazione prenderà queſta forma, facendo $K = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{(\sqrt{5}-1)}$

$$2\int y dx = \frac{Q}{K\sqrt{(f-n(x-a)-x)}}.$$

Differenziando, e dividendo per $2dx$, ſi avrà l' equazione ad un ramo della curva AL della forma ſeguente

$$(A)\ldots y = \frac{(n+1)Q}{2K(f-n(x-a)-x)\sqrt{(f-n(x-a)-x)}}$$

la quale appartiene ad un' Iperboloide, di cui è uno degli aſſintoti la CD, che deſcriveremo per punti aſſai facilmente qui appreſſo.

§. IV.

Veggiamo dunque primamente della luce *AGHB* che abbiamo ſtabilito per l'acqua giunta al più alto ſegno *D*. Cominciando gl'incrementi verticali delle aperture dal punto *F*, è certo, che da *C* ſino al punto *F* è coſtante l'altezza $CD = f$, e il pelo dell'acqua *cd* non s'alza, nè ſi abbaſſa, ſtante che ſi ſuppone la luce *AGHB* traſmettere la quantità di acqua Q ſotto l'altezza maſſima. E' dunque in queſto caſo $n(x-a) = z = nt = o$, e vale per queſto tratto l'equazione

$$(A') \ldots\ldots y = \frac{Q}{2K(f-x)\sqrt{(f-x)}}$$

Sicchè poſto $x = o$, ſarà $CA = y = \frac{Q}{2Kf\sqrt{f}}$, e poſto $x = a = CF$, ſarà $FG = y = \frac{Q}{2K(f-a)\sqrt{(f-a)}}$, e prendendo per x valori ſucceſſivi da $x = o$ fino ad $x = a$, ſi troveranno le ſemiordinate intermedie della curva da *A* ſino in *G*. Dal punto *F* poi dell'aſſintoto verſo *D* vale per tutti i punti della curva *GL* l'equazione *(A)* (§. III.), dovendo creſcere in altezza le aperture ſopra il punto *F* ſecondo che ſi abbaſſa il fiume ſotto il pelo altiſſimo *cd* con la legge ſtabilita, che ſia l' incremento *FM* la $n.^{ma}$ parte del decremento *DE* del fiume, e così contrariamente, tornando a rialzarſi il fiume. Se ſia dunque *gh* il pelo infimo del fiume, e ſi prenda *Fq* parte $n.^{ma}$ del maſſimo decremento $Dp = b$, ſarà definito il limite dell'altezza verticale di tutta la cateratta, la qual altezza ſarà $Cq = a + \frac{Dp}{n} = a + \frac{b}{n}$, onde pigliando ſucceſſivamente tutti i valori per x nell'equazione *(A)* maggiori di a, e minori di $a + \frac{b}{n}$, ſi avranno le ſemiordinate intermedie della curva da *G* fino in *P*, e ſarà la ſemiordinata maſſima

$$qP = y = \frac{(n+1)Q}{2K(f-a-\frac{n+1}{n}b)\sqrt{(f-a-\frac{n+1}{n}b)}}$$

posto $x = a + \frac{b}{n}$. Costrutti similmente i rami negativi BH, HQ, la cateratta intera sarà $APQB$.

§. V.

E per la pratica ci gioveremo del modo facile che l'equazione ci addita, onde descrivere questi rami per punti con le tavole de' logaritmi. In fatto l'equazione (A') per gl' infimi AG, BH, si riduce a questa forma

$$y(f-x)^{3:2} = Q : 2K, \text{ e però}$$
$$l.y = l.Q - l.2K - \tfrac{3}{2}l.(f-x)$$

Così l'equazione (A) pe' rami GP, HQ si riduce a questa

$$y\big(f+na-(n+1)x\big)^{3:2} = (n+1)Q : 2K,$$

da cui risulta

$$l.y = l.(n+1)Q - l.2K - \tfrac{3}{2}l.\big(f+na-(n+1)x\big),$$

onde non può avervi uomo appena iniziato in sì fatte materie, che non possa secondo l'occorrenza descrivere sopra un cartone entrambi i rami della nostra curva, che debbono essere gli stipiti della cateratta, perchè dall' artefice sieno poscia in pietra o legno incavati sull'esemplare facilmente.

§. VI.

La lettera K è già determinata, ed è uguale alla frazione $\frac{65}{96}$ assai prossimamente. E quanto alla lettera a, cioè all' altezza CF della luce che trasmette la quantità di acqua Q sotto la massima altezza del fiume, ella è in arbitrio nostro. Ma siccome la posizione della soglia è sempre determinata da detta altezza massima $CD = f$, essendo $AB = 2CA = \frac{Q}{Kf\sqrt{f}}$ così potrebbe farsi dipendere l'altezza $CF = a$ dal valore

convenevole che si volesse dare alla massima larghezza della cateratta

$$PQ = 2\,qP = \frac{(n+1)\,Q}{K(f+na-(n+1)x)\sqrt{(f+na-(n+1)x)}},$$

disimpegnando il simbolo a dall' equazione. Gioverà però sempre il dargli un piccolo valore relativamente all' altezza f, affinchè riesca la cateratta di discreta ampiezza, influendo questo valore essenzialmente in quello delle ordinate della curva.

§. VII.

Ed ecco la cateratta idrometrica proposta nel titolo di questa operetta. Imperciocchè incavata che sia la figura $PABQ$ (Fig. I. II.) in pietra o in legno, e murato l' emissario con questa bocca armata d' imposta che s' alza ed abbassa pe' suoi canali secondo il costume, s' intende facilmente come vada moderata la luce secondando la condizione del fiume. Immaginiamo segnata verso il fiume la scala delle sue mutazioni (Fig. III.) dal punto sommo D fino all' infimo p; bisogna contrassegnarne un' altra qF, nella quale sia notato il cammino della paratoja contrariamente dal punto infimo F fino al sommo q per modo che, come Fq deve essere la $n.^{ma}$ parte di Dp, così ciascun segamento della Fq riesca la $n.^{ma}$ parte della corrispondente mutazione del fiume segnata nell' altra scala. Come per esempio, se le mutazioni nel fiume dovessero essere sempre doppie delle mutazioni contrarie nella paratoja, sicchè per ogni misura di abbassamento o rialzamento nel fiume dovesse contrariamente rialzarsi o abbassarsi di mezza misura la paratoja, bisognerebbe prendere per seconda scala la qF metà della Dp, e dividerla in tante parti eguali in quante fosse divisa la Dp, e segnare le divisioni della medesima qF cogli stessi numeri della Dp, ma contrariamente posti. Così essendo il fiume al punto sommo D, la sommità o altro punto fisso della paratoja dovrebbe essere in F, perchè il labbro inferiore fosse nella linea GH (Fig. I.); e trovandosi il fiume in p, il punto fisso della paratoja dovrebbe essere in q, e così degli

altri punti intermedj, ben intendendosi, che quando non si volesse trasmettere acqua nelle massime piene, basterebbe calare la paratoja oltre il punto F, e farla riposare su la soglia AB.

§. VIII.

E' dunque soddisfatto il primo assunto di costruire una cateratta, che trasmetta in ogni stato del fiume la stessa quantità di acqua Q, senza necessità che la si governi a tentoni, ma sì bene per determinate misure abbassando e alzando la paratoja secondo le condizioni del fiume. E' raro il caso, che tanta sia la differenza tra la massima e minima altezza, onde, per non dar luogo a cateratta di smodata elevazione, convenga assumere per n numero maggiore del 4, o del 6; anzi ne' moderati canali potrebbe anche accadere, che tanto bastasse calare o alzare la paratoja, quanto nè più nè meno si fosse alzato od abbassato il fiume. Ma già la regola nostra è fatta per tutti i casi.

§. IX.

Resta ora che indichiamo, come potrebbe ottenersi, che anche senza custode, per mezzo di un facile meccanismo, obbedisse la paratoja da sè alle mutazioni del fiume. Ancorchè io estimi, che la pratica possa e debba contentarsi del modo sopra esposto, il quale non altro richiede dal custode fuorchè un momento di osservazione alla scala del fiume per collocare al segno corrispondente la paratoja; ciò non ostante, non essendo impraticabile quello pure che son per esporre, mi fo qui a dichiararlo per soddisfare anche al secondo assunto. Supponghiamo pertanto conosciuto il peso assoluto della paratoja compiuta, che diremo P, e sia P' la $n.^{ma}$ parte del peso P, essendo n il simbolo adoperato qui innanzi per gli abbassamenti e alzamenti della paratoja relativamente alle mutazioni verticali del fiume. S' intenda sospesa la paratoja A ad un sistema di carrucole BB (Fig. IV.), tante di numero quante occorrono, secondo i principj della Statica, perchè il peso $P' = P : n$ applicato in F faccia equilibrio

con la paratoja o col peso P, ch'è cosa facile da conoscere. Messa a suo luogo la paratoja con le taglie, si sperimenti quanto debba aggiugnersi al contrappeso P', onde alzare effettivamente la paratoja immersa nell'acqua verticalmente, come deve stare, vincendo gli sfregamenti, la rigidezza delle funi, e la resistenza dell'acqua che le sta accollata, e sia p la giunta necessaria. Ciò supposto, si prepari una cassetta di legno a conca, la quale gravata oltre al proprio peso anche dal peso p galleggi tuttavia sull'acqua; di tale forma però che possa contenere nella sua capacità il peso $P'+p$, e la si commetta al fiume come in DD. Applicato ora alla fune in F il contrappeso unito $P'+p$, e riposto nella conca, è certo che crescerà l'immersione naturale della medesima per conto del solo peso p, giacchè il peso P' è in equilibrio col peso della paratoja, e non può agire sul galleggiante. In questa condizione di cose non può nè la paratoja alzare il contrappeso cioè abbassarsi, perchè è contrabbilanciata dal peso P', nè il contrappeso alzare la paratoja, perchè la giunta p è tenuta in equilibrio dall'acqua scacciata coll' immersione della cassetta. Dunque tutto si comporrà in equilibrio. Si alzi ora per giunta d'acqua il fiume, o si abbassi per iscemamento, e sia m la mutazione verticale; bisogna che la paratoja si abbassi da sè, o si alzi per l' intervallo verticale $\frac{m}{n}$. Imperciocchè per natura delle taglie è mestieri, che per un tratto di fune corso dalla resistenza verticalmente, cioè nel caso nostro dalla paratoja, cammini per contrario verso per n tratti verticali di fune la potenza, vale a dire nel nostro caso il galleggiante col contrappeso, come richiede per appunto la ragione reciproca de' pesi equilibrati. Stabiliti pertanto nel dato emissario i limiti delle mutazioni estreme del fiume per un verso, e delle reciproche mutazioni della paratoja per l' altro nelle debite respettive posizioni, sarà facile l'adattare al caso, secondo il numero delle carrucole, la lunghezza della fune che occorre per l'effetto contemplato. Ben inteso che sia questo artifizio, che è de' semplici, non si troverà impraticabile, che il fiume possa andar moderando da sè le luci nella nostra cateratta, perchè venga trasmessa in ogni caso la data quantità di acqua Q.

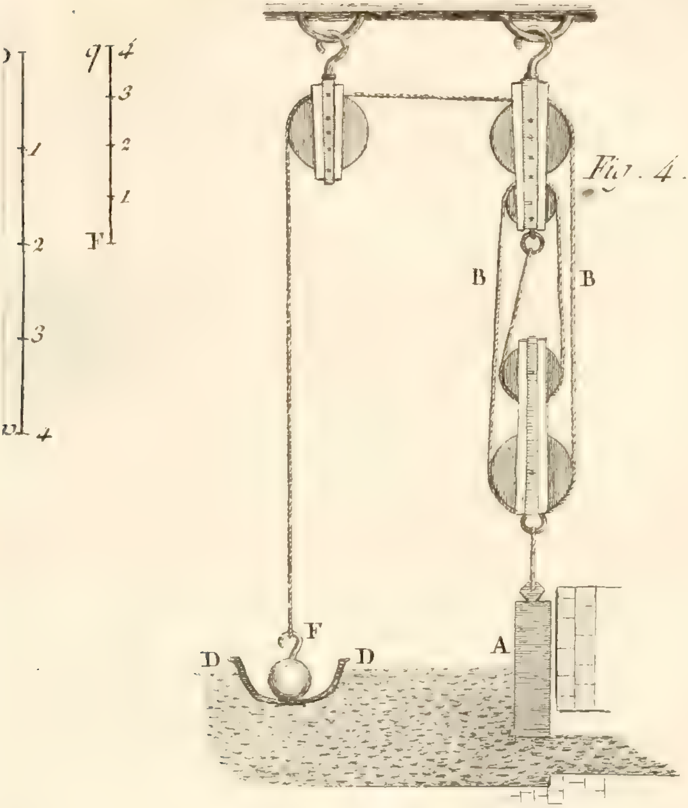
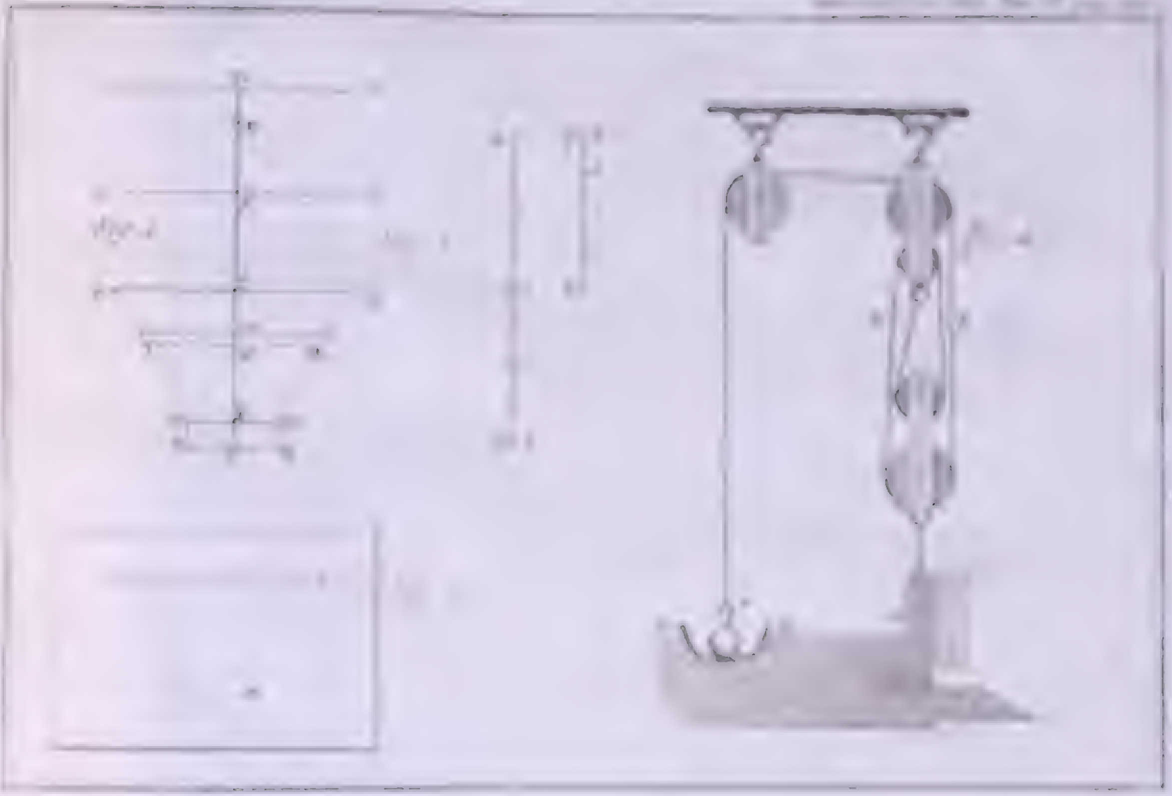


Fig. 4.



§. X.

E' ſuperfluo l'avvertire, che, come per l' altre cateratte comuni, è pur neceſſario per la noſtra, che l'acqua vi ſi accolli in iſtato di ringorgamento, e non mai corrente: altrimenti la teorica de' vaſi non vi può aver luogo. E ſimilmente è d' uopo che ſi oſſervi, ſe l' acqua uſcente ſia libera, o ſe debba sboccare ſommerſa; nel qual caſo biſognerà introdurre le correzioni indicate nella ſeconda delle Memorie precedenti.

CONTINUAZIONE

DELLE OSSERVAZIONI ANATOMICHE E PATOLOGICHE SUGLI ORGANI UROPOIETICI

Del Sig. Vincenzo Malacarne

Al Sig. Cavaliere D. Giovanni Alessandro Brambilla.

Illuſtriſſimo ed Eccellentiſſimo Signore

Le poche oſſervazioni qui unite, che ho la premura di aggiungere alle pubblicateſi già nel terzo volume di queſta Filoſofica Società, oltre all' aggirarſi ſopra lo ſteſſo argomento, faceano parte del diſcorſo a V. S. Illuſt. indirizzato, dal quale di buon grado le ſvelſi, e ne ho teſſuto il preſente breve ragionamento, affinchè ſempre più chiara ed evidente ſi rendeſſe la verità d' un punto di Patologia ceruſica ſtato con tutta la maeſtria toccato dal chiariſſimo Sig. Don *Antonio Scarpa* Profeſs. di Notomia, e di operazioni ceruſiche, nella promozione d' alcuni valoroſi ſtudenti di queſta R. Univerſità Paveſe al magiſtero in Cirugia. Io abbracciai ſomigliante occaſione toſto che mi ſi preſentò, e reſi omaggio al vero, e all' oculata perizia del Collega, perſuaſo, che ſe l' Illuſt. S. V. diſgradite non avrebbe queſte oſſervazioni com' erano prima, degneraſſi pure d' accoglierle colla benignità ſua conſueta quali hanno l' onore di preſentarleſi, venendo eſſe dalla mano ſteſſa, che diretta dal cuore ſi pregierà ſempre di manifeſtar all' univerſo quanto giuſta ſia e quanto grande la riſpettoſa gratitudine, che a V. S. Illuſt. debbo, ed inalterabile profeſſo.

Dell'

Dell' aderenza de' calcoli urinosi non solo alle pareti interiori della vescica, ma sì a quelle degli ureteri.

Se le osservazioni di fenomeni rari nelle scienze, e nelle arti, comunicate da persone ingenue ad uomini atti a valutarle, capaci di trarne corollarj sempre più vantaggiosi al pubblico, riscuoter ne debbono applauso e lode; quelle, che concernono la cirugia tendendo al ristabilimento della sanità, siccome ne rendono più comune la salutare applicazione a' casi ardui, che si presentano tutto dì, non solo meritano sterili encomj, e inoperosa approvazione, ma debbono in special foggia animare i Professori, ed i pratici a corroborarle colla sincera esposizione di quanto occorse loro d'analogo, e di valevole a convincer anche i più increduli della sussistenza e solidità dell' opinione di chi a forza d'assiduità, e di fatica si ridusse a termine di palesar dimostrate simili verità. Non ho io dunque motivo di sperare, N. N. che sia per esservi aggradevole, in questa lieta occasione del congratularci noi tutti con i qui presenti ornatissimi giovani del Magistero della Cirugia maggiore meritamente decorati, il mio assicurarvi a confermazione di quanto non ha guari vi fu in questo orrevolissimo luogo medesimo indicato circa l'aderenza d'alcuni calcoli alla sostanza interiore della vescica, questo fenomeno essere stato incontrato più volte anche da me? Ed affinchè io non sembri diffidare della vostra urbanità, ed avere men giusto concetto della vostra laudevole curiosità intorno ad oggetto di sì grande importanza, quasi che l'una e l'altra di queste vostre esimie doti abbisognasse d'eccitamento, senz' altro preambolo passo alla sposizion genuina de' fatti.

Il primo calcolo aderente al parete interno della vescica urinaria mi si è offerto in un sessagenario, appunto nell'aspetto che ravvisar potete nella centuria delle Osservazioni Anotomico-Cerusiche del *Ruischio* alla fig. 62, che accompagna la 78. osservazione. Un grosso calcolo irregolarmente ovale, il cui maggiore diametro superava diciotto linee, il minore undici, pendeva da un picciuolo piramidale carneo-membranoso grosso come il ceppo d'una penna or-

dinaria da ſcrivere; lungo quattro linee: queſto picciuolo introducendoſi nel calcolo aſpro, e bernoccoluto, ſtato ſpaccato appunto per meglio conſiderarne la ſabbrica interiore, mantenea la propria carnoſità, e diventava ovale anch' eſſo, ed ottuſo per lo tratto di quattro altre linee verſo il centro del tubercolo.

Grave ed oſtinata corizza di veſcica avea ſofferto da più anni l' infermo, ed abbondante fluſſo di muco tenaciſſimo per l' uretra, eſalante un odor ammoniacale inſoffribile; era ſtato moleſtato da teneſmi, che ſi calmavano col mezzo de' ſemicupii; abbandonati i quali negli ultimi meſi del viver ſuo, ſi riſvegliavano ſempre più moleſti due volte almeno alla ſettimana. Ingroſſarono altresì le emorroidi attorno all'ano a diſmiſura, quattro delle quali ſpalmate di fetido muco ſuperavano in diametro il pollice; e ſi reſero incomodiſſime perchè ſi traſſero dietro porzione dell' inteſtino che a ſtento potevaſi ricomporre. Soſpettai ſubito, che nella veſcica s' annidaſſe calcolo, e vi avrei pure introdotto il catetere ſe l' ammalato già quaſi conſunto, e troppo tormentato dal proprio male, che lo riduceva all' agonia, ſe i timidi parenti, e ſe più efficacemente ancora la mia perſuaſione, che il convincermi di tal verità non ſarebbe rieſcito di verun anche menomo vantaggio all' infelice, non me ne aveſſero diſtolto. Morì egli infatti due giorni dopo, e ſparatone al cenotafio il cadavere, trovammo dalle tuniche ſpeſſe, e fibroſe della veſcica pendente il calcolo quale già vi deſcriſſi, e il collo del ſacco largamente infiammato.

Un vecchio Militare col proprio valor elevatoſi ad uno de' più alti gradi nelle Truppe del Re di Sardegna, era ſtato già da tre anni attaccato da ſintomi analoghi a' deſcritti, e minacciato di conſunzione, eſſendo gravemente moleſtato da erpete croſtoſo alle gambe, portoſſi alle R. Terme Aqueſi l' anno 1776 perſuaſo d' aver la pietra, e di poter dall' uſo interno ed eſterno di quelle acque trar ſollievo per amendue gl' incomodi. Volle eſſervi diretto da me, e col groſſiſſimo catetere, ch' egli era avvezzo d' introdur da ſe ſteſſo, mi fece ſentir la pietra ſempre però dirigendo il becco dello ſtrumento in alto aſſai, ed a ſiniſtra. Mi parve

ſpinoſa perchè il catetere cacciatoſi tra le diſuguaglianze di tale ſuperficie ſembrava trarſela dietro . e ſollevarla ne' movimenti ſuoi. Usò per 24 giorni circa dodici libbre d'acqua termale al fontanino ogni mattina, impiegandovi preſſochè due ore tra il bere ed il paſſeggiare: usò i fanghi a mezza vita la ſera: tenne a piccioli pezzi in bocca ogni dì mezz'oncia circa di manna cannellata affinchè gli ſerviſſe di becchico, e di ſciogliente; nè era ancora al ſediceſimo, che lo ſpurgo delle mucoſità dall' uretra era già ridotto a men del terzo, le turgidiſſime emorroidi appaſſite, nette le gambe, vivace l' appetito, viſpo e vegeto il corpo tutto. Reſtituitoſi alla Capitale ſoffrì molto per lo ſcuotimento della vettura, e n'ebbe per l'uretra in meno di due meſi oltre a buon numero di bricciole dodici cubetti di calcolo gialli, liſci, lucenti, il peſo de' quali tra tutti era 58 grani. Lo conſòlai ſcrivendogli che ſovente le acque termali avevano contribuito allo ſcomponimento de' calcoli, intanto gli replicai il ſuggerimento di cangiare in analeptica l'antica ſua dieta tutta brodi medicati, decozioni, ſaponate, polveri litontritiche; e ſimili, ed egli docile ſi valſe da poi coſtantemente d'ottimo brodo di coſcia di vitello e di pollaſtra, di gelatina conſiſtente non acida, ben fornita di raſchiatura di corno di cervo, e tanto alla primavera quanto all' autunno degli anni ſeguenti preſe per 25 giorni il brodo di vipera; il qual regime ſoſtenne l' ottenuto miglioramento sì a riſguardo del ſalino, e delle emorroidi, che relativo al corpo morboſo della veſcica, dalla quale gettava di tant' in tanto nuove bricciole di cui non tenne conto, anzi atteſe con molto minor incomodo alle ſerie faticoſe ſue incombenze, e impinguò. Solo il cavallo, e la vettura gli rammemoravano il calcolo per li dolori che riſvegliavano, e l'abbondante muco, che ne ſpremeano dalla veſcica; aſtenendoſene gioiva d'una calma invidiabile da chiunque aveſſe lo ſteſſo vizio organico. Evacuava i ſoliti cubetti, di ſoſtanza calcareo-terreſtre, giallaſtra, lucente, e ne' tre ultimi anni trenta ne conſervò groſſi poco più di due linee, che peſavano in tutto 162 grani. Aſſiſtendo agli eſercizj militari in un dì temporaleſco del 1786, e dopo d'aver ſofferto gran calore a' raggi del ſole, ſorpreſo da fredda pioggia con impe-

tuoso vento, piuttosto che valersi della carrozza che gli si offriva, amando meglio ritirarsi a piedi, sorpreso da gravissima infiammazion di petto in sette giorni morì. M' industriai tanto, che ottenni di sparارne il cadavero, la vescica del quale premeami grandemente di osservare, e la trovai molto meno spessa, men fibrosa della precedente ora descritta, nulla infiammata, occupata da un calcolo aderente al parete destro per una larga base, che per lo spazio di sedici linee interessavane la membrana interna come le lische di sostanza calcarea interessano l' interior tunica delle arterie nella litiasi loro.

Di questa specie d' incrostamento, d' intonacatura calcare ho già fatto cenno, per ciò che risguarda la vescica urinaria, nelle mie osservazioni sugli organi uropoietici stampatesi in parte nel IV. Vol. delle Mem. della Società Italiana di Verona pag. 120 favellando di una donna in cui le ho vedute: là interessavano pur anco la tunica fibrosa, mentre che qui la base del calcolo, o del mucchio di calcoletti cubici, era soltanto aderentissima alla tunica interiore, movibile per ogni verso sulla fibrosa medesima, verso la quale tutto era liscio: allo 'ncontro erane disuguale la superficie interna, coperta come da una cristallizzazione dell' acqua giallognola della dissoluzion del sale marino; l' altezza maggiore, o per meglio dir la spessezza della quale concrezione appena superava cinque linee.

Quattro isolette vedemmo intorno alla principale, la maggior delle quali irregolarmente ovale era larga sei linee, spessa due; la minore non superava un cece. Sarebb' egli stato per avventura fra queste, che il becco del catetere impegnavasi nelle da me fatte esplorazioni? Eran elleno già tali dieci anni addietro? Non sarebb' egli sgranellato, scommessosi il calcolo maggiore dopo l' uso delle acque termali, per l' azion delle medesime opportuna a disciogliere il glutine, onde collegati erano insieme i cubi, de' quali era fatto il calcolo? Io veramente ho veduto sopra molte altre pietre di vescica urinaria umana spiegarsi attività simile delle acque Termali d' Aqui, alle quali ben mi persuado che tutte le analoghe, le congeneri, vanno in questa prerogativa del pari. Ho veduto parimente molte altre pietre non aderenti, ma

contenute nelle vescichc umane, composte di cubi, di conj troncati all' acuta loro estremità, di parallelogrammi solidi più o meno grandi, congegnati insieme come ne' preziosi lavori detti a mosaico: e se alcune erano tutte cubi tanto all' esterno quanto al nocciolo, taluna pur ne vidi tutta cubi elegantissimi all' esterno, tutta conj, con mirabile artificio congegnati d' intorno ad un nocciolo ovale, qual è la bellissima, e forse unica, grossa come un mezzano uovo di struzzo, che ha (se la memoria non m' inganna) diciott' oncie di peso di color bianco, i cubi della quale sono disposti in due strati concentrici, esposta all' esame de' curiosi nel Gabinetto del Sig. *Giuseppe Buzzani*, Cerusico della R. Corte di Torino, Cer. Prim. dell' Ospedale della Religione de' Ss. Maurizio e Lazaro. Queste, s' io non erro, costituiscono una specie di calcoli diversa da quella in cui tutta è spinosa la superficie; dalla seconda ove tutto è confuso, tutto irregolarmente conglutinato; e dall' altra che comprende i calcoli fatti a strati circolari, ovali, ellittici, o cicloidei, quali sono quelli della bellissima raccolta, che nel lodato gabinetto del *Buzzani* si ammira. Di quest' ultima specie eccovi i frammenti d' un calcolo, che ha dato luogo alla seguente osservazione, che fra le altre particolarità, per cui la giudico degna della vostra cortese attenzione, mi sembra a proposito per confermar quanto si è detto finora della possibilità dell' aderenza de' calcoli alla vescica, posto che dimostra la possibilità di tale aderenza al pariete dell' uretere, non già alla sua inserzione nella vescica, ma nella più alta parte del medesimo.

Pietro Marchino d' Aqui figlio d' un calzolajo di quella città, secco, vivacissimo giovine di diciassette anni, da otto soli mesi prima ch' io fossi chiamato a visitarlo per gravi dolori di ventre, accompagnati da brucior, e difficoltà d' orinare, onde i parenti sospettavano, che avesse contratto qualche mal venereo, fu trovato da me con tutti i sintomi della pietra nella vescica, la esistenza della quale venne assicurata dallo scrosciar essa contra al catetere introdotto per l' uretra. Gli feci l' operazione col mezzo del taglio laterale, e ne estrassi facilmente due calcoli simili a due amandorle col guscio, lisci, l' un de' quali aveva una convessi-

ad una delle sue faccie, contro la quale vedeasi ch'era stato quasi articolato il calcolo compagno, che appunto avea un' eminenza conformissima alla predetta concavità. Guarì l' infermo della ferita in quindici giorni, e già tutta l' orina usciva per l' uretra, e stava in letto soltanto per lasciar meglio assodar la cicatrice; quando verso le dieci della mattina del 16 giorno vengo avvisato, che sorpreso da violentissimi dolori colici, dopo stravagantissimi divincolamenti, il povero giovine era morto. Sommo fu lo stupor mio, e non prestando intiera fede alla relazione mi portai al letto dell' infelice, che trovai già coperto del solo lenzuolo, colla mesta compagnia d'un lumicino a' piedi del letto. Era ancor caldo quel corpo, le membra ancora flessibili, la faccia pallida sì, ma non di pallor di morte, e tanto meno le labbra, alle quali accostando il cerino acceso mentre che coll' altra mano esaminavane i moti allora insensibili del cuore, de' giugoli, e de' polsi, m' avvidi dal tremolio, che pur di qualche respiro il giovinetto ancor godeva, sicchè fattegli fregar le coscie, le gambe, le braccia, e irritatone il naso coll' introdurvi tabacco, e introdottogli aceto gagliardo in bocca, ordinando che si ricoprisse, a poco a poco gli si risvegliarono e i movimenti del cuore, e que' de' polmoni.

Dopo alcuni sorsi di vin generoso incominciò a perder involontariamente l'orina, il che dimostrò che noja gli recava, e continuò a pisciare profusamente per quattr' ore continue; non ricusò nè il brodo, nè la panatella che gli si diedero alla giornata, e nelle tre seguenti che sopravvisse, ma quasi paralitico, ed afono, e senza determinata volontà, nè desiderio, nè avversione alcuna dimostrando.

A misura che le orine colavano si abbassava, s' ammolliva l' abdomine ch' io aveva trovato gonfio e duro; nè queste cessarono di colare fin che il giovinetto non fu morto davvero.

Feci portar il cadavero nella Sala di Notomia ch' allora io aveva nello Spedale, ed oltre agli studenti miei, numero grande vi concorse di spettatori d' ogni condizione, ansiosi di vedere e la cicatrice interiore della vescica venti giorni prima stata da me aperta, e il fonte di quelle orine

che in sì gran copia erano uscite da quel corpo; e quale non fu lo stupor mio, o Signori, quando all' apertura dell' abdomine trovai la vescica di color cremesino, spessissima di tuniche, grossa e figurata come uno de' più grossi uovi d' oca, durissima al contatto come se avesse contenuto un grosso pezzo di marmo! Prima d' aprirla sgombrai dalle intestina tutto l' abdomine, e alcuni degli allievi miei credettero, che avessimo dimenticato un gran pezzo dell' intestino colon al vedere specialmente l' uretere destro pieno d' acqua simile al siero di latte depurato, ondeggiante, che per tutta l' obliqua sua estensione avea un pollice e mezzo di calibro. Anche la pelvi era amplissima, e avea principio da un rene lungo sette pollici, largo quattro, spesso quattro, diviso in due caverne, una piena di siero verso la pelvi, l' altra piena di liquame cremisino in cui erasi ridotta quasi tutta la sostanza corticale e tubulata: in questa trovavansi tre calcoletti irregolarmente simili a capi di chiodi, o funghetti, col loro gambo, oltre a bricciole qua e là alle pareti del sacco aderenti.

Quantunque l' uretere sinistro fosse più grosso del pollice anch' esso, ed avesse molto capace la pelvi, quel rene però non avea vizio: ciò non ostante separammo tutto, reni, ureteri, vescica, e pene dal rimanente del cadavero affine di esaminar più facilmente colla dovuta diligenza ogni cosa a parte a parte. Sicchè incominciammo a spaccar la faccia anteriore della vescica, al di sotto delle tonache spesse fibrosissime della quale trovammo intiero il calcolo, che qui vedete, strettissimamente abbracciato dal sacco istesso sì che incontrammo qualche pena ad estrarlo.

Esso era tutto liscio ad una faccia, ed a' contorni; tutto scabro, e come coperto di cemento biancastro irregolare all' altra faccia, del che non sapevamo trovar la ragione, e forse l' ignoreremmo ancor adesso se, dopo esaminato quell' ampio uretere, spaccandolo per la sua lunghezza fino alla superior estremità della pelvi, non avessimo trovato il parete interno della medesima, propio nel sito dove ha principio l' uretere, coperto d' un cemento simile, molto spesso, che in larghezza e in figura corrispondeva esattissimamente a quello della detta faccia del calcolo. Quindi si venne in

cognizione del motivo delle orribili convulſioni, e della colica, che precedettero la asfiſſia, e la riſoluzione ſimile alla morte, perchè ſtaccatoſi quel groſſo calcolo dal ſito dov'era ſtato chi sa da quanti anni aderente, nel diſcendere per l'uretere, e nel farſi ſtrada verſo il cavo della veſcica per l' obbliquo tragitto, che fa l' uretere affin di penetrarvi attraverſo alle tuniche, ſi capiſcono agevolmente gli ſpaſimi atrociſſimi, che dovettero tormentar quell'infelice; ſi capiſce quanta urina ſia ſtata ivi tratta dallo ſtimolo, dalla irritazione, intercetta nel ſuo corſo mentre che durò la convulſion della veſcica contro all'oſpite ſuo novello non indifferente, il quale per penetrarvi dilatò l'orificio inferior di quell'uretere a ſegno, che aveva ancora un pollice di diametro quando lo eſaminammo alla faccia interna di quella veſcica.

Ecco l'eſempio d'un altro calcolo aderente, non incaſtrato, tanto più ſtrano quanto più ſembra che il declive del ſito, e il proprio peſo avrebbero dovuto opporſene e all'adeſione, e al quaſi enorme accreſcimento. E queſto baſti a dimoſtrar ſempre più evidentemente darſi calcoli aderenti al pariete interno de' canali uropoietici, e a perſuadervi, ornatiſſimi Giovani, che la natura ſi compiace talvolta di complicar le malattie per abbattere il noſtro orgoglio, ma che l'aſſiduo eſplorator de' fenomeni, ch'eſſa complicatiſſimi preſenta, perviene a trarne luce ognor più chiara per finalmente condurſi nello ſcioglimento di tali complicanze, e ad utilità più generale inſenſibilmente dirigerle, nel che conſiſte il fine primario di tutte le oſſervazioni anatomiche, e patologiche, e cliniche; ad intraprender le quali con alacrità e ſenza prevenzione, che abbiate così diſtintamente meritato oggi d'avere per noi aperta ampliſſima ſtrada, io con tutta queſta riſpettabiliſſima Aſſemblea di vero cuor mi rallegro, e a generoſamente inoltrarvici, e a trarne copioſi frutti, a comune iſtruzione opportuni, quanto ſo e poſſo il più, caldamente vi eſorto.

CONSIDERAZIONI

SOPRA UNA MANIERA DIVERSA DA QUELLA CHE SEGUE L' EULERO, *DI TRARRE DAL CIRCOLO LE QUANTITA' TRASCENDENTI CHE ALLO STESSO APPARTENGONO; E DIMOSTRAZIONE D'UN TEOREMA ANALITICO.*

Del Sig. Francesco Pezzi

Presentata

Dal Sig. Leonardo Salimbeni.

Le operazioni dell'analisi finita non meno che infinitesimale dimandano continuamente il soccorso delle quantità trascendenti, le quali a' tempi nostri consistono nelle sole quantità logaritmiche e circolari; ma quanto frequente ed utile, altrettanto dilicato e pieno di pericolo n'è l'uso: che se per avventura questa mia espressione sembrasse ardita di troppo, mi farei allora a ricordar solamente la tanto famosa quistione intorno ai logaritmi dei numeri negativi; quindi è che non si dee trascurar mai di fare ogni benchè piccolo passo, il quale vie maggiormente c'inoltri a ben conoscere l'indole ed il valore delle anzidette quantità. Questa riflessione mi ha dato il coraggio di presentare all'Illustre Società Italiana il seguente tenue lavoro, ad oggetto di rischiarire un punto d'analisi che forse sembrerà dilettevole ed interessante.

1. Nell'opera immortale che ha per titolo *Introductio in Analysin infinitorum*, il cui I. Tomo io ho trasportato in lingua Francese (*a*), il dottissimo *Eulero* ha trattato diffusamen-

(*a*) V. „Introduction à l'Analyse des „ infiniment petits de *M. Euler* tra- „ duite du latin par *M. M. Pezzi* & „ *Kramp*. A' Strasbourg aux dépens „ de la librairie Academique 1786.

te delle quantità trascendenti; ed al capitolo VIII. intitolato *de quantitatibus transcendentibus ex circulo ortis* il lodato Autore vi getta i fondamenti del vasto calcolo de' seni e coseni, e vi spiega le maravigliose trasformazioni conosciute da tutti i Geometri della somma o differenza delle quantità esponenziali imaginarie in seni e coseni d'archi reali, come ancora quelle degli archi reali in logaritmi di seni e coseni moltiplicati dall'imaginario. Ora affine che il lettore vegga tosto lo scopo che qui mi sono proposto, mi sia lecito di richiamargli brevemente a memoria il metodo usato da quel grand' uomo onde ottenere le mentovate utilissime trasformazioni. Egli prende a quest' oggetto i fattori del I. membro dell' equazione $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ in questo modo $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$, e facendo poi il prodotto di questi altri due $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, ha $(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos z \cos y - \sin z \sin y + \sqrt{-1}(\cos y \sin z + \sin y \cos z)$, e ponendo mente che $\cos y \cos z - \sin y \sin z = \cos(y+z)$, e $\cos y \sin z + \cos z \sin y = \sin(y+z)$, il prodotto precedente gli diviene $(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z)$. Nello stesso modo $(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z)$.

E $(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y+z)$: d' onde siegue dopo aver posto $x = y = z$, prima $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$, e poi $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1}\sin 3z$, e quindi generalmente $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$

La quale formola risoluta in due per mezzo dell' uno e dell' altro segno $\pm$, gli somministra per addizione e per sottrazione,

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}, \ldots (1)$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}, \ldots (2)$$

Le quali sono per l'appunto quelle formole che, trattate dalla mano maestra del nostro celebre Autore, conducono alle indicate trasformazioni.

2. Ma or qui nasce la curiosità di sapere, perchè $\sin z + \sqrt{-1}\cos z$, e $\sin z - \sqrt{-1}\cos z$ essendo al pari di $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$ e $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$ i fattori del primo membro dell'equazione $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, l'Illustre *Eulero* abbia fatto uso ne' suoi calcoli dei secondi anzi che dei primi?

Per trovare la ragione di tale preferenza, cerchiamo a quali conseguenze l'avrebbono condotto i primi fattori $\sin z + \sqrt{-1}\cos z$ e $\sin z - \sqrt{-1}\cos z$.

Si ha $(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)(\sin z - \sqrt{-1}\cos z) = 1$; e $(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)(\sin y + \sqrt{-1}\cos y) = \sin z \sin y + \sqrt{-1}(\cos z \sin y + \sin z \cos y) - \cos z \cos y$. Ma $\sin z \sin y - \cos z \cos y = -\cos(z+y)$, e $\cos z \sin y + \sin z \cos y = \sin(z+y)$; dunque $(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)(\sin y + \sqrt{-1}\cos y) = -\cos(z+y) + \sqrt{-1}\sin(z+y)$.

Si troverà nello stesso modo $(\sin z - \sqrt{-1}\cos z)(\sin y - \sqrt{-1}\cos y) = -\cos(z+y) - \sqrt{-1}\sin(z+y)$, quindi riunendo i due casi, $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)(\sin y \pm \sqrt{-1}\cos y) = -\cos(z+y) \pm \sqrt{-1}\sin(z+y)$; dunque ponendo $z = y$, si ha $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^2 = -\cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$: in simile guisa si troverà $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)(\sin y \pm \sqrt{-1}\cos y)(\sin x \pm \sqrt{-1}\cos x) = -\sin(z+y+x) \mp \sqrt{-1}\cos(z+y+x)$; dunque supponendo $x = y = z$, si ha $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^3 = -\sin 3z \mp \sqrt{-1}\cos 3z$.

Se si fa allo stesso modo il prodotto di $(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)(\sin y \pm \sqrt{-1}\cos y)(\sin x \pm \sqrt{-1}\cos x)(\sin u \pm \sqrt{-1}\cos u) \ldots\ldots$, prendendo primieramente 4 poi 5, poi 6, ecc. fattori e supponendo inoltre nelle moltiplicazioni di già ridotte, $z = y = x = u = \ldots\ldots$, si otterranno i valori seguenti dalle potenze successive di $\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z$,

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^1 = +\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^2 = -\cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^3 = -\sin 3z \mp \sqrt{-1}\cos 3z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^4 = +\cos 4z \mp \sqrt{-1}\sin 4z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^5 = +\sin 5z \pm \sqrt{-1}\cos 5z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^6 = -\cos 6z \pm \sqrt{-1}\sin 6z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^7 = -\sin 7z \mp \sqrt{-1}\cos 7z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^8 = +\cos 8z \mp \sqrt{-1}\sin 8z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^9 = +\sin 9z \pm \sqrt{-1}\cos 9z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{10} = -\cos 10z \pm \sqrt{-1}\sin 10z$$

Si ha dunque in generale quando l' esponente è un numero pari $= 2m$,

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{2m} = \mp\cos 2mz \mp(\mp)\sqrt{-1}\sin 2mz \ldots. (3)$$

Si prenderà il segno superiore quando m sarà un numero dispari, ed il segno inferiore quando m sarà un numero pari.

Per l' espressione $\mp(\mp)$ intendo che l' uno de' segni $-$ e $+$ fuori de' cancelli ( ) moltiplica l' uno e l' altro segno $\mp$ entro gli stessi cancelli; onde $-(\mp) = \pm$; e $+(\mp) = \mp$.

E quando l' esponente è un numero dispari $= 2m+1$, si ha generalmente

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{2m+1} = \mp\sin(2m+1)z \mp(\pm)\sqrt{-1}\cos(2m+1)z \ldots (4).$$

$-$ ovvero $+$ secondo che m è un numero dispari ovvero pari.

3. Sviluppiamo questi casi, e ponghiamo nelle formole (3) (4) prima $m = 2n$, e poi $m = 2n+1$, esse diverranno successivamente

$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n} = +\cos 4nz \mp \sqrt{-1}\sin 4nz$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2} = -\cos(4n+2)z \pm \sqrt{-1}\sin(4n+2)z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1} = +\sin(4n+1)z \pm \sqrt{-1}\cos(4n+1)z$$
$$(\sin z \pm \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3} = -\sin(4n+3)z \mp \sqrt{-1}\sin(4n+3)z$$

dalle quali si tragge in virtù del doppio segno $\pm$ per addizione e per sottrazione

$$\cos 4nz = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n}}{2}, \ldots (5)$$

$$\sin 4nz = \frac{(\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n} - (\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (6)$$

$$\cos(4n+1)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1} - (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (7)$$

$$\sin(4n+1)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+1}}{2}, \ldots (8)$$

$$\cos(4n+2)z = -\frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2}}{2}, \ldots (9)$$

$$\sin(4n+2)z = \frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2} - (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+2}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (10)$$

$$\cos(4n+3)z = \frac{(\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3} - (\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3}}{2\sqrt{-1}}, \ldots (11)$$

$$\sin(4n+3)z = -\frac{(\sin z + \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3} + (\sin z - \sqrt{-1}\cos z)^{4n+3}}{2}, \ldots (12)$$

Ma si sa che tutti i numeri interi possibili sono contenuti nell' una o nell' altra delle quattro formole $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$; dunque le otto equazioni precedenti rappresentano la somma o la differenza di tutte le potenze intiere possibili dei fattori $\sin z+\sqrt{-1}\cos z$, $\sin z-\sqrt{-1}\cos z$ espressa nel seno o coseno dell'arco z moltiplicato dall'esponente delle stesse potenze.

4 Ora egli è facile di dimostrare che ciascheduna delle otto formole precedenti è la stessa di ciascheduna corrispondente delle due (1) e (2) trovate dall'immortale *Eulero* per mezzo dei secondi fattori $\cos z+\sqrt{-1}\sin z$, $\cos z-\sqrt{-1}\sin z$; la qual cosa si potrebbe ottenere in due modi diversi, l'uno sviluppando le mentovate formole in serie, l' altro paragonandole immediatamente fra di loro. Ci serviremo di quest' ultimo mezzo perchè più semplice del primo. Sia dunque per maggiore brevità $\sin z=a$; $\cos z=b$, e pongasi mente che $\sqrt{-1}=-\frac{1}{\sqrt{-1}}$; $(\sqrt{-1})^{4n}=+1$; $(\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^{4n+2}=-1$; $(\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}$, si avrà ponendo sucessivamente nella formola (1) d' *Eulero* il numero arbitrario $n=4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, si avrà dico l'equazione $(1)=(5)=(7)=(9)=(11)$, cioè $(1)=(5)$ ovvero $(b+a\sqrt{-1})^{4n}+(b-a\sqrt{-1})^{4n}=(a+b\sqrt{-1})^{4n}+(a-b\sqrt{-1})^{4n}$; moltiplico il 2° membro di questa equazione per $(\sqrt{-1})^{4n}=1$, ed ho $(a\sqrt{-1}-b)^{4n}+(a\sqrt{-1}+b)^{4n}$, onde essa diviene $(b-a\sqrt{-1})^{4n}=(a\sqrt{-1}-b)^{4n}$ moltiplicando il 1° o il 2° membro di questa equazione per $(-1)^{4n}=+1$, esso si trasforma precisamente nel 2° o 1° membro della stessa equazione. E $(1)=(7)$ ovvero $(b+a\sqrt{-1})^{4n+1}+(b-a\sqrt{-1})^{4n+1}$ $=\frac{(a+b\sqrt{-1})^{4n+1}-(a-b\sqrt{-1})^{4n+1}}{\sqrt{-1}}$; moltiplicando il 2° membro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+1}}{\sqrt{-1}}=1$, si ha $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+1}$ $+(a\sqrt{-1}+b)^{4n+1}$. Ma $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+1}=(-1)^{4n+1}$ $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+1}=(b-a\sqrt{-1})^{4n+1}$; dunque $(1)=(7)$; similmente $(1)=(9)$, cioè $(b+a\sqrt{-1})^{4n+2}+(b-a\sqrt{-1})^{4n+2}$ $=-(a+b\sqrt{-1})^{4n+2}-(a-b\sqrt{-1})^{4n+2}$. Moltiplico il

2° membro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+2}}{-1} = 1$, ed ho $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+2}$ $+(a\sqrt{-1}+b)^{4n+2}$; moltiplico $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+2}$ per $(-1)^{3n+2}=1$ ed ho $(b-a\sqrt{-1})^{4n+2}$; dunque $(1)=(9)$.

Finalmente $(1)=(11)$ ovvero $(b+a\sqrt{-1})^{4n+3}+(b-a\sqrt{-1})^{4n+3}$ $=\frac{(a-b\sqrt{-1})^{4n+3}-(a+b\sqrt{-1})^{4n+3}}{\sqrt{-1}}$ moltiplico il 2° membro per $\frac{(\sqrt{-1})^{4n+3}}{-\sqrt{-1}} = 1$; ed ho $(a\sqrt{-1}+b)^{4n+3}$ $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+3}$; ma $-(a\sqrt{-1}-b)^{4n+3}=(-1)^{4n+3}$ $(a\sqrt{-1}-b)^{4n+3}=(b-a\sqrt{-1})^{4n+3}$; dunque $(1)=(11)$.

Paragonando nello ſteſſo modo l'eſpreſſione (2) del ſeno trovata da *Eulero* in cui n diventa ſucceſſivamente $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ a ciaſcheduna delle noſtre quattro eſpreſſioni de' ſeni ſi dimoſtrerà che $(2)=(6)=(8)=(10)=(12)$.

5 Quindi la ragione per cui la formola $\sin^2 z+\cos^2 z$ dev' eſſere ſciolta nei fattori $\cos z+\sqrt{-1}\sin z$, $\cos z-\sqrt{-1}\sin z$, che ſono quelli del non mai abbaſtanza lodato *Eulero* anzi che in queſti da noi conſiderati $\sin z+\sqrt{-1}\cos z$, $\sin z-\sqrt{-1}\cos z$, e perchè i primi conducono ad una ſola eſpreſſione del ſeno e del coſeno d'un arco qualunque multiplo di z, la quale è generale e coſtante; quando gli ultimi fattori danno de' valori differenti per i ſeni e coſeni dello ſteſſo arco ſecondo ch' egli è moltiplicato da' numeri *parimente* pari ovvero *diſparimente* pari, e dai numeri diſpari che da queſti derivano; ciò non oſtante noi abbiamo fiſſata la variazione di queſte eſpreſſioni per mezzo di quattro formole differenti, e neceſſarie a ſciogliere in queſt' ultimo modo il problema in tutta la ſua generalità.

Che poi il noſtro celebre *Eulero* abbia impiegato nelle ingegnoſiſſime ſue operazioni analitiche i migliori fattori per forza, dirò così, d' azzardo, o di previo eſame, non ardirei deciderlo: parmi ſolamente che ſe aveſſe conſiderato gli altri, non ſi ſarebbe rimaſto dal rilevarne l' irregolarità, e di trarne com' era ſuo coſtume di fare in ogni parte delle matematiche che imprendeſſe a trattare, delle conſeguenze utili e ſingolari; ma ſe è azzardo, deſſo è quel tatto ſuperiore, quell' iſtinto ſublime, che forma propriamente l' anima de' grandi uomini.

6. Mi si permetta di osservare da ultimo, che se fosse proposto di trasformare le quattro formole (5), (7), (9) e (11), le quali sono necessarie a sciogliere in questo sistema di fattori il problema in tutta la sua estensione, come ancora le quattro altre (6), (8), (10) e (12) in una sola formola generale (1) per le quattro prime, e in quella segnata (2) per le quattro ultime, come ha fatto subitamente l'immortale *Eulero*, forse la soluzione *a priori* di questo problema si presenterebbe difficilmente; onde se l'esempio analitico intorno a cui versa la presente breve Memoria prova da una parte la generalità dell'algebra, ne rileva però dall'altra la somma semplicità, nella quale unicamente consiste il pregio di questa mirabil arte.

DIMOSTRAZIONE

D'un teorema Analitico.

Nel §. 139 della sopraccitata opera di *Eulero*, quest'illustre Geometra deduce dalle formole (1) e (2) la bellissima trasformazione de' logaritmi imaginarj negli archi circolari reali in questo modo. Egli (*a*) suppone nelle accennate formole (1) e (2) n eguale ad un numero infinitamente piccolo $n=\frac{1}{i}$, i essendo un numero infinitamente grande, in modo che $\cos nz=\cos\frac{z}{i}=1$, e $\sin nz=\sin\frac{z}{i}=\frac{z}{i}$, e dopo aver osservato che $l(1+x)=i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i$ ossia $y^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}\,ly$, e posto da una parte $\cos z+\sqrt{-1}\sin z$, e dall'altra $\cos z-\sqrt{-1}\sin z$ invece di y, le formole (1) e (2) gli divengo-

(*a*) In questo luogo, invece delle formole (1) e (2), *Eulero* cita quelle del §. 130; ma ciò è evidentemente un errore o del copista o dello stampatore, perchè dal §. 130 non si possono trarre in nessuna maniera, se non m'inganno, i risultati analitici qui esposti, i quali chiaramente derivano dalle formole da noi segnate (1) e (2) contenute nel §. 133.

no la prima, $1 = \dfrac{1+\frac{1}{i}l.(\cos z+\sqrt{-1}\,\sin z)+1+\frac{1}{i}l(\cos z-\sqrt{-1}\,\sin z)}{2} = 1$ per i logaritmi che ſvaniſcono, e la ſeconda

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}l.(\cos z+\sqrt{-1}\,\sin z)-\frac{1}{i}l.(\cos z-\sqrt{-1}\,\sin z)}{2\sqrt{-1}}, \text{ cioè}$$

$z=\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\,l.\dfrac{\cos z+\sqrt{-1}\,\sin z}{\cos z-\sqrt{-1}\,\sin z}$; ma $\dfrac{\sin z}{\cos z}=\tan. z$, dunque l' arco z verrà eſpreſſo dalla ſua tangente in modo che $z=\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\,l.\dfrac{1+\sqrt{-1}\,\tan. z}{1-\sqrt{-1}\,\tan. z}$.

2. Ma le formole (1) e (2) derivando per addizione e per ſottrazione dalla formola fondamentale $(\cos z\pm\sqrt{-1}\,\sin z)^n = \cos nz\pm\sqrt{-1}\,\sin nz$, e queſta non eſſendo dimoſtrata dall' immortale *Eulero* che nel caſo di $n=$ ad un numero qualunque intero, di più il metodo uſato da queſto grand'uomo e da noi eſpoſto nella prima parte di queſta Memoria n. 1, non potendo condurre ad altra generalità fuori di quella di $n=$ ad un numero qualunque intero, relativamente all' anzidetta formola fondamentale, ne ſiegue che nè pure l' equazione $z=\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\,l.\dfrac{1+\sqrt{-1}\,\tan. z}{1-\sqrt{-1}\,\tan. z}$, e le belle conſeguenze che da eſſa derivano, reſtano dimoſtrate, perchè dipendenti dalla condizione di $n=$ a un numero frazionario $=\frac{1}{i}$. E ciò coſtituiſce un caſo importantiſſimo di cui neſſun Geometra ha mai dato, a mia notizia, una dimoſtrazione. Mi ſi permetta dunque di eſporne qui una che non potrà forſe non ſembrare ſemplice.

Si ha $(\cos z\pm\sqrt{-1}\,\sin z)^n=\cos nz\pm\sqrt{-1}\,\sin nz$, n eſſendo un numero qualunque intero poſitivo, e z un arco qualunque arbitrario; perciò invece dell' arco z conſidero l' arco $\frac{s}{r}z$; s e r eſſendo de' numeri qualunque interi, ed ho

(cos

$$(\cos\frac{s}{r}z \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,\frac{s}{r}z)^r = \cos sz \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,sz$$

Ma $\cos sz \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,sz = (\cos z \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,z)^s$; dunque

$(\cos\frac{s}{r}z \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,\frac{s}{r}z)^r = (\cos z \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,z)^s$, ovvero

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,z)^{\frac{s}{r}} = \cos\frac{s}{r}z \pm \sqrt{-1}\,\text{fin}\,\frac{s}{r}z$$

Mi riſerbo ad altra occaſione a moſtrare per mezzo di qualche applicazione l' utilità di queſto elegantiſſimo teorema.

SAGGIO

DI UN NUOVO CORSO DI ELEMENTI DI STATICA

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI

PREFAZIONE.

E' mia intenzione di presentare in questa Memoria a' matematici una serie di proposizioni costituenti il primo Elemento di un nuovo corso di statica, in cui ora mi occupo, affine di rilevarne il loro giudizio, e valermene a mio lume nel proseguimento dell' opera medesima. Se la maggior parte di queste proposizioni, per non dire tutte, contengono verità già note, egli è però affatto nuovo l'ordine loro e la dimostrazione che ho cercato di ridurre a tal segno di evidenza, che non ne resti poi ad alcuno la voglia di una migliore; nella qual cosa non sono forse gli altri autori di elementi di questa scienza così ben riusciti come conveniva. Imperciocchè per parlare di una sola; chi è che non sappia che un *Nevvton*, un *Daniel Bernoulli*, un *d' Alembert*, un *Bossut*, un *P. Gregorio Fontana*, ed altri ancora, hanno cercato un dopo l'altro o di dare una nuova dimostrazione del celebre teorema della composizion delle forze, o di perfezionare le date dagli altri? Questa sollecita brama di rintracciare nuove pruove di una verità, non è ella un indizio manifesto che le già note e comuni non appagano abbastanza? Di questo teorema io do appunto una dimostrazione, che mi lusingo possa restare al coperto di ogni attacco e soddisfare ai più difficili ingegni. Nè è questa opera di lieve momento, perchè, come dice il citato *Bernoulli* nel Tomo primo degli Atti dell' Accademia di Pietroburgo coll' autorità di *Varignon*, da sì fatto teorema

possono di leggieri ricavarsi tutte le altre proprietà dell'equilibrio: *illam mechanicæ partem quæ versatur circa æquilibrium potentiarum totam ex sola compositione & resolutione virium deduci posse abunde monstravit Petrus Varignon*. Ma oltre la dimostrazione delle forze composte se ne troveranno in questo saggio alcune altre non dispregevoli, e sopra tutto un legame ed ordine fra loro che sembreranno anella della stessa catena. Cercando fra me stesso le ragioni per cui le prime verità della statica non persuadono così bene, come per esempio quelle della geometria, non ho potuto altra trovarne che una sola, ed è che si sono insieme confusi, se non la statica con la dinamica (giacchè molti hanno avuta l'antivedenza di far questa separazione) almeno li principj di quella co' principj di questa scienza; laddove sembra che la prima possa sopra fondamenta sue proprie innalzarsi, come io studierò di mostrare col fatto. In questo tentativo sono stato però preceduto e da *Bernoulli*, e d'*Alembert* quando cercarono la dimostrazione del teorema di sopra enunciato; onde non sia meraviglia se colla scorta di tanti uomini, e più ancora dalla ragione che dall' autorità convinto, io mi sia posto a trattare la statica da se sola e interamente separandola da ogni idea tratta dal moto; nella qual cosa quasi spererei di non esservi male riuscito.

Siccome questo è un saggio di un corso di elementi, così era ben convenevole che il mio stile fosse elementare e adattato alla intelligenza della gioventù. Anzi ho a bello studio imitato quello degli antichi nostri maestri, i quali, che che altri in contrario ne senta, debbono essere presi per modelli di questo genere di scrivere. Simile attenzione ho praticata per seguire il loro metodo; quindi si conoscerà fino dalla mostra presente essere tutto l' edifizio che io cerco d'erigere fondato sopra le definizioni, i comuni concetti, e le domande, e che non mi servo mai di alcuni sforzati ragionamenti per provare i miei assunti, come per avventura sogliono fare coloro che di questo metodo non sono seguaci. Ho creduto però opportuno di spargere alcune poche note nell'opera, non per modo di commenti, ma per rendere ragione di alcune novità da me per la prima volta nella statica intromesse, o per avvertire di alcun' altra cosa

importante. Se è prezzo dell'opéra unire insieme in questa maniera le verità della statica, se la strada ch'io batto può meglio delle comuni condurre alla meta, se debbo in alcuna cosa correggermi o tutto abbandonare, decideranno i matematici, al cui giudizio, come ho detto di sopra, ben volentieri sottometto questa mia quantunque laboriosa intrapresa.

DEFINIZIONI.

1 Forza o potenza è quello ch' eccita un mobile a cangiar di posizione.

2 Direzione di una forza è la linea retta, secondo la quale la forza eccita un mobile.

3 La forza si dice tendere nella sua direzione da quella parte, verso cui è volto l' eccitamento.

4 Le forze applicate ad un mobile diconsi contrarie, quando le loro direzioni sieno parallele, e le tendenze volte a parti contrarie.

5 Diconsi poi direttamente contrarie, quando abbiano comune la direzione, e le tendenze volte a parti contrarie.

6 Le forze applicate ad un mobile diconsi parziali, quando le loro direzioni sieno parallele, e le tendenze volte alla stessa parte.

7 Diconsi poi direttamente parziali quando abbiano comune la direzione, e le tendenze volte alla stessa parte.

8 Angolo alla tendenza si dice quello, che dalle direzioni di due forze segantisi in un punto è compreso, dalla parte ove tendono le forze.

9 Le forze applicate ad un mobile si dicono fra loro in equilibrio, quando nessun eccitamento prevalga.

10 Le forze che colla medesima o colle medesime forze possono equilibrarsi, diconsi equivalenti (*a*).

(*a*) Di queste dieci definizioni le prime due, siccome ancora la nona, si trovano in tutti i libri elementari di statica. La terza è nuova, ed io la ho introdotta, perocchè non basta dire la direzione secondo cui viene un mobile eccitato; ma bisogna ancora mostrare da qual parte nella direzione è volto l'eccitamento. Ed a proposito della voce *eccitare* notisi aver-

DIMANDE.

1 Dimandisi di applicare secondo qualsivoglia direzione una qualsivoglia forza, che tenda verso l'una o l'altra parte nella direzione stessa (*a*).

2 E se due forze a due direzioni che si segano in un punto sieno applicate, certa forza applicata secondo certa direzione, che passi pel punto stesso, equilibrarsi coll altre due forze (*b*).

3 E se sieno fra loro in equilibrio tre forze applicate secondo tre direzioni segantisi in un punto, essere ancora fra

---

la io adoperata in luogo dell'altre *premere* e *tirare* usate da' statici; e ciò per poter con una sola voce esprimere ad un tratto qual si è l'una o l'altra di queste per loro natura contrarie azioni, la distinzione delle quali alla statica concreta non all'astratta appartiene La quarta e quinta definizione sono state da molti autori, se non proposte, almeno messe in opera ne' loro elementi, ed io le credo tanto utili che a somiglianza di esse altre due nuove ne ho formato, che sono marcate sesta e settima. L'ottava è pure nuova: due direzioni che si segano fra loro fanno quattro angoli; e di questi quattro chiamo angolo alla tendenza quello, ch'è collocato dalla parte ove tendono le forze; e sembrami di avere molto con questa definizione facilitato il modo di scrivere con chiarezza e sicurezza. La decima ed ultima definizione è pure mia, e la ho surrogata all'altra solita delle forze *composte* o forze *risultanti*. La differenza non consiste nel solo cangiamento di nome, cioè per aver chiamate equivalenti le forze dette fino ad ora composte o risultanti; ma piuttosto per aver tratta la nozione di queste forze dall' equilibrio, non dal moto, come hanno fatto tutti gli altri statici. Se poi il nome di forze composte o di forze risultanti era adattato all' idea, ch'essi se ne formavano; l'altro di forze equivalenti conviene meglio a quella ch' io cerco d' introdurre. L'opera però dimostrerà più d' ogni mio discorso se tale considerabile cangiamento apporti reale utilità nella trattazione della statica.

(*a*) *Euclide* vero maestro del metodo matematico dimandò di potere da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto tirare una linea retta, e prolungare una data retta finita continuamente per diritto, ed altre simili cose. Io a sua imitazione ho fatta questa prima dimanda, che a mio giudicio non doveva esser da alcun autore di elementi ommessa, come quella di cui fa d' uopo servirsene quasi in ogni proposizione.

(*b*) Questa domanda vale per me altrettanto, quanto pel Cel. *Bossut* il suo assioma che *un punto non può andare ad un tratto per molte strade*; ma io non esco dei confini della statica; egli si serve di un principio di dinamica. Chi vorrà attentamente esaminare le Memorie di *Daniel Bernoulli* e di *Alembert* per la dimostrazione del famoso teorema della composizione delle forze (che così da tutti vien chiamato), s' accorgerà che quantunque essi non abbiano, come me, espressa tale dimanda, l' hanno però tacitamente introdotta.

loro in equilibrio tre forze uguali a quelle, una all' altra, applicate similmente secondo tre direzioni segantisi in un punto, e comprendenti fra loro angoli alla tendenza uguali a' compresi dalle prime direzioni; ciascun angolo alla tendenza a ciascun angolo alla tendenza delle forze uguali (*a*).

COMUNI CONCETTI.

1 Due forze uguali e direttamente contrarie sono fra loro in equilibrio.

2 E se due forze sieno fra loro in equilibrio, saranno esse uguali e direttamente contrarie.

3 Se a forze fra loro in equilibrio aggiungansi forze fra loro in equilibrio, tutte le forze saranno pure fra loro in equilibrio.

4 E se da forze fra loro in equilibrio tolgansi forze fra loro in equilibrio, le forze rimanenti saranno pure fra loro in equilibrio.

5 Non possono essere fra loro in equilibrio le forze, le cui direzioni si seghino nello stesso punto, se le tendenze di tutte sieno volte verso la medesima parte (*b*).

PROPOSIZIONE I.

Le forze uguali e direttamente parziali sono fra loro equivalenti, in qualunque sito della comune direzione sia ciascuna forza applicata.

(*a*) Anche di questa dimanda senza preveniente avviso si sono serviti i citati autori. Ho stimato poi opportuno di trascurare l'altre solite dimande, come quella *di poter concepire i corpi non pesanti*, perchè io ho parlato e parlerò sempre astrattamente di mobili, mai di corpi. E' parimenti inutile l'altra *di poter esprimere le forze con linee rette*. Euclide trattò tutto il quinto libro, che versa sulle grandezze in generale (e grandezze sono ancora le forze), ed espresse nelle figure tutte le grandezze col mezzo di linee, senza credersi obbligato di farne prima alcuna inchiesta.

(*b*) Ho comune i due primi assiomi con tutti gli altri autori di elementi di statica; gli altri tre sono nuovi. Si conoscerà ben tosto l'utile uso che se ne può fare.

Le due forze *P* *Q* ſieno uguali e direttamente parziali, cioè ſieno applicate ſecondo la ſteſſa direzione *ED* e tendenti verſo la ſteſſa parte, dall'*E* verſo il *D*; ma la forza *P* ſia applicata in *C*, e la forza *Q* in qualſivoglia altro ſito *D* della direzione *ED*; dico ch'equivalente è la forza *P* alla forza *Q*. Fig. 1

Imperocchè prendaſi la forza *R* uguale ad una di eſſe forze *P* *Q*, e ſi applichi la forza *R* ovunque ſecondo la direzione *ED* sì che tenda dal *D* verſo l'*E*. Dimand. 1

E poichè l'una e l'altra delle forze *P* *R* è applicata ſecondo la ſteſſa direzione *ED*, ma la forza *P* tende da una parte, dall'*E* verſo il *D*, e la forza *R* tende dalla parte oppoſta, dal *D* verſo l'*E*; quindi la forza *P* alla forza *R* è direttamente contraria, ed è ancora ad eſſa uguale; e due forze uguali e direttamente contrarie ſono fra loro in equilibrio. In equilibrio ella è dunque la forza *P* colla forza *R*. Allo ſteſſo modo ſi proverà che la forza *Q* è in equilibrio colla foza *R*. L'una e l'altra dunque delle forze *P* *Q* può equilibrarſi colla medeſima forza *R*. Ma quelle forze che colla medeſima forza poſſono equilibrarſi ſono equivalenti. Equivalente ella è dunque la forza *P* alla forza *Q*; il che convenia dimoſtrare *(a)*. Defin. 5 Comun. Conc. 1 Defin. 10

(*a*) Queſta mia prima propoſizione comprende una dimanda comune a tutti i libri elementari di ſtatica, che alcuni hanno enunciato così, *ch egli ſia permeſſo di riguardare una forza come applicata a qual punto ſi vorrà della ſua direzione*, ed altri in queſto modo, *che una potenza applicandoſi ad operare in qualunque punto della ſua direzione faccia il medeſimo effetto*. Ma prima: perchè richiedere quello che poſſiamo dimoſtrare ed eſigere? Ed in ſecondo luogo coſa vuolſi mai indicare con queſte parole: che ſi poſſa riguardare una forza come applicata a qualſivoglia punto della ſua direzione? ovvero con queſte altre: che l'effetto ne ſia lo ſteſſo? Dicaſi dunque piuttoſto con me, che una ſteſſa forza, ovvero forze uguali e direttamente parziali applicate in qualunque ſito della comune direzione ſono fra loro equivalenti, ch'è lo ſteſſo di dire, che eſſe poſſono colla medeſima o colle medeſime forze equilibrarſi. E notiſi che alle forze uguali io aggiungo la condizione che debbano ancora eſſere direttamente parziali, nel che obbligo ad intendere le forze uguali applicate non ſolo ad una comune direzione, ma tendenti in oltre verſo la ſteſſa parte; nel qual caſo e non più è vera l'altrui dimanda e mia propoſizione. E pure eſſi hanno ommeſſa queſta sì eſſenziale circoſtanza, come in quaſi tutti i luoghi ne' quali conviene tener conto delle riſpettive tendenze delle forze.

COROLLARIO

Quindi se quante forze si vogliano sieno fra loro in equilibrio, e canginsi nelle proprie direzioni comunque i siti dell'applicazione delle forze non però le tendenze loro, sussisterà l'equilibrio.

PROPOSIZIONE 2.

A quante forze si vogliano direttamente parziali è equivalente una forza ad esse uguale e direttamente parziale.

Fig. 2. Sieno le forze *P Q R* direttamente parziali, cioè sieno applicate secondo la comune direzione *ED* e tendano tutte e tre dalla stessa parte, dall'*E* verso il *D*. Prendasi poi la forza *S* uguale alle forze *P Q R*, e si applichi secondo la direzione *ED*, sì che tenda dall'*E* verso il *D*, e sia alle forze *P Q R* direttamente parziale. Dico, ch'equivalente è la forza *S* alle forze *P Q R*.

Dimand. 1 Imperocchè applichisi di nuovo secondo la direzione *ED*, uguale alle forze *P Q R*, la forza *MT*, la quale tenda dal *D* verso l'*E*, e sia alle forze medesime *P Q R* direttamente contraria. E si divida la forza *MT* nelle forze *MN NO OT* uguali alle forze *P Q R*, l'una all'altra; e uguale sia la forza *MN* alla forza *P*, la forza *NO* alla forza *Q*, e la forza *OT* alla forza *R*.

E poichè uguali sono l'una e l'altra delle forze *S MT* alle forze *P Q R*, quindi sarà la forza *S* uguale alla forza *MT*. E sono ancora direttamente contrarie. Adunque la forza *S* è in equilibrio colla forza *MT*. (Comun. Conc. 1) E perchè sono direttamente contrarie le forze *P Q R* alla forza *MT*, e si è divisa la forza *MT* nelle forze *MN NO OT*; quindi ciascuna delle forze *P Q R* a ciascuna delle forze *MN NO OT* è direttamente contraria. Di nuovo perchè la forza *P* è uguale e direttamente contraria alla forza *MN*, sarà la forza *P* in equilibrio colla forza *MN*. (Comun. Conc. 1.) Per la stessa ragione la forza *Q* è in equilibrio colla forza *NO*, e la forza *R* colla forza *OT*. Ma se a forze fra loro in equilibrio aggiungansi forze fra loro in equilibrio, tutte le forze sono pure fra loro in equilibrio. (Comun. Conc. 3) Le

forze

forze adunque *P Q R* si equilibrano colle forze *MN NO OT*, ovvero colla forza intera *MT*. Ma si è dimostrato che ancora la forza *S* si equilibra colla forza *MT*. Sonovi dunque alcune forze *P Q R* ed altra forza *S*, che possono colla medesima forza *MT* equilibrarsi. Equivalente ella è dunque la forza *S* alle forze *P Q R*; il che convenia dimostrare. Defin. 10

PROPOSIZIONE 3.

Se vi sieno alcune forze fra loro direttamente parziali, ed altre forze pure fra loro direttamente parziali ma direttamente contrarie alle prime, e le prime forze sieno uguali alle seconde; saranno tutte le forze fra loro in equilibrio.

Le forze *H I* sieno fra loro direttamente parziali, e sieno pure fra loro direttamente parziali l'altre forze *K L M* ma direttamente contrarie alle forze *H I*. Sia poi l'*AB* la comune direzione di tutte; e le forze *H I* tendano dall'*A* verso il *B*, e le forze *K L M* dal *B* verso l'*A*. Sieno in oltre le forze *H I* uguali alle forze *K L M*. Dico che sono fra loro in equilibrio tutte le forze *H I K L M*. Fig. 3

Imperocchè prendasi la forza *Q* uguale alle forze *H I*, e si applichi secondo la direzione *AB* sì che tenda dall'*A* verso il *B*, e alle stesse forze *H I* sia direttamente parziale. Similmente si prenda la forza *R* uguale alle forze *K L M*, e si applichi secondo la direzione *AB*, sì che tenda dal *B* verso l'*A*, e alle stesse forze *K L M* sia direttamente parziale. Dimand. 1

E poichè uguale è la forza *Q* e direttamente parziale alle forze *H I*, quindi sarà la forza *Q* equivalente alle forze *H I*. Per la stessa ragione la forza *R* è equivalente alle forze *K L M*. Di nuovo poichè si pongono le forze *H I* uguali alle forze *K L M*, e le forze *H I* sono uguali alla forza *Q*, e le forze *K L M* alla forza *R*, quindi sarà ancora la forza *Q* uguale alla forza *R*. Elleno sono poi ancora le forze *Q R* direttamente contrarie, perocchè sono applicate secondo la comune direzione *AB* e tendono da parti contrarie. Adunque la forza *Q* è in equilibrio colla forza *R*. Ma alla forza *R* sono equivalenti le forze *K L M*. La forza dunque *Q* è in equilibrio colle forze *K L M*. Alla forza Prop. 2 Comun. Conc. 1 per l'inversa Defin. 10

per l'inverſa Defin. 10 poi *Q* ſono equivalenti le forze *H I*. Elleno ſono dunqu fra loro in equilibrio le forze *H I* colle forze *K L M*; i che convenia dimoſtrare.

PROPOSIZIONE 4.

Se alcune forze fra loro direttamente parziali ſieno in equilibrio con altre forze fra loro direttamente parziali, ſaranno le prime forze uguali alle ſeconde, e ad eſſe direttamente contrarie.

Fig. 3 Sieno fra loro in equilibrio le forze *H I K L M*; delle quali alcune forze *H I* ſieno fra loro direttamente parziali, e ſieno applicate ſecondo la comune direzione *DB* e tendenti amendue dal *D* verſo il *B*; e l'altre forze *K L M* ſieno pure fra loro direttamente parziali, e ſieno applicate ſecondo la comune direzione *AC* e tendenti tutte e tre dal *C* verſo l'*A*. Dico che le forze *H I* ſono uguali alle forze *K L M*, e ad eſſe direttamente contrarie.

Imperocchè prendaſi la forza *Q* uguale alle forze *H I*, e ſi applichi ſecondo la direzione *DB* sì che tenda dal *D* ver-
Dimand. 1 ſo il *B*, e ſia alle forze *H I* direttamente parziale. Poi ſi prenda un'altra forza *R* uguale alle forze *K L M*, e ſi applichi ſecondo la direzione *AC*, sì che tenda dal *C* verſo l'*A*, e ſia alle forze *K L M* direttamente parziale.

Prop. 2 Equivalenti elleno ſono adunque, la forza *Q* alle forze *H I*, e la forza *R* alle forze *K L M*. E poichè ſi pongono le forze *H I* in equilibrio colle forze *K L M*, e le for-
per l'inverſa Defin. 10 ze *H I* ſono equivalenti alla forza *Q*; quindi ſarà ancora la forza *Q* in equilibrio colle forze *K L M*. Ma le forze *K L M* ſono equivalenti alla forza *R*. Adunque ancora le
Comun. Conc. 2 forze *Q R* ſono fra loro in equilibrio. Uguale ella è adunque la forza *Q* alla forza *R* e direttamente contraria; e però *ACDB* è una linea retta. Ma la forza *Q* è uguale alle forze *H I*, e la forza *R* alle forze *K L M*. Uguali ſono adunque le forze *H I* alle forze *K L M* e direttamente contrarie; le une tenderanno dall'*A* verſo il *B*, le altre dal *B* verſo l'*A*; il che convenia dimoſtrare.

PROPOSIZIONE 5.

A due forze disuguali e direttamente contrarie è equivalente una forza uguale all' eccesso in cui la maggiore supera la minore, direttamente parziale poi alla maggiore.

Sia la forza *P* disuguale alla forza *Q* e direttamente contraria, e sia maggiore la forza *P*. Sieno poi le forze *P Q* applicate secondo la comune direzione *AB*, e tendano, la forza *P* dall' *A* verso il *B*, e la forza *Q* dal *B* verso l' *A*. Si applichi ora secondo la stessa direzione *AB* la forza *S* uguale all' eccesso in cui la forza *P* supera la *Q*; e tenda la forza *S* dall' *A* verso il *B*, cioè sia alla forza maggiore *P* direttamente parziale. Dico che equivalente è la forza *S* alle forze *P Q*. Fig. 4 Dimand. 1

Imperocchè si applichi secondo la direzione *AB* un' altra forza *R* uguale alla forza *S*, ma tendente dal *B* verso l' *A*, sicchè sia la forza *R* alla forza *Q* direttamente parziale, e alle forze *S P* direttamente contraria. Dimand. 1

E poichè la forza *S* è uguale all' eccesso in cui la forza *P* supera la forza *Q*, quindi uguale sarà la forza *P* alle forze *Q S*; ma la forza *S* è uguale alla forza *R*. Adunque la forza *P* sarà uguale alle forze *Q R*. Ella è poi ancora la forza *P* direttamente contraria alle forze *Q R*. Sonovi dunque alcune forze direttamente parziali *Q R* ed un' altra forza *P* ad esse direttamente contraria, e le forze *Q R* sono uguali alla forza *P*. In equilibrio è adunque la forza *P* colle forze *Q R*; e però le forze *P Q* sono in equilibrio colla forza *R*. Ma ancora la forza *S* è in equilibrio colla forza *R*, perocchè sono uguali e direttamente contrarie; laonde sì le forze *P Q* che la forza *S* possono equilibrarsi colla medesima forza *R*. Equivalente ella è adunque la forza *S* alle forze *P Q*; il che convenia dimostrare. Prop. 3 Desin. 10

PROPOSIZIONE 6.

Se vi sieno alcune forze fra loro direttamente parziali ed altre forze pure fra loro direttamente parziali, ma direttamente contrarie alle prime; e le prime forze sieno maggio-

ri delle seconde; una forza uguale all' eccesso in cui le maggiori superano le minori, direttamente parziale poi alle maggiori, sarà equivalente a tutte le forze.

Fig. 5 Le forze *H I* sieno fra loro direttamente parziali, e sieno pure fra loro direttamente parziali le altre forze *K L M*, ma direttamente contrarie alle forze *H I*. Sia poi la retta *AB* la comune direzione di tutte, e tendano le forze *H I* dall' *A* verso il *B*, e le forze *K L M* dal *B* verso l' *A*. Sieno in oltre le forze *H I* disuguali alle forze *K L M*, e maggiori le *H I*. Si applichi poi secondo la direzione *AB* la forza *T* uguale all' eccesso in cui le forze *H I* superano le forze *K L M*, e tenda la forza *T* dall' *A* verso il *B* sì che alle forze maggiori *H I* sia direttamente parziale. Dico ch' equivalente è la forza *T* a tutte le forze *H I K L M*.

Dimand. 1 Imperocchè prendasi una forza *Q* uguale alla forza *T*, e sia essa applicata secondo la direzione *AB* e tendente dal *B* verso l' *A* sì che alle forze *K L M* sia direttamente parziale, e direttamente contraria alle forze *T H I*.

E poichè la forza *T* è uguale all' eccesso in cui le forze *H I* superano le forze *K L M*; quindi saranno le forze *H I* uguali alle forze *K L M T*. La forza *T* poi è uguale alla forza *Q*. Uguali sono adunque le forze *H I* alle forze *K L M Q*. E poichè sonovi alcune forze *H I* fra loro direttamente parziali, ed altre forze *K L M Q* pure fra loro direttamente parziali, ma direttamente contrarie alle prime *H I*, e le forze *H I* sono uguali alle forze *K L M Q*; quin-

Prop. 3 di equilibreranno si le forze *H I* colle forze *K L M Q*, cioè le forze *H I K L M* si equilibreranno colla forza *Q*. Ma ancora la forza *T* si equilibra colla forza *Q*, perocchè sono esse uguali e direttamente contrarie. Equivalente ella è

Defin. 10 dunque la forza *T* alle forze *H I K L M*; il che conveniva dimostrare.

PROPOSIZIONE 7.

Se quante forze si vogliano sieno fra loro in equilibrio, le uguali e direttamente contrarie ad alcune di esse, una all' altra, saranno equivalenti alle forze rimanenti.

Fig. 6 Sieno fra loro in equilibrio le forze *P Q R M*, e sieno

applicate, la forza *P* secondo la direzione *AB* e tenda dall' *A* verso il *B*, la forza *Q* secondo la direzione *CD* e tenda dal *C* verso il *D*, la forza *R* secondo la direzione *EG* e tenda dal *G* verso l' *E*, e la forza *M* secondo la direzione *LI* e tenda dall' *L* verso l' *I*. Applichinsi poi le forze *T S* uguali e direttamente contrarie alle forze *R M*, una all'altra; cioè la forza *T* uguale alla forza *R* e tenda secondo la direzione *EG* dall' *E* verso il *G*, e la forza *S* uguale alla forza *M* e tenda secondo la direzione *IL* dall' *I* verso l' *L*. Dico ch' equivalenti sono le forze *T S* alle forze *P Q*.

Imperocchè poichè uguale e direttamente contraria è la forza *T* alla forza *R*; quindi sarà la forza *T* in equilibrio colla forza *R*. Per la stessa ragione la forza *S* è in equilibrio colla forza *R*. Ma se a forze fra loro in equilibrio aggiungansi forze fra loro in equilibrio, tutte le forze sono pure fra loro in equilibrio. Adunque le forze *T S* sono in equilibrio colle forze *E M*. Si pongono poi ancora le forze *P Q* in equilibrio colle forze *E M*. Sonovi dunque alcune forze *T S* ed altre forze *P Q* che possono colle medesime forze equilibrarsi. Equivalenti elleno sono dunque le forze *T S* alle forze *P Q*; il che convenia dimostrare.

Comun. Conc. 1

Comun. Conc. 3

Defin. 10

PROPOSIZIONE 8.

Non possono essere in equilibrio le forze medesime con una ed altra forza applicate secondo differenti direzioni.

Imperocchè, se sia possibile, le forze *P Q* applicate secondo le direzioni *AB CD* sieno in equilibrio coll' una e coll' altra forza *M R* applicate secondo differenti direzioni, la forza *M* secondo la direzione *KF* e tendente dal *K* verso l'*F*, e la forza *R* secondo la direzione *GH* e tendente dal *G* verso l' *H*. E prendasi la forza *N* uguale alla forza *M*, e si applichi la forza *N* sì che sia alla forza *M* direttamente contraria, cioè sia applicata secondo la direzione *FK* e tenda dall' *F* verso il *K*.

Fig. 7

Dimand. 1

E poichè le forze *P Q M* sono fra loro in equilibrio, ed evvi una forza *N* uguale e direttamente contraria ad una di esse *M*; quindi equivalente sarà la forza *N* alle forze *P Q*. Prop. 7
Di nuovo poichè le forze *P Q R* sono fra loro in equili-

per l'inversa Defin. 10 brio, e le forze *P Q* si sono dimostrate equivalenti alla forza *N*; quindi sarà ancora la forza *N* in equilibrio colla forza *R*. Adunque la forza *N* alla forza *R* è uguale e direttamente contraria. Una comune direzione esseno hanno adunque le forze *N R*, e perciò la retta *GH* cade sopra la retta *FK*; il che non si pone. Non possono dunque essere le medesime forze *P Q* in equilibrio con una ed altra forza *M R* applicate secondo differenti direzioni; il che convenia dimostrare.

Comun. Conc. 2

COROLLARIO.

Quindi non possono una ed altra forza applicate secondo differenti direzioni alle medesime forze essere equivalenti; imperocchè altrimenti nelle direzioni dell'una e dell' altra forza applicate forze ad esse uguali e direttamente contrarie, queste sarebbero in equilibrio colle forze medesime; il che per la proposizione non può essere.

PROPOSIZIONE 9.

Se tre forze sieno fra loro in equilibrio, e le direzioni di due di esse si seghino in un punto, ancora la direzione della terza forza passerà pel punto medesimo, e tutte e tre le direzioni saranno nello stesso piano.

Fig. 8 Sieno fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R*; e sieno applicate, la forza *P* secondo la direzione *AB* e tenda dall' *A* verso *B*, la forza *Q* secondo la direzione *AC* e tenda dall' *A* verso il *C*, e la forza *R* secondo la direzione *DE* e tenda dal *D* verso l'*E*. Le direzioni poi *AB AC* delle forze *P Q* seghinsi nel punto *A*. Dico che ancora la direzione *DE* della forza *R* passerà pel punto *A*, e che le tre direzioni *AB AC DE* sono nello stesso piano.

Imperocchè, se sia possibile, non passi la *DE* pel punto *A*.
Dimostr. 2 E poichè le forze *P Q* sono applicate secondo le direzioni *AB AC* segantisi nel punto *A*; quindi saravvi certamente certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto *A*, la quale colle forze suddette *P Q* si equilibrerà. Sia questa la forza *M* applicata secondo la direzione *AI* che

paſſi pel punto *A*, e tenda la forza *M* dall' *A* verſo l' *I*. Le due forze adunque medeſime *P Q* ſono in equilibrio e coll' una e coll' altra delle forze *M R*, che ſecondo differenti direzioni *AI DE* ſono applicate, perocchè paſſa l' *AI* e la *DE* no pel punto *A*. Ma ciò non può eſſere. Non può dunque la direzione *DE* non paſſare pel punto *A*. Egli è però neceſſario che paſſi per eſſo; ciò che convenia in primo luogo dimoſtrare. Prop. 8

Dico ora in ſecondo luogo che le tre direzioni *AB AC AE* ſono tutte e tre coſtituite nello ſteſſo piano.

Imperocchè ſe non è così, ſieno, ſe ſia poſſibile, le due *AB AC* in un piano e l'*AE* in un altro, e tirinſi le rette *BC CE EB*; ſarà dunque *BECA* una piramide avente per baſe il triangolo *EBC*, vertice il punto *A*. Coſtruiſcaſi ora il priſma *BH*, la cui baſe ſia il triangolo *BCE*, ed oppoſto ad eſſo il triangolo *GFH*; ed abbia in oltre il priſma la ſteſſa altezza della piramide *BECA*; cioè la perpendicolare tirata dal punto *A* al piano per *EBC*. Egli è dunque manifeſto che il punto *A* è nel piano per *GFH*. E poichè parallelo è il piano per *BCE* al piano per *GFH*, e nel piano per *BCE* ſonovi i punti *B C E*; quindi i punti *B C E* cadono tutti e tre dalla ſteſſa parte del piano per *GFH*; il punto *A* è poi nel piano ſteſſo per *GFH*. Adunque le tendenze delle forze *P Q R*, cioè quella della forza *P* dall'*A* verſo il *B*, quella della forza *Q* dall' *A* verſo il *C*, e quella della forza *R* dall' *A* verſo l' *E*, ſono tutte volte dalla ſteſſa parte del piano per *GFH*. Sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R*, le cui direzioni ſi ſegano nel punto *A*, e le cui tendenze ſono tutte volte dalla ſteſſa parte del piano per *GFH*; il che non può eſſere; non ſono dunque le rette *AB AC* in un piano, e l' *AE* in un altro. Elleno ſono adunque nello ſteſſo piano le tre direzioni *AB AC AE*; il che convenia in ſecondo luogo dimoſtrare. Comun. Conc. 5

Corollario.

Da ciò ſi rende manifeſto, che ſe una forza ſia equivalente a due forze le cui direzioni ſi ſeghino in un punto, ancora la direzione della forza equivalente paſſerà pel pun-

to medesimo, e tutte e tre le direzioni consisteranno nello stesso piano; imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 10.

Se due forze con una forza s'equilibrino, e le direzioni delle due forze si seghino in un punto; la terza forza non avrà una comune direzione nè coll'una, nè coll'altra delle prime forze; e la direzione di ciascuna delle tre forze segherà l'angolo alla tendenza delle due forze rimanenti (*a*).

Fig. 9 Le due forze *P* *Q* colla forza *R* s'equilibrino. E sia applicata la forza *P* secondo la direzione *EB*, e la forza *Q* secondo la direzione *DC*; e seghinsi le direzioni *EB DC* nel punto *A*. Dico in prima che la forza *R* non può avere una comune direzione nè con una, nè coll'altra delle forze *P Q*.

Imperocchè abbiala, se sia possibile, colla forza *P*, cioè sia la retta *EB* comune direzione delle forze *P R*; e presi dall'una parte e dall'altra del punto *A* nella direzione *EB* i punti *E B*, e nella direzione *DC* i punti *D C*; tenda la forza *P* nella direzione *EB* dall'*A* verso il *B*, e la forza *Q* nella direzione *DC* dall'*A* verso il *C*. Pertanto la forza *R* applicata secondo la direzione *EB* tenderà o dall'*A* verso l'*E*, o dall'*A* verso il *B*, cioè sarà alla forza *P* contraria ovvero parziale direttamente; ed essendo direttamente contraria, o sarà uguale ad essa o disuguale. Sia uguale e direttamente contraria. La forza dunque *R* è in equilibrio e colla sola forza *P* e colle due forze *P Q*; il che è un assurdo. Non è dunque la forza *R* uguale e direttamente contraria alla forza *P*. Sia poi disuguale e direttamente contraria, e la forza *P* sia maggiore. E prendasi la forza *S* uguale all'eccesso in cui la forza *P* supera la forza *R*, e applichisi secondo la direzione *EB* sì che tenda dall' *A* verso il *B* e sia alla

(*a*) Tutti gli statici hanno ommesso questo Teorema, perchè nessuno si è avvisato di tener conto della tendenza delle forze.

alla forza maggiore *P* direttamente parziale. Equivalente ella è dunque la forza *S* alle forze *P R*. E poichè le forze *P R* si pongono in equilibrio colla forza *Q*, e alle forze *P R* è equivalente la forza *S*; quindi sarà la forza *S* in equilibrio colla forza *Q*. Elleno dunque sono uguali e direttamente contrarie le forze *S Q*, e però applicate secondo una comune direzione; il che è contro la posizione. Non è dunque la forza *R* disuguale e direttamente contraria alla forza *P*. Sia per fine la forza *R* alla forza *P* direttamente parziale. E presa la forza *S* uguale alle forze *R P* e ad esse direttamente parziale, si dimostrerà come sopra l'assurdo. La forza dunque *R* non può essere nè direttamente contraria, nè direttamente parziale alla forza *P*, cioè non può avere colla forza *P* una comune direzione. Allo stesso modo si proverà che la forza *R* non può avere una comune direzione colla forza *Q*. La forza dunque *R* non può avere una comune direzione nè con una, nè coll'altra delle forze *P Q*; il che convenia in primo luogo dimostrare.

Prop. 5.
Comun. Conc. 2.

Sia dunque la retta *GF* la direzione della forza *R*. Passerà certamente la direzione *GF* pel punto *A* ove si segano le direzioni *EB DC* delle forze *P Q*; e presi dall'una parte e dall'altra del punto *A* nella direzione *GF* i punti *G F*, tenda la forza *R* secondo la direzione *GF* dall'*A* verso l'*F*; e le forze *P Q* tendano come di sopra si è detto. Sarà dunque il *BAC* l'angolo alla tendenza delle due forze *P Q*, il *CAF* l'angolo alla tendenza delle due forze *Q R*, e l'*FAB* l'angolo alla tendenza delle due forze *R P*. Ora dico in secondo luogo che la direzione di ciascuna delle tre forze *P Q R* sega l'angolo alla tendenza delle due forze rimanenti.

Prop. 9.
Defin. 8.

Imperocchè, se sia possibile, non seghi la direzione *GF* della forza *R* l'angolo *BAC* alla tendenza delle forze *P Q*; e però nemmeno l'angolo *DAE* opposto al vertice all'angolo *BAC*. La *GF* poi non può cadere nè sopra l'una, nè sopra l'altra delle rette *EB DC*, perchè allora la forza *R* avrebbe una comune direzione o con una o coll'altra delle forze *P Q*, che non l'ha. La retta dunque *GF* segherà gli angoli *BAD CAE*, che sono accanto all'angolo *BAC*, e fra loro opposti al vertice, come nella figura. E dividansi co-

munque gli altri angoli *GAB EAF* opposti al vertice per mezzo dalla retta *IAH*. Egli è dunque evidente che tutti e tre i punti *B*, *C*, *F* cadono dalla stessa parte della retta *IAH*; ma il punto *A* è nella retta *IAH*. Adunque le tendenze delle forze *P Q R*, cioè quella della forza *P* dall' *A* verso il *B*, quella della forza *Q* dall' *A* verso il *C*, e quella della forza *R* dall' *A* verso l' *F*, sono tutte volte dalla stessa parte della retta *IAH*. Sono dunque fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R*, le cui direzioni si segano nello
Comun. stesso punto *A*, e le cui tendenze sono tutte volte dalla stes-
Conc. 5. sa parte della retta *IAH*; il che è un assurdo. Non sega dunque la direzione *GF* gli angoli *BAD CAE*. Ella non può poi cadere nè sopra l' una, nè sopra l' altra delle rette *FB DC*. Segherà dunque la *GF* l' angolo *BAC*, e ancora l' ango-
Fig. 10 lo *DAE* ad esso opposto al vertice, come nell' altra figura. Nella stessa guisa si proverà che la direzione *BE* della forza *P* sega l' angolo *CAF* alla tendenza delle forze *Q R*, e che la direzione *CD* della forza *Q* sega l' angolo *FAB* alla tendenza delle forze *R P*; il che convenia in secondo luogo dimostrare.

COROLLARIO I.

Quindi se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, ciascuna forza nella propria direzione tenderà dalla parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti.

COROLLARIO 2.

E' manifesto ancora che se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, i tre angoli alla tendenza al detto punto costituiti saranno insieme uguali a due retti.

COROLLARIO 3.

E' pure manifesto che se una forza sia equivalente a due forze, le cui direzioni seghinsi in un punto, non avrà la forza equivalente una comune direzione nè con una nè coll'

altra delle due forze; l'angolo alla loro tendenza sarà segato dalla direzione della forza equivalente; ma questa tenderà nella propria direzione dalla parte stessa colle due altre forze. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa sarà colle prime due forze in equilibrio.

PROPOSIZIONE 11.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto; e sieno uguali due di esse forze; la direzione della terza forza segherà per mezzo l'angolo alla tendenza delle forze uguali.

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R*, e sieno Fig. 11
applicate, la forza *P* secondo la direzione *GB*, la forza *Q* secondo la direzione *FC*, e la forza *R* secondo la direzione *DE*; e seghinsi le direzioni *GB FC DE* nel punto *A*; e sia in oltre uguale la forza *P* alla forza *Q*. Presi poi dall'una e dall'altra parte del punto *A* nella direzione *GB* i punti *G B*, nella direzione *FC* i punti *F C*, e nella direzione *DE* i punti *D E*, pongasi tendere la forza *P* nella propria direzione *GB* dall'*A* verso il *B*, la forza *Q* nella propria direzione *FC* dall' *A* verso il *C*, e la forza *R* nella propria direzione *DE* dall' *A* verso il *D*. Sarà dunque il *BAC* l'angolo alla tendenza delle forze *P Q*, il *CAD* l'angolo alla tendenza delle forze *Q R*, e il *DAB* l'angolo alla tendenza delle forze *R P*; e la direzione *ED* della forza *R* segherà l'angolo *BAC* alla tendenza delle forze *P Q*. Dico Prop. 10.
che essa lo segherà per mezzo

Imperocchè poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R* applicate secondo le direzioni *GB FC DE* segantisi nell'*A*; quindi tenderà la forza *R* da parte contraria a Coroll. 1.
quella cui tendono le forze *P Q*. Adunque condotta qualsivoglia Prop. 10.
retta *MAN* che seghi gli angoli *FAB CAG*, che sono accanto all'angolo *BAC* e fra loro opposti al vertice, cadranno i punti *B C* dalla stessa parte *BC* della retta *MAN*, e il punto *D* dalla parte contraria *FG*; e però sono dalla stessa parte i tre punti *B E C*, e dalla parte contraria gli altri tre *F D G*. Pertanto se non è uguale l'angolo *BAE*

all'angolo *EAC*, seghisi l'angolo *BAC* colla retta *AK*, sicchè uguale all'angolo *EAC* sia l'angolo *BAK*. Cadrà ancora il punto *K* dalla parte *BEC* della retta *MAN*. Applichinsi ora nella direzione *FC* uguale alla forza *P* la forza *H*, che tenda dall'*A* verso l'*F*, e nella direzione *GB* uguale alla forza *Q* la forza *I*, che tenda dall *A* verso il *G*, e nella direzione *AK* uguale alla forza *R* la forza *S* che tenda dall'*A* verso il *K*. Sarà dunque l'*FAG* l'angolo alla tendenza delle forze *H I*, il *GAK* l'angolo alla tendenza delle forze *I S*, ed il *KAF* l'angolo alla tendenza delle forze *S H*. E poichè uguale è la forza *P* all'una e all'altra delle forze *Q H*, sarà la forza *Q* uguale alla forza *H*; e sono ancora direttamente contrarie; perocchè essendo applicate secondo la comune direzione *FC*, la forza *Q* tende dall'*A* verso il *C*, mentre l'altra forza *H* tende dall'*A* verso l'*F*. Esseno sono dunque fra loro in equilibrio le forze *Q H*. Allo stesso modo si proverà che sono fra loro in equilibrio le forze *P I*. Di nuovo perchè uguale è l'angolo *BAK* all'angolo *EAC*, e l'angolo *EAC* all'angolo opposto al vertice *FAD*; quindi uguale sarà l'angolo *FAD* all'angolo *BAK*. Pongasi comune l'angolo *FAB*. Uguale egli è dunque tutto l'angolo *DAB* a tutto l'angolo *KAF*. In oltre essendo uguale l'angolo *EAC* all'angolo *BAK*, tolto l'angolo comune *EAK*; sarà l'angolo rimanente *KAC* uguale all'angolo rimanente *BAE*. Ma uguale è l'angolo *BAE* all'angolo *DAG* opposto al vertice. Adunque ancora l'angolo *DAG* è uguale all'angolo *KAC*. Pongasi comune l'angolo *GAC*. Tutto dunque l'angolo *CAD* è uguale a tutto l'angolo *GAK*. L'angolo poi *BAC* è uguale all'angolo opposto al vertice *FAG*. Sonovi dunque fra loro in equilibrio tre forze *P Q R* applicate secondo le direzioni *GB FC DE* segantisi nel punto *A*; e le *H I S* sono tre altre forze uguali alle forze *P Q R*, una all'altra, cioè la forza *H* alla forza *P*, la forza *I* alla forza *Q*, e la forza *S* alla forza *R*, le quali tre forze sono applicate secondo tre direzioni *FC GB AK* pure segantisi nel punto *A*; e si è dimostrato l'angolo *FAG* alla tendenza delle forze *H I* uguale all'angolo *BAC* alla tendenza delle forze *P Q* ad esse uguali, l'angolo *GAK* alla tendenza delle forze *I S* uguale all'angolo *CAD* alla tendenza delle forze *Q R* ad esse ugua-

li, e l'angolo *KAF* alla tendenza delle forze *S H* uguale all'angolo *DAB* alla tendenza delle forze *R P* ad eſſe uguali. Eſſeno dunque ſono ancora fra loro in equilibrio le forze *H I S*; per conſeguenza tutte le ſei forze *P Q R H I S* ſono fra loro in equilibrio: delle quali ſi è dimoſtrata la forza *P* in equilibrio colla forza *I*, e la forza *Q* colla forza *H*. La forza dunque rimanente *R* è in equilibrio colla forza rimanente *S*; e perciò le forze *R P* ſono direttamente contrarie, ed avranno una comune direzione. Retta è dunque la linea *DAK*. Ma è retta ancora la *DAE*. Quindi le rette *DAK DAE* avranno il comun ſegamento *DA*; il che è un aſſurdo. Non è dunque l'angolo *BAE* diſuguale all' angolo *EAC*, e però ſarà ad eſſo uguale. Laonde l'angolo *BAC* è diviſo per mezzo dalla retta *ED*; il che convenia dimoſtrare.

Dimand. 3. Comun. Conc. 3. Comun. Conc. 4.

Corollario.

Quindi ſe una forza ſia equivalente a due forze fra loro uguali, e le direzioni di tutte e tre ſi ſeghino in un punto; la direzione della forza equivalente ſegherà per mezzo l'angolo alla tendenza delle forze uguali; imperciocchè applicata ſecondo la direzione della forza equivalente altra forza ad eſſa uguale e direttamente contraria, queſta colle due prime forze ſi equilibrera (*a*).

Proposizione 12.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio ſi ſeghino in un punto, e ſieno diſuguali due qualunque di eſſe

(*a*) Queſto Corollario contiene una domanda di *Daniel Bernoulli*, che ei eſprime così. *Potentia ſimplex, quæ æquivalet duabus potentiis æqualibus, æqualiter verſus utramque inclinat, id eſt, ipſius directio ſecat bifariam angulum comprehenſum inter directiones duarum potentiarum*. Ma io dirò qui di nuovo, che è ſuperfluo richiedere quello che ſi può dimoſtrare. Poi di paſſaggio oſſerverò che *Bernuolli* non ſi ſpiega abbaſtanza quando aſſeriſce che la direzione della forza equivalente debbe ſegar per mezzo l'angolo compreſo fra le direzioni delle due potenze, poichè queſte due direzioni ſegandoſi fanno quattro angoli. Quale di queſti quattro è quello che ſi ha da intendere ſegato per mezzo della direzione della forza equivalente? La mia ſettima definizione ſicura molto il modo di enunciare queſta vogliamola domanda o propoſizione.

forze, la direzione della terza forza ſegherà l' angolo alla tendenza delle due prime forze, in modo che alla direzione della forza maggiore corriſponderà il minore ſegamento.

Fig. 12 Sieno fra loro in equilibrio le tre forze *PT* *Q* *R* applicate ſecondo le direzioni *AB* *AC* *AD* ſegantiſi nel punto *A*; e tendano, la forza *PT* nella propria direzione *AB* dall' *A* verſo il *B*, la forza *Q* nella propria direzione *AC* dall' *A* verſo il *C*, e la forza *R* nella propria direzione *AD* dall' *A* verſo il *D*. E ſia diſuguale la forza *PT* alla forza *Q*, e di eſſa maggiore. Adunque la direzione *DA* (prolungata ſe occorre) della forza *R* ſegherà l' angolo *BAC* alla tendenza
Prop. 10. delle forze *PT* *Q*. Dico che lo ſegherà in modo che il ſegamento *BAE*, che corriſponde alla direzione *AB* della forza maggiore *PT*, ſarà minore del ſegamento *EAC*.

Imperocchè poichè la forza *PT* è maggiore della forza *Q*,
Dimand. 1. quindi intendaſi diviſa la forza *PT* nelle forze *PS* *ST*, delle quali la forza *PS* ſia uguale alla forza *Q*. E perchè le forze *PT* *Q* ſono in equilibrio colla forza *R*, non ſaranno le forze *PS* *Q* in equilibrio colla forza *R*. Di nuovo poichè le forze *PS* *Q* ſono applicate ſecondo le direzioni
Dimand. 2. *AB* *AC* ſegantiſi nel punto *A*; quindi vi ſarà certamente certa forza applicata ſecondo certa direzione paſſante pel punto *A*, che con eſſe forze *PS* *Q* ſi equilibrerà. Sia la *H* queſta forza; la retta *FG* che paſſa pel punto *A* ſia la ſua direzione; e preſi dall' una e dall' altra parte del punto *A* nella *FG* i due punti *F* *G*, tenda la forza *H* nella propria direzione *FG* dall' *A* verſo l' *F*. Si applichi finalmente ſecondo la ſteſſa direzione *FG* la forza *I* uguale alla forza *H* e direttamente contraria, sì che tenda dall' *A* verſo il *G*. Egli è manifeſto che il punto *G* cadrà dalla ſteſſa parte de' punti *B* *C*, e il punto *F* da parte contraria. E poichè ſono fra loro in equilibrio le tre forze *PS* *Q* *H*,
Prop. 11. delle quali la forza *PS* è uguale alla forza *Q*; quindi la direzione *FAG* ſegherà per mezzo l' angolo *BAC* alla tendenza delle forze *PS* *Q*; e però ſarà l' angolo *BAG* la metà dell' angolo *BAC*. Oltre a ciò ſarà la forza *I*, che è uguale e direttamente contraria alla forza *H*, equivalente alle forze *PS* *Q*. Di nuovo poichè ſono fra loro in equilibrio le forze *R* *PT* *Q*; ed equivalente è la forza *PT* alle forze

PS ST; quindi saranno ancora fra loro in equilibrio le forze *R PS ST Q*. Ma si è dimostrata la forza *I* equivalente alle forze *PS Q*. In equilibrio sono adunque ancora le forze *R ST I* applicate secondo le direzioni *AD AB FG* segantisi nel punto *A*, e tendenti, la forza *R* dall' *A* verso il *D*, la forza *ST* dall' *A* verso il *B*, e la forza *I* dall' *A* verso il *G*. Adunque la direzione *DAE* della forza *R* segherà l' angolo *BAG* alla tendenza delle due forze *ST Q*. Minore egli è dunque l' angolo *BAE* dell' angolo *BAG*, ossia della metà dell' angolo *BAC*; laonde l' angolo rimanente *EAC* sarà di essa metà maggiore. L' angolo dunque *BAE* è minore dell' angolo *EAC*; il che convenia dimostrare. Comun. Conc. 4. Prop. 10.

COROLLARIO.

E però se una forza sia equivalente a due forze fra loro disuguali, e le direzioni di tutte e tre si seghino in un punto; la direzione della forza equivalente segherà l' angolo alla tendenza delle forze disuguali, in modo che alla direzione della forza maggiore corrisponderà il minore segamento; imperocchè applicata nella direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 13.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, e da un punto preso nella direzione di una si conducano linee rette parallele alle direzioni dell' altre due forze, onde costituire un parallelogrammo, ed una delle due forze sia uguale all' altra; ancora il lato del parallelogrammo, che giace sulla direzione di una, sarà uguale al lato che giace sulla direzione dell' altra; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Le direzioni *AF AG AD* delle forze *P Q R* fra loro in equilibrio si seghino nel punto *A*; e tenda la forza *P* dall' *A* verso l' *F*, la forza *Q* dall' *A* verso il *G*, e la forza *R* dall' *A* verso il *D*. Saranno gli *FAG GAD DAF* gli angoli alla tendenza di due a due delle forze *P Q R*; e la direzione Fig. 13 e 14

AD della forza *R* segherà l'angolo *FAG* alla tendenza delle due forze *P* *Q*. Prendasi nella *AD* un punto *E*, da cui si tirino parallele alle direzioni *AF* *AG* le rette *EC* *EB* onde costituire il parallelogrammo *EBAC*. Dico che se uguale è la forza *P* alla forza *Q*, uguale sarà ancora il lato *AB* al lato *AC*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Imperocchè sia uguale la forza *P* alla forza *Q*. Dico che il lato *AB* è uguale al lato *AC*. Poichè essendovi tre forze *P* *Q* *R* applicate secondo le direzioni *AF* *AG* *AD* segantisi nel punto *A*, delle quali uguale è la forza *P* alla forza *Q*;
Prop. 11. quindi la direzione della terza forza *Q* segherà per mezzo l'angolo *FAG* alla tendenza delle forze *P* *Q*. L'angolo dunque *BAE* è uguale all'angolo *EAC*. Ma uguale è l'angolo *EAC* all'angolo alterno *AEB*. E però sarà l'angolo *BAE* uguale all'angolo *AEB*; laonde uguale al lato *AB* è il lato *BE*. Ma il lato *BE* è uguale al lato *AC*. Adunque ancora il lato *AB* sarà uguale al lato *AC*. Quindi se uguale è la forza *P* alla forza *Q*, uguale sarà pure il lato *AB* al lato *AC*.

Sia ora la forza *P* maggiore della forza *Q*. Dico di nuovo che maggiore è ancora il lato *AB* del lato *AC*. Poichè essendovi tre forze *P* *Q* *R* applicate secondo le direzioni *AF* *AG* *AD* segantisi nel punto *A*, delle quali maggiore è la forza *P* della forza *Q*; quindi la direzione della terza forza *R* segherà per modo l'angolo *FAG* alla tendenza delle forze *P* *Q*, che il segamento corrispondente alla direzione *AF* della forza maggiore *P* sarà minore del segamento rimanente. L'angolo adunque *BAE* è minore dell angolo *EAC*. Ma l'angolo *EAC* è uguale all'angolo alterno *AEB*. Adunque ancora l'angolo *BAE* è minore dell'angolo *AEB*; e perciò minore il lato *BE*, cioè il lato *AC*, del lato *AB*; laonde il lato *AB* sarà maggiore del lato *AC*. Quindi se la forza *P* sia maggiore della forza *Q*, maggiore sarà ancora il lato *AB* del lato *AC*. Allo stesso modo proverassi che se minore sia la forza *P* della forza *Q*, minore sarà ancora il lato *AB* del lato *AC*. Si è poi dimostrato che se uguale è la forza *P* alla forza *Q*, uguale è ancora il lato *AB* al lato *AC*. Se adunque la forza *P* sia uguale alla forza *Q*, uguale è ancora il lato *AB* al lato *AC*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore; il che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE

PROPOSIZIONE 14.

Se due forze le cui direzioni si segano in un punto sieno in equilibrio con due forze le cui direzioni si segano in altro punto; e le prime forze sieno contrarie alle seconde, una all' altra; e tutte e quattro le direzioni cadano nel piano medesimo per costituire un parallelogrammo; la linea retta, che giunge i punti dei detti segamenti, segherà gli angoli alla tendenza delle prime e delle seconde forze; e se in oltre una delle prime o delle seconde forze è uguale all' altra, ancora il lato del parallelogrammo giacente sulla direzione di una sarà uguale al lato giacente sulla direzione dell' altra; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Le due forze *P Q* applicate secondo le direzioni *AB* Fig. 15 16
AD che si segano nel punto *A* sieno in equilibrio colle due forze *R S* applicate secondo le direzioni *CF CE*, che si segano nel punto *C*. Sieno poi le forze *P Q* contrarie alle forze *R S*, una all' altra, cioè la forza *P* alla forza *R*, e la forza *Q* alla forza *S*; onde avvenga che sia parallela la direzione *AB* alla direzione *CF*, e la direzione *AD* alla direzione *CE*; ma la forza *P* tenda dall' *A* verso il *B*, la Dimand. 4
forza *Q* dall' *A* verso il *D*, la forza *R* dal *C* verso l' *F*, e la forza *S* dal *C* verso l' *E*. Cadano in oltre le quattro direzioni *AB AD CF CE* nel medesimo piano, e costituiscano il parallelogrammo *AICH*. Dico che la retta che unisce i punti *A C* sega l' angolo *BAD* alla tendenza delle forze *P Q*, e ancora l' angolo *ECF* alla tendenza delle forze *R S*; e che se uguale è la forza *P* alla forza *Q*, uguale sarà ancora il lato *AI* al lato *AH*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Imperocchè poichè le forze *P Q* sono applicate secondo le direzioni *AB AD* segantisi nel punto *A*; quindi vi sarà Dimand. 2
certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto *A*, la quale colle forze *P Q* si equilibrerà. Parimenti poichè le due forze *R S* sono applicate secondo le direzioni *CF CE* segantisi nel punto *C*; quindi vi sarà certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto *C*, che colle forze *R S* si equilibrerà. Sia la *T* la forza, che ap-

plicata secondo la direzione *AG* passante pel punto *A* colle forze *P Q* si equilibri; e la *V* sia la forza che applicata secondo la direzione *CK* passante pel punto *C* colle forze *R S* si equilibri. E poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze *P Q T*, le cui direzioni *AB AD AG* si segano nel punto *A*; segherà la direzione *AG* della forza *T* l' angolo
Prop. 10 *BAC* alla tendenza delle due forze *P Q*. Allo stesso modo si proverà che la direzione *CK* della forza *V* segherà l' angolo *ECF* alla tendenza delle due forze *R S*. Ora perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze *P Q T*, e sono an-
Comun. Conc. 3 cora fra loro in equilibrio le altre tre forze *R S V*; quindi saranno fra loro in equilibrio le sei forze *P Q T R S V*; delle quali si pongono fra loro in equilibrio le quattro for-
Comun. Conc. 4 ze *P Q R S*. Elleno sono adunque fra loro in equilibrio ancora le forze rimanenti *T V*; e però le forza *T* è uguale
Comun. Conc. 2 e direttamente contraria alla forza *V*; laonde avranno esse una comune direzione; i punti adunque *A G C K* sono nella stessa linea retta, cioè in quella che giunge i punti *A C*; e però la retta che giunge i punti *A C* segherà l' uno e l' altro degli angoli *BAD ECF*. Di nuovo perchè le direzioni *AB AD AG* delle tre forze *P Q T* si segano nel punto *A*, e dal punto *C* preso nella direzione *AG* della forza *T* si sono condotte le linee rette *CF CE* parallele alle direzioni *AB AD* dell' altre due forze *P Q*, e si è costituito il parallelogrammo *AICH*; quindi se uguale è la forza *P* alla
Prop. 13 forza *Q*, uguale ancora sarà il lato *AI* al lato *AH*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore; il che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE 15.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio seghinsi in un punto, e da un punto preso in una si conducano rette parallele all' altre due direzioni, onde costituire un parallelogrammo; le tre forze saranno fra loro in proporzionalità ordinata coi lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa alla retta che giace sulla propria direzione.

Fig. 17 18 Le direzioni *Ae Aa Ab* delle tre forze *X P Z* fra loro in

equilibrio feghinsi nel punto *A*; e la forza *X* tenda dall' *A* verso l' *e*, la forza *P* dall' *A* verso l'*a*, e la forza *Z* dall' *A* verso il *b*, sicchè gli *eAa aAb bAe* sieno gli angoli alla tendenza di due a due delle dette forze. Nella direzione Prop. 10
poi *Ae*, che segherà l'angolo *aAb* alla tendenza delle forze *P Z*, prendasi il punto *D*, da cui parallele all' altre due direzioni *Aa Ab* tirinsi le rette *DC DB*, onde costituire il parallelogrammo *ABDC*. Dico, che le forze *X P Z* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AD AB AC*, e che ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione; cioè la forza *X* omologa alla retta *AD*, la forza *P* omologa alla retta *AB*, e la forza *Z* omologa alla retta *AC*.

Poichè prendansi della forza *P* e della retta *AB* le ugualmente moltiplici, cioè la forza *QR* e la retta *AE*, e della forza *Z* e della retta *AC* prendansi altre in qualsivoglia modo ugualmente moltiplici, cioè la forza *STV*, e la retta *AG*; e si pongano le rette *AE AG* sopra i lati *AB AC* del parallelogrammo *ABDC*. E perchè quantuplice è la forza *QR* della forza *P*, tantuplice è la retta *AE* della retta *AB*; quindi dividasi la forza *QR* nelle forze *Q R* uguali alla forza *P*, e la retta *AE* nelle rette *AB BE* uguali alla retta *AB*. Uguale ella è dunque la moltitudine delle forze *Q R* alla moltitudine delle rette *AB BE*. Similmente perchè quantuplice è la forza *STV* della forza *Z*, tantuplice è la retta *AG* della retta *AC*; quindi dividasi la forza *STV* nelle forze *S T V* uguali alla forza *Z*, e la retta *AG* nelle rette *AC CF FG* uguali alla retta *AC*. Uguale sarà dunque la moltitudine delle forze *S T V* alla moltitudine delle rette *AC CF FG*. Ora si compiano i parallelogrammi *AK AH CI FK AO BK*. E perchè sono uguali fra loro le rette *AC CF FG*, saranno pure uguali fra loro le rette *EH HI IK*. La retta adunque *EI* è doppia della *EH*, ossia della *BD*. Ma ancora la *AE* è doppia della *AB*; laonde egli è come la *EI* alla *BD*, così la *EA* alla *AB*. La retta dunque *AD* passa pel punto *I*. Tirinsi le rette *BH CK FO*, e protragansi, se così piaccia, da una parte e dall' altra. E poichè egli è come la *EB* alla *BA* così la *EH* alla *HI*; quindi parallela alla retta *AI* è la retta *BH*. Allo stesso modo si proverà che parallela alla *CK* è la *FO*. La retta poi *AI* è pa-

rallela alla *CK*, perchè esse uniscono le linee rette *AC IK* fra loro uguali e parallele. Elleno sono adunque tutte fra
D.m and. 1 loro parallele la rette *BH AI CK FO*. Pertanto applichinsi secondo le direzioni *Aa Ab* le forze *QR STV*, cioè secondo la direzione *Aa* la forza *QR* direttamente parziale alla forza *P*, e secondo la direzione *Ab* la forza *STV* direttamente parziale alla forza *Z*. Similmente si applichino altre forze secondo le direzioni *KG KE*, cioè secondo la direzione *KG* la forza *qr* uguale e contraria alla forza *RQ*, e secondo la direzione *KE* la forza *stu* uguale e contraria alla forza *STV*, e intendansi divise, la forza *qr* nelle forze *q r* uguali di moltitudine e di grandezza alle forze *Q R*, e la forza *stu* nelle forze *s t u* uguali di moltitudine e di grandezza alle forze *S T V*. Indi secondo la direzione *BO* si applichino le forze *d* Δ una parziale, l' altra contraria, ma amendue uguali alla forza *Z*, vale a dire la forza *d* uguale e parziale alla forza *Z*, e ad essa uguale e contraria la forza Δ. Si applichino ancora secondo la direzione *CH* le forze *l* L, e secondo la direzione *FI* le forze *y Υ* tutte uguali alla forza *P*, ma ad essa sieno parziali le forze *l y* e contrarie le forze *L Υ*. Per fine si applichi secondo la direzione *BH* le forze *M m*, secondo la direzione *CK* le forze *N n*, secondo la direzione *FO* le forze Γ *g*, tutte uguali alla forza *X*; ma ad essa sieno parziali le forze *M N* Γ e contrarie le forze *m n g*; la forza poi *x* sia uguale e direttamente contraria alla forza medesima *X*.

E poichè sono applicate la forza *M* secondo la direzione *BH*, e la forza *Q* secondo la direzione *Ba*, e la forza *d* secondo la direzione *BO*; quindi sono le *M Q d* tre forze applicate secondo tre direzioni *BH Ba BO* segantisi nel *B*. Tre altre forze sono ancora le *X P Z* applicate secondo le tre direzioni *Ae Aa Ab* segantisi nel punto *A*, le quali sono uguali alle prime forze *M Q d* l' una all' altra, cioè la forza *X* alla forza *M*, la forza *P* alla forza *Q*, e la forza *Z* alla forza *d*. Oltre a ciò parziale essendo la forza *X* alla forza *M*, e la forza *Z* alla forza *d*, tenderanno le forze *X M* nelle direzioni parallele *Ae BH*, e le forze *Z d* nelle direzioni parallele *Ab BO* dalla stessa parte della retta *AB*, che unisce i punti *A B* delle sezioni già dette. Tendendo adunque nella direzione *Ae* la forza *X*

dall' *A* verso l' *e*, tenderà nella direzione *BH* la forza *M* dal *B* verso l' *h*; così tendendo nella direzione *Ab* la forza Z dall' *A* verso il *b*, tenderà nella direzione *BO* la forza *d* dal *B* verso il *p*. Le forze poi direttamente parziali *P* *Q* tendono dalla stessa parte nella comune direzione *Aa*, dall'*A* verso l' *a*. Uguale egli è dunque l' angolo *eAa* alla tendenza delle forze *X* *P* all' angolo *hBa* alla tendenza delle forze *M* *Q*, e così l' angolo *aAb* alla tendenza delle forze *P* *Z* all' angolo *aBp* alla tendenza delle forze *Q* *d*; perocchè cadendo una retta sopra rette parallele, l' angolo esteriore è uguale all' angolo interiore ed opposto. L' angolo poi ancora *bAe* alla tendenza delle forze *Z* *X* è uguale all' angolo *pBh* alla tendenza delle forze *d* *M*, perocchè se due linee che si toccano sieno parallele a due altre linee che si toccano, comprendono angoli uguali. Quindi essendo fra loro in equilibrio le tre forze *X* *P* *Z*, saranno ancora fra loro in equilibrio le tre forze *M* *Q* *d*. Per la stessa ragione sono fra loro in equilibrio le tre forze *N* *l* *T* applicate secondo le direzioni *CK* *CH* *Cb* segantisi nel *C*; e così ancora le tre forze Γ *y* *V* applicate secondo le direzioni *FO* *FI* *Fb* segantisi nell' *F*. E perchè sono in equilibrio le forze *X* *P* *Z*, e alle *P* *Z* sono uguali e direttamente parziali le forze *R* *S*; quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le forze *X* *R* *S*. Per il che essendo in equilibrio la forza *M* colle forze *Q* *d*, la forza *X* colle forze *R* *S*, la forza *N* colle forze *l* *T*, e la forza Γ colle forze *y* *V*; quindi saranno ancora in equilibrio le forze *M* *X* *N* Γ colle forze *Q* *d*, *R* *S*, *l* *T*, *y* *V*. Ma le forze *Q* *R* fanno la forza *QR*. e le forze *S* *T* *V* la forza *STV*. Adunque le forze *M* *X* *N* Γ sono in equilibrio colle forze *QR* *STV* *d* *l* *y*; le forze poi *m* *x* *n* *g* sono uguali e direttamente contrarie alle forze *M* *X* *N* Γ. Equivalenti sono adunque le forze *m* *x* *n* *g* alle forze *QR* *STV* *d* *l* *y*. Di nuovo *m* *L* *s* sono tre forze applicate secondo le tre direzioni *BH* *HC* *HE* segantisi nel punto *H*, e le *X* *P* *Z* sono tre altre forze applicate secondo le tre direzioni *Ae* *Aa* *Ab* segantisi nel punto *A*, le quali sono uguali alle prime tre forze *m* *L* *s*, una all'altra, cioè la forza *X* alla forza *m*, la forza *P* alla forza *L*, e la forza *Z* alla forza *s*, oltre a ciò (uniti i punti *A* *H* del-

Dimand 3

Comun. Conc. 3

Prep. 7

le ſezioni già dette colla retta *AH*) contraria eſſendo la forza *X* alla forza *m*, la forza *P* alla forza *L*, e la forza *Z* alla forza *s*, tenderanno le forze *X m* nelle direzioni parallele *Ae BH*, le forze *P L* nelle direzioni parallele *Aa HC*, e le forze *Z s* nelle direzioni parallele *Ab HE* da parti contrarie della retta ſteſſa *AH*. Tendendo adunque la forza *x* dall'*A* verſo l'*e*, tenderà la forza *m* dall'*H* verſo il Ψ; così tendendo la forza *P* dall'*A* verſo l'*a*, tenderà la forza *L* dall'*H* verſo il Π; e tendendo la forza *Z* dall'*A* verſo il *b*, tenderà la forza *s* dall'*H* verſo il Σ. Ma ſe due rette che ſi toccano ſieno parallele a due rette che ſi toccano, comprendono angoli uguali. Gli angoli adunque *eAa aAb bAe* alla tendenza di due a due delle forze *X P Z* ſono uguali agli angoli Ψ*H*Π Π*H*Σ Σ*H*Ψ alla tendenza di due a due delle forze *m L s*. Quindi eſſendo fra loro in equilibrio le

Dimand. 3 forze *X P Z*; ſaranno pure fra loro in equilibrio le forze *m L s*. Allo ſteſſo modo proveraſſi eſſere fra loro in equilibrio le forze *x Υ t* applicate ſecondo le direzioni *AI IF IE* ſegantiſi nell'*I*; e così le forze *n q u* applicate ſecondo le direzioni *CK KG KE* ſegantiſi nel *K*; e le tre forze *g r* Δ applicate ſecondo le direzioni *OF OG OB* ſegantiſi nell'*O*. Per il che eſſendo in equilibrio la forza *m* colle forze *L s*, la forza *x* colle forze *Υ t*, la forza *n* colle forze *q u*, e la forza *g* colle forze *r* Δ; quindi ſaranno in equilibrio le for-

Comun. Conc. 3 ze *m x n g* colle forze *L s*, *Υ t*, *q u*, *r* Δ. Ma le forze *s t u* fanno la forza *stu*, e le forze *q r* la forza *qr*. In equilibrio ſono dunque le forze *m x n g* colle forze *qr stu* Δ *L Υ*. Si è poi di ſopra dimoſtrato che le forze *m x n g*

Defin. 10 ſono equivalenti alle forze *QR STV d l y*. Eſſeno ſono dunque in equilibrio le forze *QR STV d l y* colle forze *qr stu* Δ *L Υ*; delle quali ſono fra loro in equilibrio la forza *d* colla forza Δ, la forza *l* colla forza *L*, e la forza *y* colla

Comun. Conc. 4. forza *Υ*; perocchè ſono uguali e contrarie. Laonde le forze rimanenti *QR STV* ſono in equilibrio colle forze rimanenti *qr stu*. Sonovi dunque due forze *QR STV* applicate ſecondo le direzioni *Aa Ab* che ſi ſegano nel punto *A* in equilibrio colle forze *qr stu* applicate ſecondo le direzioni *KG KE* che ſi ſegano nel punto *K*; e le prime forze ſono contrarie alle

seconde, una all'altra, cioè la forza *QR* alla forza *qr*, e la forza *STV* alla forza *stu*; e tutte e quattro le direzioni *Aa Ab KG KE* cadono nello stesso piano e costituiscono il parallelogrammo *AEKG*. Quindi se uguale è la forza *QR* alla forza *STV*, uguale ancora sarà il lato *AE* al lato *AG*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore. Sonovi pertanto quattro grandezze, cioè le due forze *P Z* e le due rette *AB AC*; e della forza *P* e della retta *AB* si sono prese le ugualmente moltiplici, la forza *QR* e la retta *AE*; e della forza *Z* e della retta *AC* si sono prese altre in qualsivoglia modo ugualmente moltiplici, la forza *STV* e la retta *AG*; e si è dimostrato che se la forza *QR* è maggiore della forza *STV*, maggiore ancora è la retta *AE* della retta *AG*; se uguale, uguale; e se minore, minore. Egli è dunque come la forza *QR* alla forza *STV*, così la retta *AB* alla retta *AC* (*a*).

Prop. 14

Euclide Defin. 5 Lib. 5.

Protraggansi ora, se occorre, le rette *Aa CK* finchè s'incontrino nel punto Φ, e dal punto Φ parallela alla *AC* tirisi la ΦΘ onde compiere il parallelogrammo *AC*ΦΘ. Uguale sarà la *A*Θ alla *AD*, perocchè uguale e simile è il triangolo *A*ΦΘ al triangolo *ABD*. Nello stesso modo poi di prima dimostrerassi, che egli è come la forza *Z* alla forza *X*, così la retta *AC* alla retta *A*Θ, ovvero alla retta *AD*. Per il che essendosi dimostrato che come la forza *P* alla forza *Z*, così è la retta *AB* alla retta *AC*, e come la forza *Z* alla forza X, così la retta *AC* alla retta *AD*; quindi per uguaglianza di proporzione ordinata egli sarà ancora come la forza *P* alla forza *X*, così la retta *AB* alla retta *AD*. Le forze adunque *X P Z* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AD AB AC*; e ciascuna forza è omologa alla retta, che giace sulla propria direzione; il che convenia dimostrare.

(*a*) Molti si sono scagliati contro questa definizione d'Euclide da me citata, sostenendo ch'ella è piuttosto proposizione che definizione. Senza entrare in tale esame osserverò solamente, che siccome presa ella o sotto uno o sotto l'altro aspetto non contiene meno una verità indubitabile, così sarà esatta la dimostrazione del mio teorema a tale verità appoggiantesi.

COROLLARIO 1.

E perchè le forze *X P Z* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AD AB AC*, e uguale alla *AC* è la *BD*; quindi saranno in proporzionalità ordinata le forze *X P Z* co' lati *AD AB BD* del triangolo *ABD*. Ma due lati di un triangolo, comunque presi, sono maggiori del rimanente. Adunque ancora due delle forze *X P Z*, comunque prese, sono maggiori della forza rimanente: laonde se tre forze le cui direzioni si segano in un punto sieno fra loro in equilibrio, due delle forze, comunque prese, saranno maggiori della rimanente.

COROLLARIO 2.

Da ciò si fa manifesto ancora che se una forza sia equivalente a due forze; e le direzioni di tutte e tre si seghino in un punto; e da un punto preso in una direzione si conducano linee rette parallele all' altre due direzioni onde costituire un parallelogrammo; la forza equivalente e le due altre forze saranno in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa alla retta che giace sulla propria direzione; ed in oltre due forze comunque prese saranno maggiori della forza rimanente. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e direttamente contraria; questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 16.

Se le direzioni di tre forze si seghino in un punto, e sieno costituite nello stesso piano; e ciascuna forza tenda nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti; e da un punto preso in una direzione condotte linee rette parallele all' altre due direzioni onde costituire un parallelogrammo, sieno le tre forze in proporzionalità ordinata coi lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo,

mo, e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione, saranno le tre forze fra loro in equilibrio (a).

Le direzioni *AE AK AL* delle forze *R P Q* seghinsi nel punto *A*, e sieno nello stesso piano costituite. Tenda poi ciascuna delle forze *R P Q* nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti; la forza *R* tenda dall' *A* verso l' *E*, la forza *P* dall' *A* verso il *K*, e la forza *Q* dall' *A* verso l' *L*; e da un punto *D* preso nella direzione *EA* condotte le rette *DC DB* parallele alle rette *AK AL* onde costituire il parallelogrammo *ABCD*, sieno le forze *R P Q* in proporzionalità ordinata colle rette *AD AB AC*, e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Dico che sono fra loro in equilibrio le tre forze *R P Q*. Fig. 19 20

Imperocchè poichè le due forze *P Q* sono applicate secondo le direzioni *AK AL* segantisi nell' *A*; quindi saravvi certamente certa forza applicata secondo certa direzione passante pell' *A*, che colle forze medesime *P Q* si equilibrerà. Sia questa la forza *T*; e se è possibile non sia la forza *T* applicata secondo la direzione *AE*, ma secondo un' altra direzione *AH*, che passi però pell' *A*. Segherà adunque la direzione *AH* l' angolo *BAC* alla tendenza delle forze *P Q*, e il suo opposto al vertice. E perchè sono uguali a due retti gli angoli *BAC ACD*, saranno minori di due retti gli angoli *GAC ACD*; laonde le rette *AH CD* (prolungate se occorre) rincontrerannosi insieme; si rincontrino nel punto *G*, e dal *G* parallela alla *AL* tirisi la *GF*. Pertanto poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze *T P Q* applicate secondo le direzioni *AH AK AL* segantisi nell' *A*; e dal punto *G* preso nella direzione *AH* si sono condotte linee Dimand. 2

(a) Alcuni fra i moderni matematici sogliono omettere, forse come superflue, le proposizioni inverse. Ciò andrebbe bene se una qualunque proposizione fosse sempre invertibile. Non sono però tanto da condannarsi per questa mancanza gli autori di memorie, quanto quelli di elementi; e perciò io mi sono liberato da questa taccia dimostrando tutte quelle proposizioni inverse, che so avere grande uso nella statica, com' è la presente, nella quale credo di avere impiegato un non ispregevole artifizio nella dimostrazione, che è in parte diretta, e in parte per assurdo.

rette parallele all' altre due direzioni onde coſtituire il parallelogrammo *AFGC*; quindi le tre forze *T P Q* ſaranno in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo *AFGC*, e ciaſcuna forza ſarà omologa alla retta che giace ſulla propria direzione. Egli è dunque come la forza *P* alla forza *Q*, così la retta *AF* alla retta *AC*. Ma come la forza *P* alla forza *Q*, così ſi pone la retta *AB* alla retta *AC*; laonde egli è come l' *AB* alla *AC*, così l' *AF* alla *AC*. Uguale è dunque la *AB* alla *AF*; la minore alla maggiore, il che è un aſſurdo. Non è dunque la forza *T* applicata ſecondo la direzione *AH* in equilibrio colle forze *P Q*. Similmente dimoſtreremo che ſecondo qualſivoglia altra direzione, paſſante pel *A*, applicata la forza *T*, fuorchè ſecondo la direzione *AE*, ella non può eſſere in equilibrio colle forze *P Q*. Ella è dunque la retta *AE* la direzione della forza *T*, e però hanno una comune direzione le due forze *T R*. E poichè ſono fra loro in equilibrio le forze *T P Q* applicate ſecondo le direzioni *AE AK AL* segantiſi nell' *A*; quindi tenderà la forza *T* nella propria direzione *AE* da parte contraria a quella, cui tendono le forze *P Q*. Ma ſi pone ancora che la forza *R* tenda nella direzione *AE* da parte contraria a quella cui tendono le forze *P Q*. Parziali ſono dunque direttamente le forze *T R*. Di nuovo eſſendo fra loro in equilibrio le forze *T P Q*; egli ſarà proporzionalmente come la forza *T* alla forza *P*, così la retta *AD* alla retta *AB*. Ma egli è ancora come la forza *R* alla forza *P*, così la retta *AD* alla retta *AB*. Adunque le due forze *T R* hanno alla forza *P* la ſteſſa proporzione. Uguale ella è dunque la forza *T* alla forza *R*; ſono poi ancora direttamente parziali; laonde equivalente è la forza *T* alla forza *R*. Ma la forza *T* è in equilibrio colle forze *P Q*; adunque ſarà ancora la forza *R* colle forze *P Q* in equilibrio; il che convenia dimoſtrare.

Prop. 15 — Coroll. 1 Prop. 12 — Defin. 7 — Prop. 3

COROLLARIO.

Quindi è manifeſto che ſe le direzioni di una e di altre due forze ſi ſeghino in un punto, e ſieno coſtituite nello ſteſſo piano; e tendano tutte e tre le forze dalla parte ſteſ-

ſa; e la direzione della prima ſeghi l' angolo della tendenza dell' altre due forze; e da un punto preſo in una qualſivoglia direzione condotte linee rette parallele all' altre due direzioni onde coſtituire un parallelogrammo, ſieno le tre forze in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo medeſimo, e ciaſcuna forza ſia omologa alla retta che giace ſulla propria direzione; ſarà la prima forza equivalente all' altre due. Imperocchè applicata ſecondo la direzione della prima forza una forza ad eſſa uguale e contraria direttamente, tenderà queſta da parte contraria a quella cui tendono le altre due, anzi ciaſcuna delle tre forze da parte contraria a quella cui tendono le due rimanenti; laonde per le coſe nella propoſizione dimoſtrate, ſarà la nuova forza applicata in equilibrio coll' altre due; e però la forza ad eſſa uguale e contraria direttamente, cioè la prima forza, ſarà all' altre due equivalente.

PROPOSIZIONE 17.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio ſi ſeghino in un punto, le tre forze ſaranno in proporzionalità ordinata co' ſeni degli angoli alla tendenza di due a due delle tre forze medeſime, e ciaſcuna forza ſarà omologa al ſeno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti.

Le direzioni *FC ED BK* delle tre forze *P Q R* fra loro in equilibrio ſeghinſi pel punto *A*; e tendano la forza *P* dall' *A* verſo il *C*, la forza *Q* dall' *A* verſo il *D*, e la forza *R* dall' *A* verſo il *B*, ſicchè il *CAD* ſia l' angolo alla tendenza delle forze *P Q*, il *DAB* l' angolo alla tendenza delle forze *Q R*, e il *BAC* l' angolo alla tendenza delle forze *R P*. Dico che le forze *P Q R* ſono in proporzionalità ordinata co' ſeni degli angoli *DAB BAC CAD*, e che ciaſcuna forza è omologa al ſeno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti, cioè la forza *P* omologa al ſeno dell' angolo *DAB*, la forza *Q* al ſeno dell' angolo *BAC*, e la forza *R* al ſeno dell' angolo *CAD*. Fig. 21 e 22

Imperocchè in una direzione *BK* della forza *R* (che ſegherà l' angolo *CAD* alla tendenza dell' altre due forze *P Q*

e però ancora il ſuo oppoſto al vertice) prendaſi qualſivoglia punto *G*, da cui parallele all' altre due direzioni *FC ED* tirinſi le rette *GI GH*, onde compiere il parallelogrammo *GIAH*. Saranno dunque le forze *P Q R* in proporzionalità ordinata colle rette *AH AI AG*, e ciaſcuna forza ſarà omologa alla retta che giace ſulla propria direzione. Di nuovo perchè uguale è l' angolo *HGA* all' angolo alterno *GAI*; quindi uguale ſarà il ſeno dell' angolo *HGA* al ſeno dell' angolo *GAI*, ovvero al ſeno dell' angolo *DAB* ad eſſo *GAI* poſto accanto. E poichè nel triangolo *AHG* egli è proporzionalmente come la *AH* alla *HG*, o alla *AI*, così il ſeno dell' angolo *HGA* al ſeno dell' angolo *HAG*; ma uguale al ſeno dell' angolo *HGA* è il ſeno dell' angolo *DAB*, ed al ſeno dell' angolo *HAG* il ſeno dell' angolo poſto accanto *BAC*; quindi egli è come la *HA* alla *AI*, così il ſeno dell' angolo *DAB* al ſeno dell' angolo *BAC*. Ma egli è ancora come la *AH* alla *AI*, così la forza *P* alla forza *Q*. Adunque egli è come la forza *P* alla forza *Q*, così il ſeno dell' angolo *DAB* al ſeno dell' angolo *BAC*. Oltre a ciò eſſendo come la retta *HG* alla retta *AG*, così il ſeno dell' angolo *HAG* al ſeno dell' angolo *AHG*; ed uguali ſono, la *HG* alla *AI*, il ſeno dell' angolo *HAG* al ſeno dell' angolo *BAC*, e il ſeno dell' angolo *AHG* al ſeno dell' angolo *CAD*; quindi egli ſarà come la *AI* alla *AG*, così il ſeno dell' angolo *BAC* al ſeno dell' angolo *CAD*; ma come la retta *AI* alla retta *AG*, così è la forza *Q* alla forza *R*. Adunque egli è come la forza *Q* alla forza *R*, così il ſeno dell' angolo *BAC* al ſeno dell' angolo *CAD*. Ma ſi è dimoſtrato che egli è ancora come la forza *P* alla forza *Q*, così il ſeno dell' angolo *DAB* al ſeno dell' angolo *BAC*. Sono dunque le forze *P Q R* in proporzionalità ordinata co' ſeni degli angoli *DAB BAC CAD* alla tendenza di due a due delle forze medeſime, e ciaſcuna forza è omologa al ſeno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti; il che convenia dimoſtrare.

Prop. 15

COROLLARIO.

Quindi ſe una forza a due forze ſia equivalente, e le dire-

zioni delle tre forze si seghino in un punto; saranno la forza equivalente e le due forze in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli alla tendenza di due a due delle forze medesime, e ciascuna forza sarà omologa al seno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e contraria direttamente, questa si equilibrerà colle altre due forze; onde per la proposizione saranno la forza applicata e le due forze come i seni degli angoli alla tendenza di due a due delle forze medesime; e la forza applicata è uguale alla prima forza; e i seni de' due angoli alla tendenza della forza applicata con una e l' altra delle due forze sono uguali a' seni de' due angoli alla tendenza della forza equivalente con l' una e l' altra delle due forze; perocchè sono fra loro uguali i seni degli angoli accanto.

PROPOSIZIONE 18.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, e da rette perpendicolari alle tre direzioni si costituisca un triangolo; le tre forze saranno in proporzionalità ordinata co' lati del triangolo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa al lato che alla propria direzione è perpendicolare.

Le direzioni *AB AC AH* delle tre forze *P Q T* seghinsi nel punto *A*; e la forza *P* tenda nella propria direzione *AB* dall' *A* verso il *B*, la forza *Q* nella propria direzione *AC* dall' *A* verso il *C*, e la forza *T* nella propria direzione *AH* dall' *A* verso l' *H*. Saranno li *BAC CAH HAB* gli angoli alla tendenza di due a due delle forze *P Q T*, e ciascuna forza tenderà nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti. Prendansi poi nelle direzioni *AB AC AH* quali si vogliano punti *N I K*, da' quali tirinsi linee rette ad angoli retti alle direzioni medesime *AB AC AH*; la *LN* alla *AB*, la *IO* alla *AC*, e la *MK* alla *AH*; e giungasi la *KN*. E poichè uguali a due retti sono gli angoli *ANL AKM*; quindi saranno minori di due retti gli angoli *KNL NKM*. Le rette adunque *LN MK*, prolungate se occorre, rincontrerannosi insieme. Rin- Fig. 23

contrinsi nell' *E*. Allo stesso modo, giunte le *NI IK*, si proverà che le *LN IO*, e così ancora le *IO MK* si rincontrano insieme. Rincontrinsi le *LN IO* nel *G*, e le *IO MK* nell' *F*. Il triangolo dunque *EGF* ha i suoi lati perpendicolari alle direzioni *AB AC AH*, uno all' altra. Dico ora che le tre forze *P Q T* sono in proporzionalità ordinata co' lati *EG GF FE* del triangolo *EGF*, e che ciascuna forza è omologa al lato, che è alla propria direzione perpendicolare, cioè omologa la forza *P* al lato *EG*, la forza *Q* al lato *GF*, e la forza *T* al lato *FE*.

Imperocchè in una direzione *AH* preso qualsivoglia punto *D*, da esso parallele all' altre due direzioni *AB AC* tirinsi
Prop. 15 le rette *DC DB*, onde costituire il parallelogrammo *ABDC*. Le forze dunque *P Q T* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AB AC AD*. E poichè retti sono gli angoli *AKM ANL*, quindi saranno uguali a due retti ancora gli angoli rimanenti *NAK NEK* del quadrilatero *AKEN*. Ma uguali a due retti sono ancora gli angoli *NAK BAD*. Gli angoli dunque *NAK NEK* sono uguali agli angoli *NAK BAD*. Tolgasi l'angolo comune *NAK*; sarà l'angolo rimanente *NEK*, o dicasi *GEF*, uguale all'angolo rimanente *BAD*. Similmente si dimostrerà che uguale all'angolo *EFG* è l'angolo *CAD*, ovvero l'alterno *ADB*, e all'angolo *EGF* l'angolo *ABD*. Simile egli è dunque il triangolo *EGF* al triangolo *ABD*. Proporzionali adunque sono i lati del triangolo *EGF* ai lati del triangolo *ABD*, ed omologhi i sottesi agli uguali angoli; laonde i lati *EG GF FE* sono in proporzionalità ordinata co' lati *AB BD AD*. Ma uguale alla *BD* è la *AC*. E però sono in proporzionalità ordinata i lati *EG GF FE* colle rette *AB AC AD*. Si è poi dimostrato che sono in proporzionalità ordinata ancora le forze *P Q T* colle rette *AB AC AD*. Elleno sono dunque in proporzionalità ordinata le forze *P Q T* co' lati *EG GF FE* del triangolo *EGF*; e ciascuna forza è omologa al lato che alla propria direzione è perpendicolare; il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se equivalente sia una forza a due forze; e le di-

rezioni di tutte e tre si seghino in un punto; e da rette perpendicolari alle loro direzioni si costituisca un triangolo; le tre forze saranno in proporzionalità co' lati del triangolo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa al lato, che alla propria direzione è perpendicolare. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà, e però saranno in proporzionalità ordinata la forza applicata e le due forze co' lati del triangolo suddetto; dunque ancora la forza equivalente e le due forze.

PROPOSIZIONE 19.

Date di posizione tre direzioni costituite nello stesso piano e segantisi in un punto, e data una forza applicata secondo una di esse direzioni e la tendenza della forza; ritrovare le forze che deggionsi applicare secondo l' altre due direzioni, e le loro tendenze per equilibrare la data forza; e ritrovare ancora le forze che debbonsi applicare alle due direzioni e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la stessa data forza.

Sieno date di posizione le tre direzioni *BK FC ED* costituite in un piano e segantisi nell' *A*; e sia data la forza *R* applicata secondo la direzione *BK*, e la sua tendenza, che sia dall' *A* verso il *B*. Bisogna ritrovare le forze che debbonsi applicare secondo l'altre due direzioni *FC ED*, e le loro tendenze per equilibrare la forza *R*; e ritrovare ancora le forze che debbonsi applicare secondo le direzioni *FC ED* e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la forza *R*. Fig. 24

Prendansi da una parte e dall'altra del punto *A* nella direzione *FC* i punti *F C*, e nella direzione *ED* i punti *E D*. E poichè le due direzioni *FC ED* si segano nell' *A*; quindi faranno le *FC ED* quattro angoli al segamento, cioè i due angoli *CAD EAF* opposti al vertice, e gli altri due *EAC FAD* pure opposti al vertice. Ma la direzione *BK* passa pel punto *A* ed è nello stesso piano costituita colle due direzioni *FC ED*. Segherà adunque la retta *BK* o i due primi angoli al vertice, o gli altri due. Seghi gli angoli *CAD EAF*. E poichè la retta *BK* sega gli angoli *CAD EAF*, cadrà il

punto *B* (a cui dal punto *A* tende nella propria direzione *BK* la forza *R*) o dalla parte in cui sono i punti *E F*, o da quella in cui sono i punti *C D*. Cada dalla stessa parte in cui sono i punti *E F*, e da parte contraria a quella in cui sono i punti *C D*. Ora in una delle direzioni *BK FC ED*, per esempio nella direzione *ED*, prendasi qualsivoglia punto *I*, e dall'*I* parallele all'altre due direzioni *BK FC* tirinsi le rette *IH IG* per compiere il parallelogrammo *AGIH*. La diagonale *AI* dello stesso parallelogrammo *AGIH* giacerà sulla direzione *ED*, il lato *AH* sulla direzione *FC*, e il lato *AG* sulla direzione *BK*. Indi prendansi le forze *P Q*, tali che come la retta *AH* alla retta *AG*, così egli sia la forza *P* alla forza *R*; e come la retta *AI* alla retta *AG*, così egli sia la forza *Q* alla forza *R*; e applichinsi la forza *P* secondo la direzione *FC* e tendente dall'*A* verso il *C*, e la forza *Q* secondo la direzione *ED* e tendente dall'*A* verso il *D*. Tenderà adunque la forza *R* da parte contraria a quella cui tendono le forze *P Q*. Dico pertanto che le forze *P Q* si equilibrano colla forza *R*.

Imperocchè poichè la direzione *BK* della forza *R* sega l'angolo *CAD* alla tendenza delle forze *P Q*, e la forza *R* tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze *P Q*; quindi tenderà ancora la forza *P* nella propria direzione *FC* da parte contraria a quella cui tendono le forze *Q R*, e ancora la forza *Q* tenderà nella propria direzione *ED* da parte contraria a quella cui tendono le forze *R P*. Di nuovo perchè egli è come la forza *P* alla forza *R*, così la retta *AH* alla retta *AG*; ed ancora come la forza *Q* alla forza *R*, così la retta *AI* alla retta *AG*; quindi sono le tre forze *P Q R* in proporzionalità ordinata colle rette *AH AI AG*. Sonovi adunque tre forze *P Q R* applicate secondo le direzioni *FC ED BG* segantisi nell'*A* e costituite nel piano medesimo; e ciascuna forza tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le forze rimanenti; e da un punto *I* preso nella direzione *ED* tirate parallele all' altre due direzioni *FC BK* le linee rette *IH IG* per compiere il parallelogrammo *AHGI*, sonosi dimostrate le forze *P Q R* in proporzionalità ordinata colle rette *AH AI AG*, e ciascuna forza

omologa

omologa alla retta che giace ſulla propria direzione. Elleno ſono dunque le forze *P* *Q* in equilibrio colla forza *R*.

Se poi applichinſi ſecondo le direzioni *FC* *ED* altre due forze *N* *M*, la forza *N* uguale e contraria direttamente alla forza *P*, e la forza *M* uguale e contraria direttamente alla forza *Q*, ſicchè eſſe forze *N* *M* tendano dal punto *A* verſo i punti *F* *E* ſituati dalla ſteſſa parte in cui è il punto *B*, dimoſtreraſſi ſimilmente che alle forze applicate *N* *M* ſarà equivalente la forza *R*.

Date dunque di poſizione le tre direzioni *FC* *BK* *ED* ſegantiſi nell' *A* e coſtituite nel medeſimo piano, e data la forza *R* applicata ſecondo la direzione *BK* e la ſua tendenza dall' *A* verſo il *B*; ſonoſi ritrovate le due forze *P* *Q* che applicate ſecondo l'altre due direzioni *FC* *ED* ſi equilibrano colla forza *R*, e le loro tendenze, quella della forza *P* dall' *A* verſo il *C* e quella della forza *Q* dall' *A* verſo il *D*; e ſi ſono trovate ancora le forze *N* *M* che applicate ſecondo le direzioni *FC* *ED* alla forza medeſima *N* equivalgono, e le loro tendenze, quella della forza *N* dall' *A* verſo l' *F*, e quella della forza *M* dall' *A* verſo l' *E*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 20.

Date di poſizione due direzioni ſegantiſi in un punto, e date due forze applicate ſecondo eſſe direzioni e le loro tendenze; ritrovare una forza che colle prime due forze ſi equilibri, la ſua direzione e la ſua tendenza; e ritrovare ancora una forza che ſia equivalente alle due prime forze, la ſua direzione, e la ſua tendenza.

Sieno date di poſizione le direzioni *FC* *ED*, ſegantiſi nell' *A*, e ſieno date le forze *P* *Q* applicate ſecondo le direzioni *FC* *ED*, e le loro tendenze, cioè preſi nelle direzioni *FC* *ED* da una parte e dall'altra del punto *A* i punti *F* *C* *E* *D*, tendano, la forza *P* dall' *A* verſo il *C*, e la forza *Q* dall' *A* verſo il *D*. Biſogna ritrovare una forza che colle forze *P* *Q* ſi equilibri, la ſua direzione e la ſua tendenza; e ritrovare ancora una forza che alle forze *P* *Q* ſia equivalente, la ſua direzione, e la ſua tendenza. Fig. 25

Dal punto *A* ſopra le direzioni *FC ED* prendanſi comunque le rette *AH AI* alle forze *P Q* proporzionali, e ſia come la forza *P* alla forza *Q*, così la retta *AH* giacente ſulla direzione *FC* alla retta *AI* giacente ſulla direzione *ED*. Pertanto o l'una e l'altra delle rette *AH AI* cadono dal punto *A* verſo le parti *CD*, ovvero *EF*, o una cade dalla parte *CD* e l'altra dalla parte *EF*. Nel primo caſo ſi conducano, dal punto *H* parallela alla *ED* la *HG*, e dal punto *I* parallela alla *FC* la *IG*; e dal punto *A* al punto *G*, ove s'incontrano le rette *HG IG*, ſi tiri la *AG*. Ma nel ſecondo caſo giunta la retta *IH*, ſi conduca dal punto *A* parallela alla *IH* la *BK*; poi da uno qualſivoglia de' punti *I H* ſi conduca altra retta, cioè o dall'*I* la *IG* parallela alla direzione *FC*, ovvero dall'*H* la *HG* parallela alla direzione *ED*. In amendue i caſi però ſi ſarà coſtruito un parallelogrammo *AHGI*, e la retta *AG* ſegherà l'angolo *CAD* alla tendenza delle forze *P Q*. Prolunghiſi ora la *AG*, ſe occorre; e ſi prendano in eſſa da una parte e dall'altra dell'*A* i punti *B K*, de' quali cada il *K* dalla parte *CD*, e il *B* dalla parte oppoſta *EF*. Indi ſi eſponga una forza *R* tale, che alla forza *Q* abbia la ſteſſa proporzione che ha la retta *AG* alla retta *AI*, e applichiſi la forza *R* ſecondo la direzione *BK*, sì che tenda dall'*A* verſo il *B*. Dimoſtreraſſi come nell'antecedente propoſizione eſſere la forza *R* in equilibrio colle forze *P Q*.

E applicando di nuovo ſecondo la direzione *BK* una forza *T* uguale e direttamente contraria alla forza *R*, cioè tendente dall'*A* verſo il *K*; ſarà la forza *T* equivalente alle forze *P Q*.

Date dunque di poſizione le direzioni *FC ED* ſegantiſi nell'*A*, e date le forze *P Q* applicate ſecondo eſſe direzioni e le loro tendenze, cioè quella della forza *P* dall'*A* verſo il *C*, e quella della forza *Q* dall'*A* verſo il *D*; ſi è ritrovata la forza *R* che colle forze *P Q* ſi equilibra, la ſua direzione *BK* e la ſua tendenza dall'*A* verſo il *B*; e si è ritrovata ancora la forza *T* equivalente alle forze *P Q*, la ſua direzione *BK*, e la ſua tendenza dall'*A* verſo il *G*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 21.

Date tre forze due delle quali comunque prese sieno maggiori della forza rimanente; ritrovare le direzioni, a cui debbono le stesse applicarsi, e le loro tendenze affinchè sieno fra loro in equilibrio; e ritrovare ancora le direzioni a cui debbono applicarsi e le loro tendenze affinchè una qualsivoglia di esse sia equivalente alle due forze rimanenti.

Sieno date le forze *P Q R*, due delle quali comunque prese sieno maggiori della forza rimanente. Bisogna ritrovare le direzioni a cui debbono applicarsi le forze *P Q R*, e le loro tendenze, affinchè sieno fra loro in equilibrio; e ritrovare ancora le direzioni a cui debbono applicarsi le forze *P Q R* e le loro tendenze affinchè una qualsivoglia di esse, per esempio la forza *R*, sia equivalente alle due forze rimanenti *P Q*. Fig. 21

Si espongano tre rette *AH HG AG* in proporzionalità ordinata colle forze *P Q R*, e sia omologa la retta *AH* alla forza *P*, la retta *HG* alla forza *Q*, e la retta *AG* alla forza *R*. Saranno adunque due delle rette *AH HG AG*, comunque prese, maggiori della rimanente. Dalle rette *AH HG AG* costruiscasi il triangolo *AHG*, e si compia il parallelogrammo *AHGI*, di cui una qualsivoglia delle rette suddette, per esempio la *AG*, ne sia la diagonale. Avranno certamente i due lati *AH AI* del parallelogrammo *AHGI* lo stesso termine *A* colla diagonale *AG*, e i lati opposti *HG GI* avranno parimenti lo stesso termine *G* colla diagonale *AG*. Ora prolunghinsi due lati aventi lo stesso termine colla diagonale, e la diagonale stessa da una parte e dall' altra del termine comune, come i lati *AH AI* e la diagonale *AG* aventi lo stesso termine *A*, ne' punti *F C E D B K*. E poichè uguale al lato *HG* è il lato opposto *AI*, quindi ancora i lati *AH AI* e la diagonale *AG* saranno in proporzionalità ordinata colle forze *P Q R*. Di nuovo applichisi secondo la direzione *FC*, su cui giace il lato *AH*, la forza *P* omologa al lato *AH*; poi secondo la direzione *ED*, su cui giace il lato *AI*, applichisi la forza *Q*

omologa al lato *AI*; ma volganſi in modo le tendenze delle forze *P Q*, che l' angolo *HAI* compreſo dai lati *AH AI* che ſi ſono prolungati, o il ſuo oppoſto al vertice, ſia l' angolo alla tendenza delle forze *P Q*. Siaſi pertanto fatta tendere la forza *P* nella direzione *FC* dall' *A* verſo il *C*, e la forza *Q* nella direzione *ED* dall' *A* verſo il *D*, ſicchè l' *HAI* ſia l' angolo alla tendenza delle forze *P Q*. Oltre a ciò applichiſi ſecondo la direzione *BK*, ſulla quale giace la diagonale *AG*, la forza *R* omologa alla diagonale *AG*, e facciaſi tendere la forza *R* dalla parte *EF* oppoſta alla parte *CD*, verſo cui tendono le forze *P Q*, cioè dall' *A* verſo il *B*. Dimoſtreraſſi, come nella propoſizione che abbiamo detto dicianoveſima, eſſere fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R*. Date dunque le forze *P Q R*, ſonoſi ritrovate le direzioni *FC ED BK* alle quali debbonſi applicare le ſteſſe forze, perchè ſieno fra loro in equilibrio, non meno che le tendenze delle forze, quella della forza *P* dall' *A* verſo il *C*, quella della forza *Q* dall' *A* verſo il *D*, e quella della forza *R* dall' *A* verſo il *B*; il che convenia fare in primo luogo.

E ſe, dopo tutta la ſuperior coſtruzione, ſi adatti la forza *R* nella direzione *BK* sì che la ſua tendenza ſia volta da parte contraria di prima, dall' *A* verſo il *K*; ſi saranno ritrovate le direzioni *FC ED BK* alle quali debbonſi applicare le forze ſteſſe, perchè la forza *R* ſia equivalente alle forze *P Q*, non meno che le loro tendenze, quella della forza *P* dall' *A* verſo il *C*, quella della forza *Q* dall' *A* verſo il *D*, e quella della forza *R* dall' *A* verſo il *K*; il che dovevaſi fare in ſecondo luogo.

PROPOSIZIONE 22.

Se una forza ſia contraria a due forze e uguale alle medeſime; e la direzione di eſſa cada nel piano per le direzioni delle due forze, e fra loro, e condotta comunque una retta alle direzioni delle due forze, ſia queſta ſegata dalla direzione della forza contraria in modo che i ſegamenti ſi recipro-

chino colle due ſteſſe forze ; ſaranno le tre forze fra loro in equilibrio (*a*).

La forza *R* ſia contraria alle forze *P* *Q* e uguale alle medeſime; e ſieno applicate, la forza *R* ſecondo la direzione *SN* e tendente dall' *S* verſo l'*N*, la forza *P* ſecondo la direzione *BE* e tendente dal *B* verſo l' *E*, e la forza *Q* ſecondo la direzione *CD* e tendente dal *C* verſo il Π. La direzione poi *SN* cada nel piano per le direzioni *BE* *C*Π, e fra loro; e condotta la retta *BC* alle direzioni *BE* *CD*, ſia ſegata la *BC* nel punto *S* dalla direzione *SN* in modo che i ſegamenti *CS* *SB* ſi reciprochino colle forze *P* *Q*, cioè ſia come il ſegamento *CS* al ſegamento *SB*, così la forza *P* alla forza *Q*. Dico che ſaranno fra loro in equilibrio le tre forze *P* *Q* *R*. Fig. 26

Imperocchè eſſendo contraria la forza *R* alle due forze *P* *Q*, ſarà la direzione *SN* parallela all' una e all' altra delle direzioni *BE* *C*Π, e tenderà la forza *R* dalla parte *TV* della retta *BC*, mentre le forze *P* *Q* tenderanno dalla parte opoſta *E*Π. Prolunghinſi per diritto alla *BC* da una e dall' altra parte le rette *B*Σ *C*Λ; e s' intendano applicate ſecondo la comune direzione ΣΛ le forze *L* *M* uguali e direttamente contrarie, e la forza *L* tenda dal *B* verſo il Σ e la forza *M* dal *C* verſo il Λ. Di nuovo date la due forze *L* *P*, e date di poſizione le loro direzioni *B*Σ *BE* ſegantiſi nel *B*, e date le loro tendenze, trovisi la forza *Y* equivalente alle forze *L* *P*, la ſua direzione *TO* e la ſua tendenza. Paſſerà dunque la direzione *TO* pel punto *B*, ſegherà l'angolo Σ*BE* alla tendenza delle forze *L* *P*, e tutte e tre le forze *L* *Y* *P* tenderanno dalla parte medeſima; e però la forza *Y* tenderà nella propria direzione dalla parte *E*Π della retta *BC*. Si- Defin. 4 Prop. 20 Coroll. Prop 9 Coroll. 3 Prop. 10

(*a*) Gli ſtatici ſolevano dedurre la teoria delle forze applicate a direzioni parallele da quella delle forze le cui direzioni ſi rincontrano in un punto, mediante l' ipoteſi di rimovere ad infinita diſtanza il punto del loro concorſo. Il Cel. P. *Gregorio Fontana* fu il primo ad accorgerſi, che ſi poteva preſcindere da queſta, ch' ei giuſtamente chiama dura ipoteſi (Memorie de la Società Italiana Tom. IV. pag. 519) riducendo le prime forze alle ſeconde coll' aggiugnere ſolo due forze uguali e contrarie direttamente. Io ho adottato queſta qua nto elegante, altrettanto ſemplice riduzione, e non ho fatto altro che veſtirla alla mia foggia.

milmente date le due forze *M* $\mathfrak{Q}$, e date di posizione le loro direzioni *CΠ CΛ* segantisi nel *C*, e date le loro tendenze, trovisi la forza *Z* equivalente alle forze *M* $\mathfrak{Q}$, la sua direzione *VG*, e la sua tendenza dall' *V* verso il *G*. Passerà adunque la direzione *VG* pel punto *C*, segherà l'angolo *ΛCΠ* alla tendenza delle forze *M* $\mathfrak{Q}$; e tutte tre le forze *M Z* $\mathfrak{Q}$ tenderanno dalla parte medesima; e però la forza *Z* tenderà nella propria direzione *VG* dalla parte *EΠ* della retta *BC*. Ora nella direzione *BΣ* preso qualsivoglia punto *K*, dal *K* parallele alle due direzioni *BE BO* tirinsi le rette *KO KI* per compiere il parallelogrammo *KIBO*; e nella direzione *CΛ* presa dal *C* la *CH* uguale alla *BK*, dall'*H* parallele alle due direzioni *CΠ CG* tirinsi le rette *HG HΔ* per compiere il parallelogrammo *HΔCG*. Sono adunque in proporzionalità ordinata le tre forze *P Υ L* colle tre rette *BI BO* Prop. 15
BK; e le tre forze *M Z* $\mathfrak{Q}$ colle tre rette *CH CG CΔ*. Ma egli è come la forza *L* alla forza *M*, così la retta *BK* alla retta *CH*, perocchè sono uguali fra loro sì le forze che le rette. Dunque sono in proporzionalità ordinata le sei forze *P Υ L M Z* $\mathfrak{Q}$ colle sei rette *BI BO BK CH CG CΔ*; e ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Prolunghisi la *TO* finchè rincontri la retta *SN* nel punto *A*. E poichè si pone come la retta *CS* alla retta *SB*, così la forza *P* alla forza $\mathfrak{Q}$; e come la forza *P* alla forza $\mathfrak{Q}$, così è la retta *BI* alla retta *CΔ*; quindi egli è come le *BI* alla *CΔ*, così la *CS* alla *SB*. Il contenuto dunque sotto le *IB BS* è uguale al contenuto sotto le *ΔC CS*. Oltre a ciò simile essendo il triangolo *KBI* al triangolo *BSA*, sarà come la *KB* alla *BI*, così la *BS* alla *SA*. Dunque il contenuto sotto le *KB SA* è uguale al contenuto sotto le *IB BS*. Ma il contenuto sotto le *KB SA* è uguale al contenuto sotto le *HC SA*, perocchè uguale è la *HC* alla *KB*; ed il contenuto sotto le *IB BS* si è dimostrato uguale al contenuto sotto le *ΔC CS*. Uguale egli è dunque il contenuto sotto le *HC SA* al contenuto sotto le *ΔC CS*; laonde egli è come l'*HC* alla *CΔ*, così la *CS* alla *SA*. Per il che giunta la *CA*, saranno li *HCΔ CSA* due triangoli, che hanno l'angolo *HCΔ* uguale all angolo *CSA*, e d' intorno agli angoli uguali i lati proporzionali. Simile egli è dunque il trian-

golo *HC*Δ al triangolo *CSA*; e però l' angolo Δ*HC*, ovvero il suo alterno *HCG*, è uguale all' angolo *ACS*. Per diritto ella è dunque la retta *CA* alla retta *CG*. E poichè *Υ R Z* sono tre forze applicate secondo le direzioni *AO AN AG* segantisi nell' *A*; e si è dimostrato che la forza *R* tende nella propria direzione *SN* dalla parte *TV* contraria alla parte *E*Π, cui tendono le altre due forze *Υ Z*; quindi ancora la forza *Υ* tenderà nella propria direzione *AO* da parte contraria a quella cui tendono le forze *R Z*; e così ancora la forza *Z* tenderà nella propria direzione *AG* da parte contraria a quella, cui tendono le forze *Υ R*. Compiansi i parallelogrammi *GHCF GATD ATXV*. E poichè paralleli sono i lati del triangolo *GDF* a' lati del triangolo *KIB* ed uguale è il lato *FG* al lato *KB*, perocchè amendue sono uguali alla retta medesima *CH*; quindi uguale sarà ancora la *FD* alla *BI*, e la *GD* alla *KI*. Ma uguale è la *GD* alla *AT*, e la *KI* alla *BO*; dunque ancora l' *AT* è uguale alla *BO*. Di nuovo essendo uguali le due *CD DG* alle due *AX XV*, e l' angolo *CDG* uguale all' angolo *AXV*, sarà ancora la base *CG* uguale alla base *AV*. Pertanto poichè sono in proporzionalità ordinata le forze *Υ P* 𝔔 *Z* colle rette *BO BI C*Δ *CG*; ed uguale è la *BO* alla *AT*, la *BI* alla *FD*, la *C*Δ alla *GH*, ovvero alla *CF*, e la *CG* alla *AV*; quindi le forze *Υ P* 𝔔 *Z* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AT FD CF AV*. Ma si pone la forza *R* uguale alle forze *P* 𝔔, e le rette *FD CF* sono uguali alla retta *CD*, ovvero alla *AX*. Sono adunque in proporzionalità ordinata le forze *Υ R Z* colle rette *AT AX AV*, ed ogni forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Sonovi dunque tre forze *P R* 𝔔 applicate secondo le direzioni *AO AN AG* segantisi nel punto *A*, e costituite nello stesso piano; e ciascuna forza tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le forze rimanenti; ed in oltre dal punto *X* preso nella direzione *SN* della forza *R* tirate le rette *XV XT* parallele alle direzioni *AO AG* dell' altre due forze *Υ Z* e costituito il parallelogrammo *ATXV*, si è dimostrato essere le forze suddette *Υ R Z* in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo *ATXV*, e ciascuna forza omologa alla retta che

giace sulla propria direzione. Elleno sono dunque fra loro
Prop. 16 in equilibrio le tre forze *Y R Z*. Ma equivalenti sono, la forza *Y* alle forze *P L*, e la forza *Z* alle forze *M Q*. Adunque sono fra loro in equilibrio le cinque forze *P L R M Q*. Ma la forza *L* è in equilibrio colla forza *M*, essendo esse uguali e direttamente contrarie. Elleno dunque sono fra loro in equilibrio le forze rimanenti *P R Q*. Il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se una forza sia parziale a due forze ed uguale alle medesime; e la direzione di quella cada nel piano di queste, e fra loro; e, condotta una retta comunque alle direzioni delle due forze, sia essa segata dalla direzione dell'altra forza in modo che i segamenti si reciprochino colle due forze; equivalente sarà la prima forza alle altre due. Imperocchè applicata nella direzione della prima forza una forza ad essa uguale e contraria direttamente, sarà questa contraria all'altre due; e si dimostrerà come nella proposizione che la forza applicata s'equilibra colle altre due forze; e però la forza a quella uguale e direttamente contraria, cioè la prima forza, sarà all'altre due equivalente.

PROPOSIZIONE 23.

Se due forze parziali sieno in equilibrio con un' altra forza; la direzione di questa cadrà nel piano per le direzioni delle forze parziali, e fra esse; la forza sarà contraria alle forze parziali ed uguale alle medesime; e condotta qualunque retta alle direzioni delle forze parziali, sarà questa segata dalla direzione della forza contraria in modo che i segamenti si reciprocheranno colle forze parziali medesime.

Fig. 26 Le due forze parziali *P Q* sieno in equilibrio colla forza *R*; e sieno applicate la forza *P* secondo la direzione *BE* e tendente dal *B* verso l'*E*, e la forza *Q* secondo la direzione CΠ e tendente dal *C* verso il Π; e la forza *R* sia applicata secondo la direzione *XN*. Conducasi poi comunque alle direzioni *BE CD* la retta *BC*. Dico, che la direzione

XN

XN cade nel piano per le direzioni *BE* *C*Π, e fra esse; che la forza *R* è contraria alle forze *P* *Q* ed alle medesime uguale, e che la direzione *XN* sega la retta *BC* in modo che i segamenti della *BC* si reciprocheranno colle forze parziali *P* *Q*.

Imperocchè poichè parziale è la forza *P* alla forza *Q*, sarà la direzione *BE* parallela alla direzione *C*Π, e tenderanno le forze *P* *Q* dalla stessa parte *E*Π della retta *BC*. Adunque i punti *E* Π cadono dalla stessa parte *E*Π della retta *BC*. Protragganti le rette *B*Σ *C*Λ per diritto alla retta *BC*, e secondo la direzione ΣΛ applichinsi le due forze uguali e contrarie *L* *M*, la *L* che tenda dal *B* verso il Σ, e la *M* dal *C* verso il Λ. Poi date le due forze *L* *P* applicate secondo le direzioni *B*Σ *BE* date di posizione e segantisi nel *B*, e date le tendenze delle due forze; si trovi la forza Υ equivalente alle forze *L* *P*, la sua direzione *TO*, e la sua tendenza. Passerà dunque la direzione *TO* pel punto *B*, segherà l'angolo alla tendenza Σ*BE* delle forze *L* *P*, e tenderanno tutte e tre le forze *L* Υ *P* dalla parte medesima; e e però la forza Υ tenderà nella propria direzione dalla parte *E*Π della retta *BC*. Similmente date le due forze *M* *Q* applicate secondo le direzioni *C*Λ *C*Π date di posizione e segantisi nel *C*, e date le tendenze delle due forze, ritrovisi la forza *Z* equivalente alle forze *M* *Q*, la sua direzione *VG*, e la sua tendenza. Passerà dunque la direzione *VG* pel punto *C*, segherà l'angolo Λ*C*Π alla tendenza delle forze *M* *Q*; e tutte e tre le forze tenderanno dalla parte medesima; laonde la forza *Z* tenderà ancora essa dalla parte *E*Π della retta *BC*. Si prendano in oltre nella direzione ΣΛ le uguali rette linee *BK* *CH* e compiansi i parallelogrammi *KIBO* *H*Δ*CG*. Si dimostrerà come nell'antecedente proposizione, che le sei forze *L* Υ *P* *Q* *Z* *M* sono fra loro in proporzionalità ordinata colle sei rette *BK* *BO* *BI* *C*Δ *CG* *CH*; e che ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. E poichè si pongono fra loro in equilibrio le tre forze *P* *Q* *R*, e sono ancora fra loro in equilibrio le forze *L* *M*; perocchè sono uguali e direttamente contrarie; quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le cinque forze *L* *P* *Q* *M* *R*. Ma equivalente è la forza Υ al-

Defin. 6

Prop. 20.

Coroll. delle Prop. 9 10

Comun. Conc. 1

le forze *L P*, e la forza *Z* alle forze *Q M*. Adunque ſono ancora fra loro in equilibrio le tre forze *Υ Z R*. Oltre a ciò poichè uguali a due retti ſono gli angoli *EBC BCΠ*, ſaranno maggiori di due retti gli angoli *OBC BCG*. Ma ſono uguali a quattro retti tutti e quattro gli angoli *OBC CBT BCG BCV*. Eglino ſono dunque minori di due retti gli angoli rimanenti *CBT BCV*; laonde le rette *OT VG* rincontrerannoſi in qualche punto. Si rincontrino nell' *A*. Sarà dunque il *BAC* l'angolo alla tendenza delle forze *Υ Z*, eſſendoſi dimoſtrato tendere amendue dalla parte medeſima *EΠ* della retta *BC*. E perchè ſono fra loro in equilibrio le tre forze *Υ Z R* applicate ſecondo le direzioni *AO AG XN*, due delle quali, le *AO AG*, ſi ſegano nell' *A*; quindi ancora la direzione *XN* paſſerà pel punto *A*, e cadrà nel piano per le *AO*
Prop. 9 10 *AG*. che è il piano ſteſſo per le direzioni *BE CD*; ſegherà eſſa *XN* l'angolo *BAC* alla tendenza delle forze *Υ Z*, e la forza *R* tenderà nella propria direzione *XN* da parte contraria a quella cui tendono le forze *Υ Z*. Compianti i parallelogrammi *CHGF AGDT ATXV*. E perchè uguale è la *CH* all'una e all' altra delle *BK FG*, ſarà ancora la *BK* uguale alla *FG*; ed è ſimile il triangolo *KBI* al triangolo *GFD*, perocchè hanno i lati paralleli a' lati l'uno all'altro. Adunque uguale ſarà ancora il lato *BI* al lato *FD*, ed il lato *KI* al lato *GD*. Ma uguale è la *KI* alla *BO*, e la *GD* alla *AT*; laonde uguale è ancora la *BO* alla *AT*. Di nuovo poichè egli è come la forza *Υ* alla forza *Z*, così il lato *AT* del parallelogrammo *ATXV* al lato *AV*; ma egli è ancora come la forza *Υ* alla forza *Z*, così la retta *BO* alla retta *CG*; quindi ſarà proporzionalmente come la *AT* alla *AV*, così la *BO* alla *CG*. Si è poi dimoſtrata la *AT* uguale alla *BO*; laonde uguale ſarà ancora la *AV* alla *CG*. E perchè uguale è la *AV* alla *CG*, e la *VX* alla *GD*; perciò le due *AV VX* ſono uguali alle due *CG GD*; e contengono angoli uguali. Adunque la baſe *AX* è uguale alla baſe *CD*; e l'angolo *VAX* è uguale all' angolo *GCD*. Parallela eſſa è adunque la direzione *AX* della forza *R* alla direzione *CΠ* della forza *Q*, e però ancora alla direzione *BE* della forza *P*. Egli è poi manifeſto che la direzione *XN* cade fra le direzioni *CΠ BE*; perocchè il punto *A* per cui paſſa la retta *XN* cade fra le dire-

zioni medesime. Adunque la retta *XN* segherà la retta che giugne i punti *B C* in qualche punto. La seghi nell' *S*. E perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze *Y Z R* applicate secondo le direzioni *AB AC SN* che si seghino nell' *A*; quindi tenderà la forza *R* da parte contraria a quella cui tendono le forze *Y Z*. Ma le forze *Y Z* tendono dalla parte *EΠ* della retta *BC*. Adunque la forza *R* tende dalla parte contraria *TV* della retta medesima *BC*. Contraria ella è dunque la forza *R* all'una e all' altra delle forze *P Q*. E poichè egli è come la forza *R* alla forza *Y*, così la *AX* alla *AT*, ovvero alla *BO*; e come la forza *Y* alla forza *P*, così la *BO* alla *BI*; quindi egli sarà come la forza *R* alla forza *P*, così la retta *AX* alla retta *BI*. In simil guisa si dimostrerà che come la forza *R* alla forza *Q*, così è la retta *AX* alla retta *CF*. Sono adunque in proporzionalità ordinata le forze *R P Q* colle rette *AX BI CF*. Ma uguale è la *AX* alle *BI CF*, perocchè la *AX* è uguale alla *CD*, ovvero alle *CF FD*, delle quali uguale è la *FD* alla *BI*; laonde ancora la forza *R* è uguale alle forze *P Q*. Di nuovo essendo simile il triangolo *KIB* al triangolo *BAS*; egli sarà come la *KB* alla *BI*, così la *BS* alla *SA*. Adunque il contenuto sotto le *KB SA* è uguale al contenuto sotto le *IB BS*. Per la stessa ragione uguale è il contenuto sotto le *CH SA* al contenuto sotto le *CΔ CS*. Ma uguale è il contenuto sotto le *KB SA* al contenuto sotto le *CH SA*, perocchè uguale è la *KB* alla *CH*. Adunque ancora il contenuto sotto le *IB BS* è uguale al contenuto sotto le *CΔ CS*; e però egli è come la *BI* alla *CΔ*, così la *CS* alla *SB*. Ma come la retta *BI* alla retta *CΔ*, così è la forza *P* alla forza *Q*. Egli è adunque proporzionalmente come la retta *CS* alla retta *SB*, così la forza *P* alla forza *Q*; e però si reciprocano i segamenti *CS SB* della retta *BC* colle forze *P Q*.

Si è dunque provato che la direzione *XN* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BE CΠ* delle forze parziali *P Q*, e fra esse; che la forza *R* è contraria alle forze *P Q*, e alle medesime uguale; e che la retta *BC* è segata nell' *S* dalla direzione *XN*, in modo che si reciprocano i segamenti *CS SB* di essa colle forze parziali *P Q*.

COROLLARIO.

Ed è manifesto che se a due forze parziali sia equivalente una forza; la direzione di questa cadrà nel piano per le direzioni delle forze parziali, e fra esse; tutte e tre le forze saranno parziali, e la forza equivalente uguale all' altre due; e, condotta comunque una retta alle direzioni delle due prime forze parziali, sarà questa segata dalla direzione della forza contraria, in modo che i segamenti si reciprocheranno colle due forze parziali medesime. Imperocchè applicata nella direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa si equilibrerà colle due forze parziali.

PROPOSIZIONE 24.

Se due forze contrarie e disuguali sieno in equilibrio con un' altra forza; la direzione dell' altra forza cadrà nel piano per le direzioni delle forze contrarie disuguali, oltre la direzione della forza maggiore; l' altra forza sarà parziale alla forza minore ed uguale all' eccesso in cui la maggiore supera la minore; e condotta comunque alle direzioni delle forze contrarie una retta, e prolungata fino alla direzione dell altra forza, sarà proporzionalmente come l' eccesso suddetto alla forza minore, così la retta al prolungamento (a).

Fig. 27 Le forze *P* *Q* contrarie e disuguali sieno in equilibrio colla forza *R*. Sia poi maggiore la forza *Q* della forza *P*; e sieno applicate, la forza *P* secondo la direzione *BE*, tendente dal *B* verso l' *E*, la forza *Q* secondo la direzione *CΠ*, tendente dal *C* verso il *Π*, e la forza *R* secondo la direzione *XN*. Dico che la direzione *XN* cade nel piano per le direzioni *BE* *CΠ*, ed oltre la direzione *CΠ*; che la forza *R* è parziale alla forza minore *P*, ed uguale all' eccesso in cui la forza *Q* supera la forza *P*; e che, condotta co-

(a) L' uso mi ha fatto vedere la necessità d' introdurre nel primo Elemento di statica ancora questa proposizione, ch' è bensì affatto simile all' antecedente, non però la stessa.

munque la retta *BC* alle direzioni *BE CΠ* e prolungata fino alla direzione *XN*, egli è come l'eccesso suddetto alla forza *P*, così la retta *BC* al prolungamento.

Imperocchè poichè contraria è la forza *P* alla forza *Q*, sarà la direzione *BE* parallela alla direzione *CΠ*, e la forza *P* tenderà dalla parte *EO* della retta *BC*, mentre la forza *Q* tenderà dalla parte opposta *ΠV*. Prolunghinsi per diritto alla *BC*, come nella proposizione, che abbiamo detto ventiduesima, dall'una parte e dall'altra le rette *BΣ CΛ*, e applichinsi secondo la comune direzione *ΣΛ* le forze *L M* uguali e direttamente contrarie, la forza *L* che tenda dal *B* verso il *Σ*, e la forza *M* che tenda dal *C* verso il *Λ*. Di nuovo date le due forze *L P*, e date di posizione le loro direzioni *BΣ BE* segantisi nel *B*, e le loro tendenze, si trovi la forza *Υ* equivalente alle forze *L P*, la sua direzione *TO*, e la sua tendenza. Passerà certamente la direzione *TO* pel punto *B*, segherà l'angolo *ΣBE* alla tendenza delle forze *LP*, e tutte e tre le forze tenderanno dalla parte medesima, e però tenderà la forza *Υ* dalla parte *EO* della retta *BC*, dal *B* verso l'*O*. Similmente date le due forze *M Q*, e date di posizione le loro direzioni *CΛ CΠ* segantisi nel *C*, e le loro tendenze, si trovi la forza *Z* alle forze *M Q* equivalente, la sua direzione *CV*, e la sua tendenza. Passerà certamente la direzione *CV* pel punto *C*, segherà l'angolo *ΛCΠ* alla tendenza delle forze *M Q*, e tutte e tre le forze *M Z Q* tenderanno dalla parte medesima; e però la forza *Z* tenderà dalla parte *ΠV* della retta *BC* dal *C* verso l'*V*. Ora prendansi nella direzione *ΣΛ* le uguali linee rette *BK CH* e compiansi i parallelogrammi *KOBI HGCΔ*, e dimostrerassi come nella sopraddetta proposizione, che le sei forze *L Υ P M Z Q* sono in proporzionalità ordinata colle sei rette *BK BO BI CH CG CΔ*. E poichè egli è come la forza *Q* alla forza *P*, così la retta *CΔ*, ovvero la *GH*, alla *BI*; e maggiore si pone la forza *Q* della forza *P*; quindi maggiore sarà ancora la *GH* della *BI*. Tolgasi dalla retta maggiore *GH* dall'*H* verso il *G* la retta *HΦ* uguale alla retta minore *BI*, e giungasi la *CΦ*. E perchè l'una e l'altra delle *HΦ BI* è parallela alla medesima retta *CΠ*, parallela sarà ancora l'*HΦ* alla *BI*; e però uguale sarà l'angolo

Prop. 20

CHΦ all' angolo *KBI*. Per il che uguali essendo le due *CH HΦ* alle due *KB BI*, e comprendendo angoli uguali, sarà ancora l'angolo *ΦCH* uguale all'angolo *IKB*. Maggiore egli è dunque l'angolo *GCH* dell' angolo *IKB*, e ancora dell' angolo *TBC*. Pongasi comune l' angolo *GCB*. I due angoli adunque *GCH GCB* sono maggiori dei due angoli *TBC GCB*; laonde sono minori di due retti gli angoli *TBC GCB*; quindi le rette *TB GC* (prolungate se occorre) si rincontreranno insieme. Rincontrinsi nell' *A*. Sarà pertanto l'angolo *BAV*, ch' è accanto all'angolo *BAC*, l'angolo alla tendenza delle forze *Υ Z*; perocchè si è dimostrato tendere la forza *Υ* dalla parte *EO* della retta *BC*, e la forza *Z* dalla parte opposta *ΠV*. E poichè sono fra loro in equilibrio le forze *P Q R*, e sono ancora fra loro in equilibrio le forze *L M*; quindi saranno ancora fra loro in equilibrio le cinque forze *P L Q M R*. Ma equivalente è la forza *Υ* alle forze *P L*, e la forza *Z* alle forze *Q M*. Sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze *Υ Z R*, applicate secondo le direzioni *TO CV XN*, delle quali le due *TO CV*
Prop. 9. 10 si segano nell' *A*. E però ancora la direzione *XN* passerà pel punto *A*, e sarà nello stesso piano coll' altre due direzioni *TO CV*, cioè nel piano per le direzioni parallele *BE CΠ*; e segherà in oltre la direzione *XN* l' angolo *BAV* alla tendenza delle forze *Υ Z*. Compiansi i parallelogrammi *CHGF AGDT ATXV*. E perchè uguale è l'una e l'altra delle *BK GF* alla *CH*, sarà la *BK* uguale alla *GF*; ed è simile il triangolo *KBI* al triangolo *GFD*, perocchè hanno i lati paralleli a' lati, l' uno all' altro. Adunque uguale sarà il ancora il lato *BI* al lato *FD*, ed il lato *KI* al lato *GD*. Ma uguale è la *KI* alla *BO*, e la *GD* alla *AT*; laonde uguale è ancora la *BO* alla *AT*. Si dimostrerà poi come nell' antecedente proposizione che ancora la *CG* è uguale alla *AV*, e la *AX* alla *CD*; e che in oltre la direzione *XN* della forza *R* è parallela alla direzione *CΠ* della forza *Q* e alla direzione *BE* della forza *P*. Egli è poi manifesto che la direzione *XN* cade oltre la direzione *CΠ* della forza maggiore *Q*; perocchè il punto *A* per cui passa la retta *XN* cade oltre la direzione medesima *CΠ*. Adunque la retta *BC* prolungata segherà la retta *XN*. La seghi nell' *S*. E perchè dal vertice *A* del triangolo *BAS* al punto *C* nella base *BS* si

condotta la retta *AC*, o dicasi *CV*; quindi segherà la retta *CV* l'angolo *BAS*, e però anche il suo opposto al vertice *XAΓ*. Ora essendo fra loro in equilibrio le tre forze *Y Z R* applicate secondo le direzioni *AB AS CV* segantisi nell' *A*, la direzione di ciascuna forza segherà l' angolo alla tendenza dell' altre due, e però anche l' angolo ad esso opposto al vertice. Ma la direzione *CV* della forza *Z* sega l'angolo *BAS* compreso dalle direzioni *AB AS* dell' altre due forze *Y R*, e ancora il suo opposto al vertice *XAΓ*; laonde delli *BAS XAΓ* uno è l' angolo alla tendenza delle forze stesse *Y R*, l' altro l' angolo ad esso opposto al vertice. Tendono adunque le forze *Y R* dalla stessa parte della base *BS*. Ma da quella parte verso cui tende la forza *Y*, dalla medesima si è dimostrato tendere ancora la forza *P*. Adunque le forze *P R* tendono dalla stessa parte della retta *BC*. Ed è ancora parallela la direzione *CΠ* alla direzione *XN*. Parziale ella è dunque la forza *R* alla forza *P*. Di nuovo in modo simile alla proposizione antecedente si proverà essere le tre forze *R P Q* in proporzionalità ordinata colle rette *AX BI CF*. Ma uguale è la *AX* all' eccesso in cui la *CF* supera la *BI*; perocchè uguale è la *AX* alla *CD* e la *BI* all' *FD*. Adunque ancora la forza *R* è uguale all' eccesso, in cui la forza *Q* supera la forza *P*. Finalmente come nella citata proposizione dimostrerassi avere la forza *Q* alla forza *P* la stessa proporzione che ha la retta *SB* alla retta *CS*; e però dividendo sarà come l' eccesso in cui la forza *Q* supera la forza *P* alla forza *P*, così la retta *BC* alla retta *CS*. Prop. 10 Defin. 6

*S*i è dunque dimostrato che la direzione *XN* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BE CΠ* delle forze contrarie *P Q*, ed oltre la direzione *CΠ*; che la forza *R* è parziale alla forza minore *P*, ed uguale all' eccesso in cui la forza *Q* supera la forza *P*; e che prolungata la retta *BC* fino alla direzione *XN* nell' *S*, egli è come l' eccesso suddetto alla forza *P*, così la retta *BC* al prolungamento *CS*; il che convenia dimostrare.

Corollario.

Quindi se due forze contrarie e disuguali sieno equivalenti

ad un'altra forza; la direzione dell'altra forza cadrà nel piano per le direzioni delle forze contrarie oltre la direzione della forza maggiore; questa forza sarà parziale alla forza maggiore ed uguale all'eccesso in cui la maggiore supera la minore; e condotta qualunque retta alle direzioni delle forze contrarie, e prolungata fino alla direzione della forza equivalente, egli sarà proporzionalmente come l'eccesso suddetto alla forza minore, così la retta al prolungamento. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e contraria direttamente, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 25.

Date due forze parziali, le loro direzioni e le loro tendenze; ritrovare una forza, che con esse due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente ad esse due forze, la sua direzione e la sua tendenza.

Fig. 28 Sieno date le forze parziali *P Q*, e sieno date di posizione le loro direzioni *BA CD*, e date le loro tendenze, quella della forza *P* dal *B* verso l'*A*, e quella della forza *Q* dal *C* verso il *D*. Bisogna ritrovare una forza che s'equilibri colle forze *P Q*, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente alle forze *P Q*, la sua direzione a la sua tendenza.

Defin. 6 Tirisi la retta *BC*. E poichè sono parziali le forze *P Q*, sarà la direzione *BA* parallela alla direzione *CD*, e le forze *P Q* tenderanno amendue dalla stessa parte *AD* della retta *BC*. Seghisi la *BC* nell'*E* in modo che le forze *P Q* si reciprochino co' segamenti *CE EB*, e sia come la forza *P* alla forza *Q*, così la *CE* alla *EB*; e pel punto *E* parallela ad una delle *BA CD* tirisi la *FG*; e secondo la direzione *FG* applichisi la forza *R* uguale alle forze *P Q*, la quale tenda nella propria direzione dalla parte *MN* contraria alla parte *AD*, cioè dall'*E* verso l'*F*.

E poichè la forza *R* e le forze *P Q* sono applicate secondo le direzioni parallele *FG BA CD*, e la tendenza della forza *R* si volge dalla parte *MN* della retta *BC* mentre le

tendenze

tendenze delle forze *P* *Q* si volgono dalla parte contraria *AD*; quindi contraria è la forza *R* all'una e all'altra delle forze *P* *Q*. Vi è dunque una forza *R* contraria alle forze *P* *Q* ed uguale alle medesime; e la direzione *FG* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BA* *CD* delle forze *P* *Q*, e fra esse; e condotta la retta *BC* alle direzioni *BA* *CD* è la *BC* segata dalla direzione *FG* in modo, che i segamenti *CE* *EB* si reciprocano colle due forze medesime *P* *Q*. In equilibrio ella è dunque la forza *R* colle forze *P* *Q*. E se secondo la direzione *FG* applichisi la forza *S* uguale e direttamente contraria alla forza *R*, cosicchè tenda la forza *S* dalla parte *AD*, dall'*E* verso il *G*; si dimostrerà che equivalente è la forza *S* alle forze *P* *Q*. Defin. 4

Date dunque due forze parziali *P* *Q*, e date di posizione le loro direzioni *BA* *CD*, e date le loro tendenze dal *B* verso l'*A*, e dal *C* verso il *D*; si è ritrovata la forza *R* che colle due forze *P* *Q* si equilibra, la sua direzione *FG*, e la sua tendenza dall'*E* verso l'*F*, e si è ritrovata ancora la forza *S* equivalente alle due forze medesime *P* *Q*, la sua direzione *FG*, e la sua tendenza dall'*E* verso il *G*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 26.

Date due forze contrarie e disuguali, le loro direzioni, e le loro tendenze; ritrovare una forza che con esse due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente ad esse due forze, la sua direzione, e la sua tendenza.

Sieno date le due forze contrarie e disuguali *R* *P*, delle quali sia maggiore la *R*, e sieno date di posizione le loro direzioni *EF* *BA*, e date le loro tendenze, quella della forza *R* dall'*E* verso l'*F*, e quella della forza *P* dal *B* verso l'*A*. Bisogna ritrovare una forza, che si equilibri colle forze *R* *P*, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente alle forze *R* *P*, la sua direzione e la sua tendenza. Fig. 29

Tirisi la retta *BE*. E poichè sono contrarie le forze *R* *P*, sarà la direzione *EF* parallela alla direzione *BA*, e le forze

R P tenderanno da parti contrarie della retta *BE*, la forza *R* dalla parte *FM*, e la forza *P* dalla parte *AN*. Prolunghisi ora oltre la direzione *EF* la *EC* per diritto alla *BE* in modo che egli sia proporzionalmente come l'eccesso in cui la forza *R* supera la forza *P* alla forza *P*, così la retta *BE* al prolungamento *EC*. Indi dal *C* parallela all'una e all'altra delle *EF BA* tirisi la retta *HD*; e secondo la direzione *HD* applichisi la forza *Q* uguale all'eccesso suddetto, e tenda la forza *Q* dalla stessa parte *AN* della *BC*, verso cui tende la forza minore *P*, cioè dal *C* verso il *D*.

E poichè le forze *R Q* sono applicate secondo le direzioni parallele *EF HD*, e le loro tendenze si volgono da parti contrarie della retta *BC*; quindi contraria sarà la forza *R* alla forza *Q*. Ella è poi contraria ancora alla forza *P*. Adunque la forza *R* è contraria alle due forze *P Q*. Di nuovo perchè la forza *Q* è uguale all'eccesso in cui la forza *R* supera la forza *P*, sarà la forza *R* uguale alle due forze *P Q*. Oltre a ciò essendo come l'eccesso in cui la forza *R* supera la forza *P* alla forza *P*, così la retta *BE* alla retta *EC*; ed uguale è la forza *R* all'eccesso suddetto; quindi sarà come la forza *Q* alla forza *P*, così la *BE* alla *EC*. Vi è dunque una forza *R* contraria alle due forze *P Q* ed uguale alle medesime; e la direzione *EF* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BA HD* delle forze *P Q*, e fra esse; e condotta la retta *BC* alle direzioni delle forze *P Q*, è la retta *BC* segata dalla direzione *EF* in modo che i segamenti *BE EC* si reciprocano colle due forze medesime *P Q*; e però la forza *Q* è in equilibrio colle forze *R P*. E se secondo la direzione *HD* applichisi la forza *T* uguale e direttamente contraria alla forza *Q*, cosicchè ella tenda dalla parte *FM*, dal *C* verso l'*H*, e sia parziale alla forza maggiore *R*, si dimostrerà che equivalente è la forza *T* alle forze *R P*.

Date dunque le forze contrarie e disuguali *R P*, e date di posizione le loro direzioni *EF BA*, e date le loro tendenze dall'*E* verso l'*F*, e dal *B* verso l'*A*; si è ritrovata la forza *Q* che colle due forze *R P* s'equilibra, la sua direzione *HD*, e la sua tendenza dal *C* verso il *D*; e si è ritrovata ancora la forza *T* equivalente alle forze medesime *R P*, la sua direzione *HD*, e la sua tendenza dal *C* verso l'*H*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 27.

Non possono essere fra loro in equilibrio tre forze, due delle quali sieno uguali e contrarie (a).

Imperocchè se sia possibile sieno fra loro in equilibrio le tre forze *R P Q* applicate secondo le direzioni *SN BE CD*, delle quali le forze *R P* sieno uguali e contrarie. Tendano poi la forza *R* dall'*S* verso l'*N*, la forza *P* dal *B* verso l'*E*, e la forza *Q* dal *C* verso il *D*. Fig. 30

E poichè contraria è la forza *R* alla forza *P*, parallela sarà la direzione *SN* alla direzione *BE*. Pertanto la direzione *CD* della forza *Q* o è parallela all'una e all'altra delle direzioni *SN BE*, o no. Sia in prima parallela. E perchè la forza *Q* è applicata secondo la direzione *CD* parallela alle direzioni *SN BE*, a cui sono applicate le due forze contrarie *R P*; quindi sarà la forza *Q* parziale all'una o all' altra delle forze stesse *R P*. Sia parziale alla forza *P*. E poichè le forze parziali *P Q* sono in equilibrio colla forza *R*, quindi uguale sarà la forza *R* alle forze *P Q*. Ma uguale si pone ancora la forza *R* alla forza *P*. Uguale ella è dunque la forza *P* alle forze *P Q*; il che è un assurdo. Non sono adunque in equilibrio le tre forze *R P Q* delle quali le *R P* sono uguali e contrarie, se la direzione della terza forza *Q* sia parallela alle direzioni dell'altre due. Prop. 23

Ma non sia la direzione *CD* parallela alle direzioni *SN BE*; e dal *C* parallela ad una delle *SN BE* tirisi la retta *CA*, e la *CG* comunque si voglia, nel piano però per le *CA CD*. Indi date di posizione le tre direzioni *CA CD CG* segantisi nel *C*, e situate nello stesso piano, e data la forza *Q* applicata secondo la direzione *CD*; si ritrovino le forze che deb- Fig. 31 Prop. 16

(a) Questa è una proposizione che se non è nuova per la cosa che dimostra, è però tale pel modo di esporla e di dimostrarla. D' *Alembert* fece vedere, che se due forze contrarie sieno uguali, conviene mettere ad un' infinita distanza una forza infinitamente piccola parziale ad una di esse per ottenere l' equilibrio. E perchè non dire che non vi può essere equilibrio fra tre forze, se due di esse sieno uguali e contrarie? Pare che così la proposizione sarebbe stata meglio enunciata.

bonsi applicare secondo l'altre due direzioni *CA CG*, e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la forza *Q*. Sia la *V* la forza d'applicarsi secondo la direzione *CA*, e la sua tendenza sia dal *C* verso l'*A*; e sia la *X* la forza d'applicarsi secondo la direzione *CG* e la sua tendenza sia dal *C* verso il *G*. E poichè la forza *V* è applicata secondo la direzione *CA* parallela alle direzioni *SN BE*, a cui sono applicate le forze contrarie *R P*; quindi parziale sarà la forza *V* all'una o all'altra delle forze stesse *R P*. Sia parziale alla
Prop. 25 forza *P*; e date le forze parziali *P V*, le loro direzioni e le loro tendenze, ritrovisi una forza ad esse equivalente, la sua direzione e la sua tendenza. Sia questa la forza *T* applicata secondo la direzione *HI* e tendente dall'*H* verso l'*I*. Parziale ella è dunque la forza *T* alle forze *P V*, e ad esse uguale. Ma la forza *P* è uguale e contraria alla forza *R*; laonde la forza *T* è disuguale e contraria alla forza *R*. Di nuovo essendo fra loro in equilibrio le forze *P Q R*, e la *Q* equivalente alle forze *V X*; quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le forze *P V X R*. Ma equivalente è la forza *T* alle forze *P V*. Esseno sono adunque fra loro in equilibrio ancora le tre forze *T X R*. Per il che essendo fra loro in equilibrio le tre forze *T X R*, delle quali disuguale
Prop. 24 e contraria è la forza *T* alla forza *R*; quindi la terza forza *X* sarà parziale alla forza minore *R*. Parallela ella è adunque la direzione *CG* alla direzione *SN*. Ma ancora la *CA* è parallela alla *SN*. Parallele esseno sono adunque le rette *CA CG*, che si rincontrano nel *C*, il che è un assurdo. Non sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze *R P Q*, delle quali le *R P* sono uguali e contrarie, se la direzione della terza forza *Q* non sia parallela alle direzioni dell'altre due. Si è poi dimostrato che non possono essere in equilibrio neppure quando la direzione della forza *Q* sia parallela alle direzioni dell'altre due. Non possono dunque essere fra loro in equilibrio tre forze, due delle quali sieno uguali e contrarie; il che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE 28.

Se tre forze applicate a tre direzioni sieno fra loro in equilibrio, le direzioni saranno tutte e tre in un piano (a).

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze *P* *Q* *R* applicate secondo le tre direzioni *BE* *CD* *SN*, e tendenti, la forza *P* dal *B* verso l' *E*, la forza *Q* dal *C* verso il *D*, e la forza *R* dall' *S* verso l' *N*. Dico che le direzioni *BE* *CD* *SN* sono in un piano. Fig. 32

Imperocchè se due delle direzioni *BE* *CD* *SN*, come per esempio le due *BE* *SN*, sono in un piano, è manifesto che ancora la terza direzione *CD* sarà nel piano che passa per quelle. Poichè le *BE* *SN* o si segheranno insieme, ovvero saranno fra loro parallele. Se seghinsi; ancora la direzione *CD* dee passare pel punto del segamento, ed essere nel piano per le *BE* *SN*. Se poi sono parallele le *BE* *SN*, allora le *P* *R* divengono o forze parziali, o forze contrarie e disuguali (disuguali, perchè altrimenti non sarebbero in equilibrio le tre forze *P* *Q* *R*, il che è contro la posizione). Sieno poi le *P* *R* o forze parziali, o forze contrarie e disuguali, la direzione *CD* della forza *Q* dee sempre cadere nel piano per le *BE* *SN*. Quindi se due delle direzioni *BE* *CD* *SN* sono in un piano, ancora la terza sarà nel piano medesimo. Prop. 9 Prop. antec. Prop. 23 24

Ora, se sia possibile, due delle direzioni *BE* *CD* *SN* comunque prese, non sieno in un piano. E prendasi nella direzione *SN* il punto *A*, da cui parallele all' altre due direzioni *BE* *CD* tirinsi le rette *AG* *AF*. Saranno adunque le *AG* *BE* in un piano, e le *AF* *CD* in un altro. E perchè si pone che la *SN* non è nello stesso piano colla *BE*;

(a) Non è stata mai da alcuno dimostrata in tutte le sue parti questa interessantissima proposizione; e pure ella è di un uso quasi continuo negli elementi di statica. Dico che niuno l'ha interamente dimostrata, perchè si è bensì cercato di provare che se due direzioni sieno in un piano, anche la terza sarà nel piano per quelle; ma questo non è tutto, e restava da provarsi che due direzioni debbano essere necessariamente in un piano.

quindi non sarà la *SN* nel piano per le *AG BE*. Allo stesso modo si proverà che la *SN* non è nel piano per le *AF CD*. Non è adunque la *SN* la comune sezione de' piani *AGBE AFCD*. Sia questa la retta *AB*, che passerà pel punto *A* comune all'uno e all'altro piano. Prolunghinsi, se occorre, le direzioni *BE CD* finchè seghino l'*AB*. E' manifesto che esse la segheranno ad uno e ad altro punto *B C*, perocchè se la segassero nello stesso punto, le rette *BE CD* sarebbero nello stesso piano, il che non si pone. Prendasi nella direzione *SN* qualsivoglia altro punto *S*, e tirinsi le *SC SB*, e protraggansi da una e dall' altra parte. Saranno dunque le tre rette *SN SC SB* nel piano del triangolo *ABS*. E perchè il punto *S* non è nel piano *AGBE*, e in esso piano sonovi i punti *B C*, quindi le rette *SC SB* non cadranno nel piano *AGBE*. Di nuovo date di posizione le tre direzioni *SN SC SB* situate in un piano e segantisi nell *S*, e
Prop. 19. data la forza *R* applicata secondo la direzione *SN*, e la sua tendenza dall'*S* verso l'*N*, ritrovinsi le forze che debbonsi applicare all' altre due direzioni *SC SB*, e le loro tendenze perchè ad esse sia equivalente la forza *R*. Sieno queste, la forza *X* applicata secondo la direzione *SC*, e tendente dal *C* verso l' *I*, e la forza *V* applicata secondo la direzione *SB*, e tendente dal *B* verso l'*L*. Di nuovo date le due forze *X Q* applicate secondo le direzioni *SC CD* segantisi nel
Prop. 20 *C*, e date le loro tendenze, si trovi la forza *M* equivalente alle forze *X Q*, la sua direzione *CZ*, e la sua tendenza dal *C* verso il *Z*. E in simil guisa date le due forze *P V* applicate secondo le direzioni *BE SB* segantisi nel *B*, e date le loro tendenze, si trovi la forza *N* equivalente alle forze *P V*, la sua direzione *BO*, e la sua tendenza dal *B* verso l'*O*. E poichè sono fra loro in equilibrio le forze *R P Q* ed equivalente è la forza *R* alle forze *X V*, quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le forze *X Q V P*. Ma equivalenti sono la forza *M* alle forze *X Q*, e la forza *N* alle forze *V P*. Elleno sono adunque fra loro in equilibrio le due forze *M N*; laonde saranno esse uguali e direttamente
Com. Conc. 2 contrarie, e però applicate ad una comune direzione. Retta è dunque la linea *ZCBO*. Adunque la *BO* è nel piano *AGBE*; ma la *BE* è nello stesso piano *AGBE*; e la *SB*

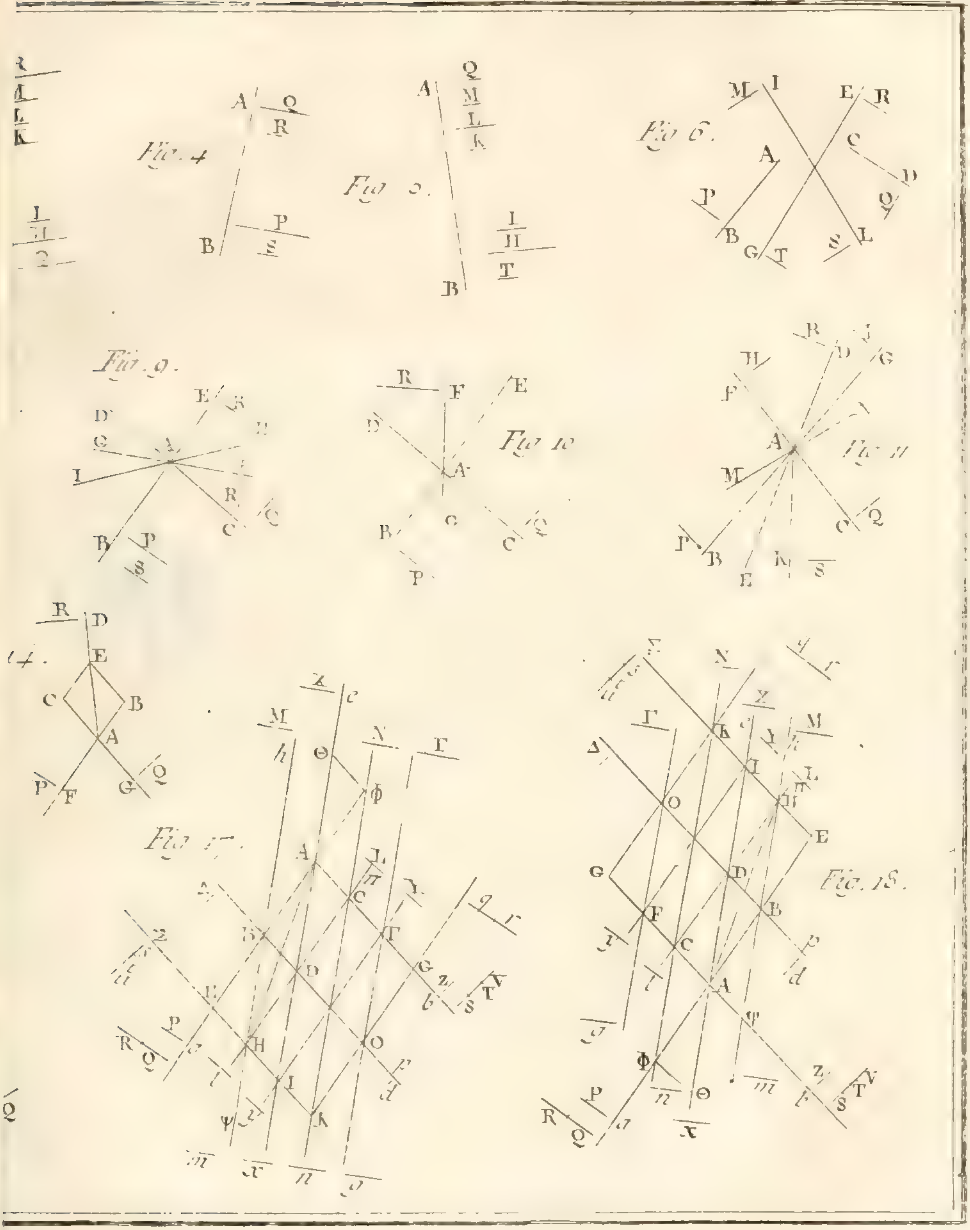
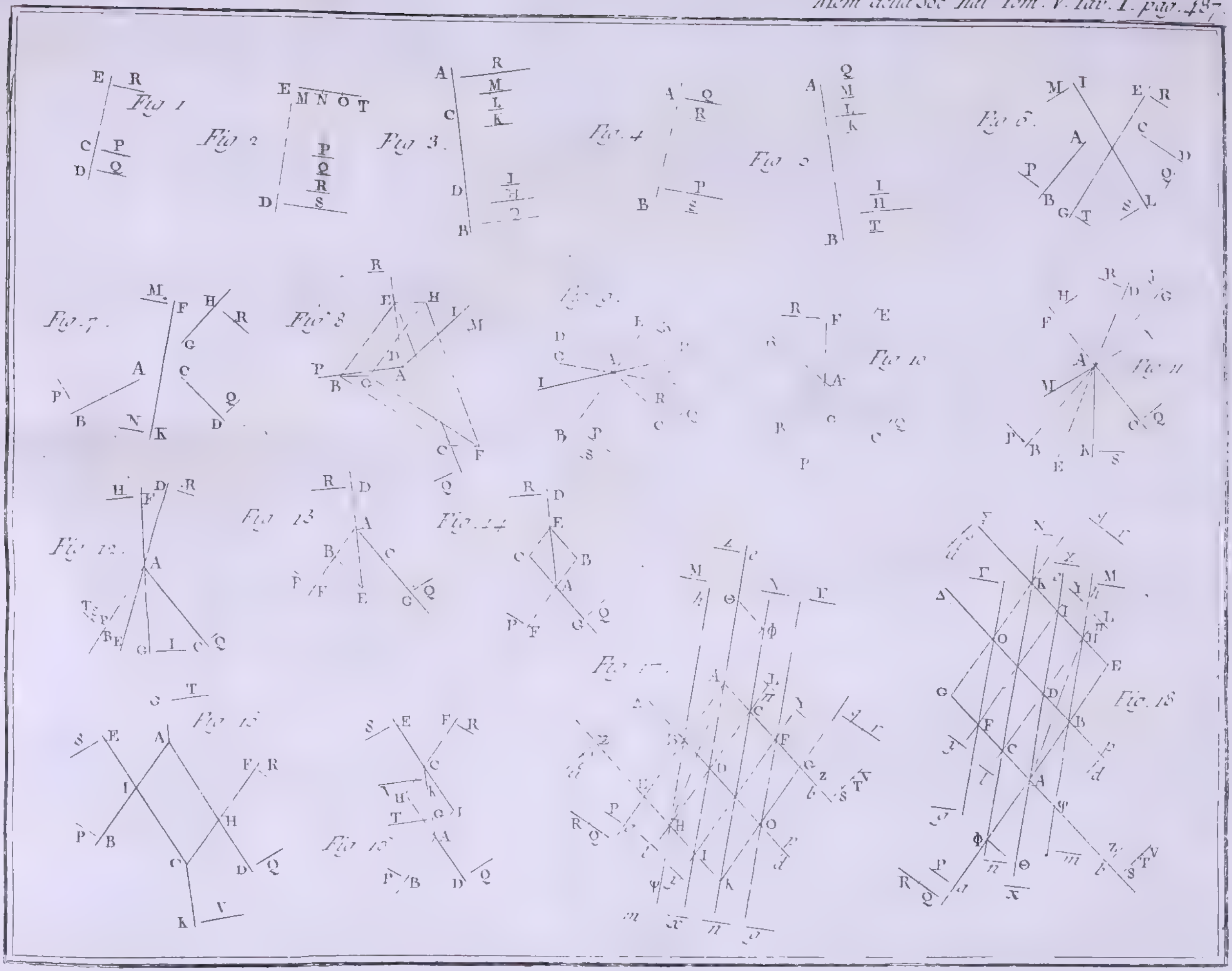


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 17.
Fig. 18.



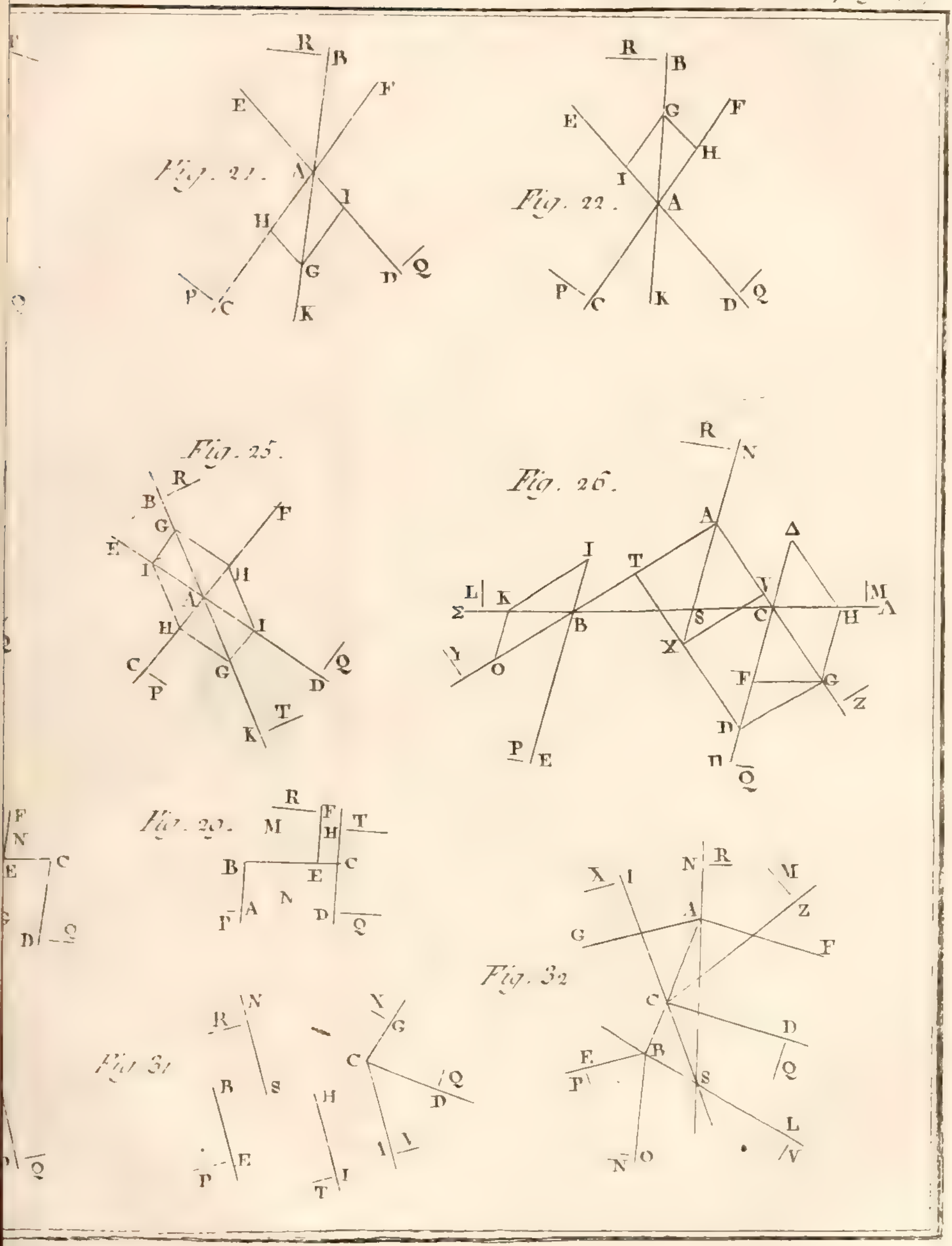


Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 29.
Fig. 31
Fig. 32

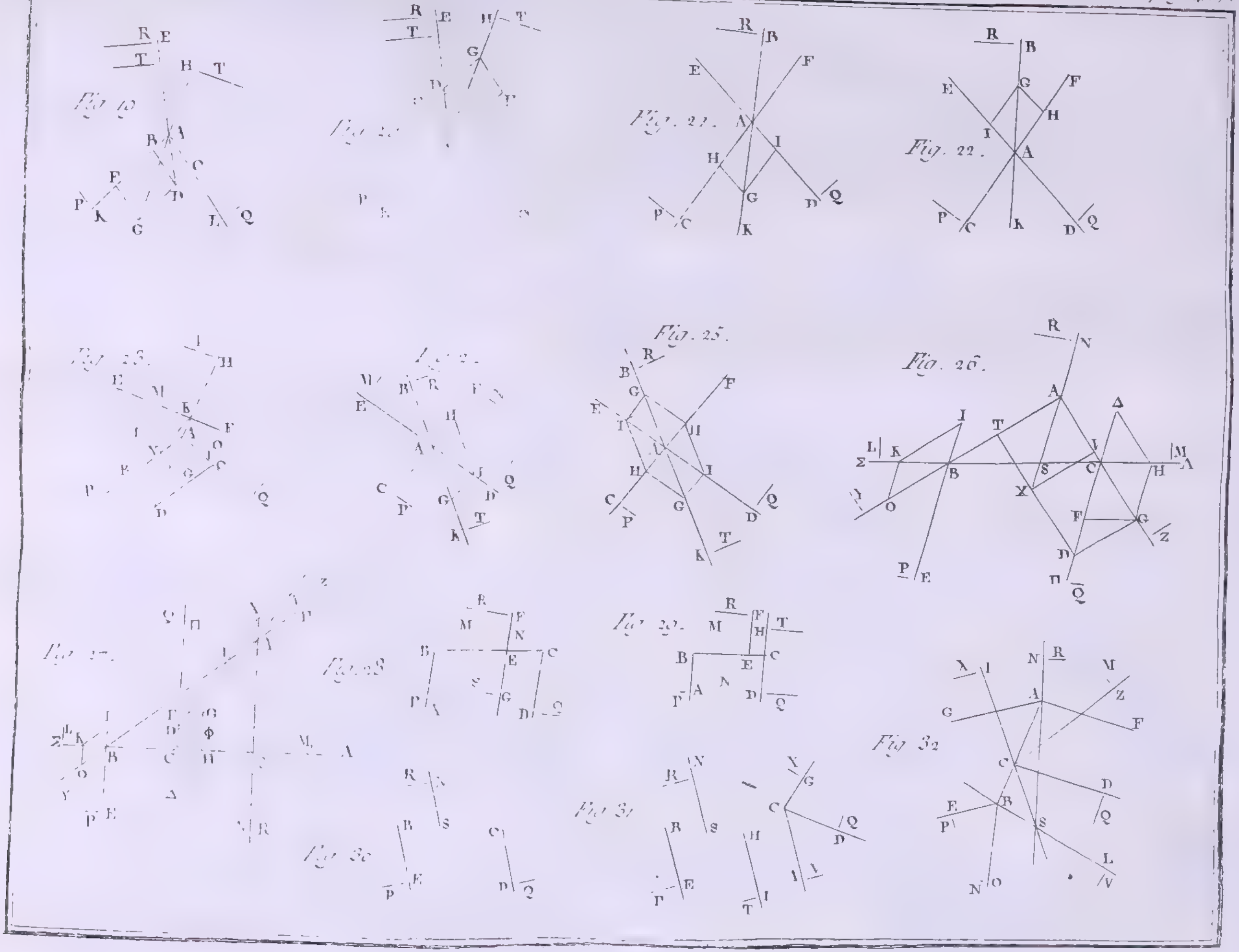


Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 32

non lo è. Ella è adunque la forza *N* applicata secondo la direzione *BO* equivalente alle forze *P V* applicate secondo le direzioni *BE SB*; e le tre direzioni si segano in un punto e non sono nello stesso piano costituite; il che è un assurdo. Adunque due delle direzioni *BE CD SN*, comunque prese, non possono non essere in un piano. Si è poi di sopra dimostrato, che se due sono in un piano ancora la terza è nel piano medesimo; laonde se tre forze applicate a tre direzioni sieno fra loro in equilibrio, le direzioni saranno tutte e tre in un piano; il che convenia dimostrare.

Fine del Primo Elemento di Statica.

LETTERA DISSERTATORIA

RELATIVA A DUE ROSE PROLIFICHE

SCRITTA

Dal Sig. Abate PAOLO SPADONI

Al Sig. Abate LAZARO SPALLANZANI

PRESENTATA DAL MEDESIMO

SOno oggimai venti giorni, celeberrimo Signore, da che un mio riverito e caro amico Bologneſe mi favorì gentilmente di una roſa, che al colore un poeta la direbbe tinta nel ſangue della ſteſſa madre d'amore, e che pel numero delle foglie i Botanici chiamano *centifolia*, acciocchè non tanto ne oſſervaſſi la di lei eſterna figura, quanto perchè la prendeſſi a ſoggetto di mie ricerche, e di mie ſpecolazioni. Già ella ben ſi accorge, che quel leggiadriſſimo fior di Venere non ſarebbe ſtato de' conſueti e comunali; e ciò che torna lo ſteſſo, che aver almanco dovea alcuna coſa di ſtravagante e ſingolare. Non altrimenti di fatto egli era quel vago prodotto della ſcherzoſa natura, dir potendole, che io a prima giunta riconobbi qual roſa da' Naturaliſti nomata *prolifica*, ovvero moſtruoſa. Adunque volendo condiſcendere, come portava il dovere, alle dolci inchieſte dell' amico, e render unitamente appagata la mia filoſofica curioſità, detto fatto, ſovvenendomi che

Quam longa una dies, ætas tam longa roſarum,

preſi ad abbozzarne, il men male che io potei, la figura, e appreſſo ad inſtituirvi ſopra varie oſſervazioni. Le quali oſſervazioni, ora che mi trovo un po di ozio, mi permetta che a Lei io le offra in dono, e che glie le mandi unite

te insieme al disegno, che ne ricavai dalla stessa rosa. Se queste avranno, come mi auguro, la sorte di piacerle in qualcheduna cosa, sarà stata mia gran fortuna l'avergliele inviate; quando che no, ella con la libertà maggiore del mondo le condanni tosto, e senza pietà alle fiamme, oppur faccia che, quali enigmatiche foglie della Cumana Sibilla, vadan per l'aria a volo. Tali per l'appunto sono i miei più sinceri desiderj; e in conseguenza la di lei giustissima ed imparziale decisione farà sì che mi determini, o a renderle pubbliche colle stampe ad oggetto di giovare alla società, e di contribuire in alcun modo ai progressi dell'umano sapere, o veramente a non prendermi

Più di ricorle, e d'accozzarle affanno.

Frattanto qualunque e' siasi per essere il loro destino, io entro nella materia, la quale essendo analoga a quegli studj ne'quali ella è maestro, e maestro

Pien di filosofia la lingua, e il petto

mi lusingo che non le sarà grave l'ascoltarmi, non ostante che io tema che le debba esser di molto peso il prepararsi a soffrire i miei difetti per la poca pratica, che io ho nel trattare così fatti argomenti; i quali a bella posta tratto e sottometto ben volentieri al savio giudizio de' suoi pari, per togliermi una volta, se sia possibile, da quella mediocrità, a cui mi tiene obbligato la gioventù, e l'inesperienza; e dalla quale niun' altra cosa mi libererà più facilmente, che l'esercizio appunto, e molto più le di lei correzioni, a cui con la più sincera volontà rassegnata rimetto quanto prendo a dirle.

Era il gambo di questa rosa grosso poco meno del cannoncino d'un' occhiuta penna di pavone, lungo da dieci pollici, e di color verde pallido minutamente punteggiato di finissima ruggine. Da cima a piè trovavasi d'ogni intorno gremito di rigidi pungiglioni, ed a luogo a luogo aveva de'picciuoli portanti le solite foglie *pinnate*. Al di sopra, ossia in prossimità del fiore, bellamente ingrossando veniva a formare come un cono allungato, pieno zeppo di pungoli assai più forti degli altri ed appuntati. Sul vertice poi, ove suol esser il calice, rompevano cinque foglie di un verde carico, corrispondente a quello delle foglie del gambo,

ma di figure affatto nuove e ſtravaganti. Oltre all' avere in generale le loro parti aſſembrate in guiſa da non poter fra eſſe rinvenire alcuna ſomiglianza, variavano anche a una per una nelle grandezze, ne' margini, nelle punte, e quaſi che diſſi nell' intera ſtruttura. In effetto due, o ſieno le maggiori, avevano il contorno proſſimamente ellittico, i margini laterali ſerrati, e le eſtremità acute, quali appariſcono nella figura ſotto le lettere *BB*. Di più comparivano *aurite* portando nella baſe due fogliuzze laterali, come vedeſi apertamente nella *Salvia officinalis Lin. v. B.* nella *Scrophularia auriculata*, nel *Salix aurita*, ed in altre non poche. Queſte fogliuzze, che per ſegnarle con qualche nome chiamerò in ſeguito *appendici*, o pur *orecchiette*, non convenivano punto nella forma colle due foglie principali, eſſendo quaſi rotonde, ed altresì apppena dentate. La terza e la quarta *CC* mancanti appieno delle appendici, le trovai di figura *ſpatolata*, e con denti ſottiliſſimi agli orli; onde ſe non aveſſer peccato anzi che no in picciolezza, ſarebbonſi facilmente ſcambiate colle foglie della *Calendula officinalis*, della *Bellis perennis*, della *Silene gigantea* ecc. La quinta da ultimo *D*, ſebbene della prima e ſeconda alcun poco più anguſta, uniformavaſi però loro in tutto il reſto, fuorchè nelle orecchiette, per averne una ſola, e deſſa ovale di figura, e a foggia di ſega dentata. E qui veda ella ſtravaganza ſingolare! Io al certo non ſaprei dire in genere di foglie di aver mai veduto, così in picciolo, oggetto più variato, e più inſtruttivo di queſto. Vero è che fra l' immenſa famiglia de' vegetabili non mancano piante, che metton foglie di varie maniere: ma o queſto ſuccede in tempi diverſi, come per cagion d' eſempio ſi oſſerva nell' *Euphorbia cyatophora del Murray*, le cui foglie da prima ſon ovate, e in ſeguito *panduriformi*; oppur ſi vede ſolamente accadere in rami diverſi, ſecondo che può da chiccheſſia riſcontrarſi nel *Morus papirifera;* albero che nel Giappone s' impiega a molti uſi domeſtici, e ſegnatamente in fabbricare certa carta di varie qualità, a detta del *Kaempfero*, del *Tunberg*, e d' altri fededegni e rinomati viaggiatori,

Ma torniamo pure di bel nuovo alle grotteſche noſtre foglie, d' onde una breve intromeſſa ci aveva alquanto diſvia-

ti. E primieramente mi sovviene potersi loro attribuire, ciò che fu scritto di ciascun *segmento* del calice regolare delle rose centifolie: voglio dire che due hanno la barba da ambo i lati, due altri ne sono affatto senza, e l' ultimo non ne va che da un sol canto fornito. La cui particolare configurazione di calice venne conosciuta e descritta, se non con purità di stile, con verità almeno di sentimenti da non so qual Poeta, barbuto però senz' altro al paro del arcichebarbutissimo *Aronne*, là dove cantò

Sunt quinque fratres.... uno tempore nati,
Sunt duo barbati, duo sine barba creati,
Unus ex quinque non est barbatus utrinque.

Prendendo di fatto a parte a parte ciascuna delle sopra divisate foglie come un pezzo del calice, e le orecchiette sue laterali per le di lui barbe, sembrami ravvisar fra d' esse una comune somigliantissima qualità, quale si è quella dell' uniforme esterna struttura. E perciò, io diceva, crederei d' aver tutto il diritto d' asserire, che i testè riportati versi leonini ponno benissimo alle medesime foglie eziandio appropriarsi. Tanto più che ad esaminar intimamente la cosa, elleno null' altro sono che gli stessissimi segmenti in così strana guisa trasformati, senz' aver per altro dimessa la vera primitiva figura. Questa metamorfosi potrebbe per avventura sembrarle inverisimile, e forse anche paradossa: pure le dirò, che io son ben lungi dal crederla tale avendo in esse foglie (anatomizzate col ministero di sottili ferruzzi) ritrovato quel sufficiente cumulo di qualità, che per le cose esposte si giudicano stabilire il carattere dei cinque pezzi componenti d' ordinario il calice regolare di consimili rose.

A proseguir poi l' incominciata narrazione, la parte colorita alle finora menzionate foglie soprastante *E*, la rinvenni naturalissima; avendo perfetta convenienza, sia nella forma, sia nel colore, sia nell' olezzare con le altre rose naturali della medesima specie. Nel suo bel mezzo però ergevasi in cambio de' consueti numerosi *pistilli* un corpicciuolo lungo piuttosto e sottile *G*, il qual non può esser meglio denotato, che per la rappresentazione di picciolissima coloncina. Costei di una tinta, che nel giallo tira al bianchiccio, aveva una buona linea di diametro, e quattordici effettive di altezza. Osser-

vandola con lente da mano al di fuori mi si mostrò d'ogni intorno scolpita a minuti longitudinali e paralleli solchetti, terminati da due risalti, tali quali si vedono nelle grandi colonne scannellate. Passando poi a guardarla interiormente mi venne fatto di scoprire esser ella di una sostanza consistente, e di durezza quasi legnosa. A far quest' esame fu d'uopo tagliar a traverso in più pezzetti la coloncina; e con tal mezzo e col favor di un microscopio composto (che mi lavorai per diporto nelle scorse autunnali vacanze) vidi altresì chiaro, che eranvi sulla periferia de' forellini esilissimi, i quali oltra allo scender da cima al fondo, venivano occupati da certo umore d' un lucido argentino. E quest' umore io vedeva patentissimo ogni qual volta comprimeva delicatamente fra le punte delle mollette alcuno di que' pezzettini. Però nominerem noi cotai fori d' esterna sottigliezza *trachee* col *Malpighi*, *vasi umorali*, *fibre legnose*, ovvero canali di diverso genere? Così il contenutovi umore avrassi a giudicare acqua semplice, succo nutritivo, oppur un fluido di tutt' altra natura?..... Ma quanto alla dianzi detta coloncina essa trovavasi nella parte inferiore, ossia nella base circondata da folta lanuggine di color perlato, e dell' altezza quasi de' *filamenti F*, che restavangli d' intorno distribuiti a guisa di circolo. I quali filamenti adorni di *antere* fatte a ellissi, venivano similmente dal medesimo sito; se non che da un' origine alcun poco più bassa, ed in conseguenza vie più prossima ed immediata alla *corolla*.

Non può non essere a di lei notizia, che tutti i migliori maestri d' architettura, purchè camminino con le dovute regole di quell' arte divina, dopo aver trattato del basamento, e della colonna, entrano tosto a far parola del capitello; e ciò a motivo d' esser parte immediata della medesima. Diretto adunque da tal riflessione ella mi permetterà ch' io pure sulle traccie di sì regolate scorte scenda presentemente a favellarle del capitello (piacemi così chiamarlo) ch' alla sopra divisata colonnetta appartiene. Era egli pertanto nato fatto d' altra rosa *R* minore la metà della prima, ossia di due pollici circa di perimetro, ma di tinta assai più viva ed allegra. Qui io rinvenni il calice, il qual però, messo all' esame, non riservossi dal comparire in gran parte mo-

ſtruoſo. In primo luogo conſtava ſolo di tre ſegmenti *S* a proporzione della corolla ſtragrandi, e di figure irregolari. Secondariamente il lor color naturale eraſi nel centro traſmutato in quello di uliva, e verſo la circonferenza tirava all'albiccio, in grazia d'un ſottil velo di bianca peluria, che vi rimaneva al di ſopra. Al fondo poi di ſiffatto calice vi trovai un bel gruppo di ſcompigliatiſſime fila, le quali, per tenermi all'apparenza, ſomigliavano a meraviglia bene colle da me altrove notate, toltone l'eſſere un po più ruvide, luccicanti, e giallette. Reſtavano aſſiepati da ſimili fila oſſia fitta lanuggine quattordici *piſtilli P*, che ad onta di ciò emerger vollero dalla medeſima tre linee, e di vantaggio. Era da non traſcurarſi il cercare, ſe queſte parti femminili foſſer foggiate alla maniera della colonnetta eſiſtente in lor vece nella roſa primaria: ed ho trovato che no, altro mai non avendo eſternamente, che gran quantità di minutiſſimi villi bianchi, i quali, guardandoli con lente dolce, faceanſi diſtinguere per altrettanti ramettini o vettuccie, le quali tutte inſieme coi piſtilli rappreſentavano quattordici arbuſcelli in miniatura. Di sì ſpazioſi arbuſcelli ella non iſtenterà punto a formarne un'idea, ogni qual volta ſi farà ad oſſervare ne' ſuoi eccellenti e prezioſi *Opuſcoli di fiſica animale e vegetabile* la figura di quelle muffe ramoſe, che vanno ſulle cime de' globetti deſtitute. Sebbene quanto ai globetti, vo qui notare in paſſando, che alla ſommità dello ſtelo maeſtro degli accennati arbuſcelli vedevaſi una teſtina fungiforme aſſai ſull'andar di quelle delle muffe: ma che ſpiandola con attenzione non ſi penava gran coſa a riconoſcerla per lo *ſtigma* degli ſteſſi piſtilli. Debbo altresì aggiungere di aver conoſciuti queſti ſtigmi con una piccioliſſima boccuccia o apertura, la quale eſtendevaſi fino all'ovaja: oſſervazione che ſecondo me pare che ſi accordi poco o nulla con quanto ſcrive il Sig. *Adanſon*, vale a dire, che i piſtilli della maſſima parte de' fiori ſi rinvengono pienamente ſerrati. Eppure io mi vado perſuadendo in parte vero il penſamento dell'illuſtre Botanico Ingleſe, relativo alla fecondazione delle piante: cioè che i granellini, o veſcichette del polviſcolo non entrino per lo ſtigma giù nello ſtilo, e così vadano a fecondar le ſemenze nelle ovaja. Imperciocchè

per quante volte io mi abbia troncato a traverſo in varj ſiti i piſtilli di moltiſſimi fiori (coſa di cui altra non ne ho fatta nè più ſpeſſo, nè in più ſvariati tempi) e ſegnatamente de' papaveri, d'ordinario aſſai groſſi e *permanenti*, non mi è ſucceduto giammai di rinvenirne uno ſolo, che albergaſſe internamente verun granello di polvere, ovvero tinto foſſe del ſuo colore. La qual tintura non potrebbe a meno di accadere, ſe i minutiſſimi globettini del polline s' inſinuaſſero effettivamente nei condotti de' piſtilli. Adunque un' *aura ſeminale* è quella, a mio avviſo, che penetrando lo *ſtigma*, indi lo *ſtilo*, giunge da ultimo al germe, e lo feconda. Ma in altra lettera io forſe le parlerò a lungo d'altre mie oſſervazioni e ſperienze riſguardanti la fecondazione delle piante; e valevoli, ſe l' amor proprio non m' inganna, a confermare la mia ipoteſuccia; le quali ſono ſtate da me ora taciute, null' altro eſſendomi diviſato, nel ragionare della preſente Roſa prolifica, che il far le parti di ſempliciſſimo ſtorico.

Del reſto, rifacendomi ſul medeſimo capitello, o a meglio dire ſulla ſeconda bizzarra roſetta, è degno d'eſſer conſiderato come da eſſa ne sbucava fuori una terza ſempre più picciola e ſtravagante. Vedemmo in addietro che quella veniva ſoſtenuta in alto da una coloncina deſtinata come a far le veci di *peduncolo*, poſto perpendicolare all' orizzonte. Queſt' ultima viceverſa ſpuntava immediatamente da un ſuo fianco, ſecondo che ſi rappreſenta in *I*, ed in cambio di dirizzarſi all' alto, piegava all' ingiù, ſenza tendenza alcuna alla perpendicolarità. Inoltre era raffazzonata in certa maniera, e le di lei parti trovavanſi sfigurate sì, che davvero non ſaprei come potergliela adombrare, non che deſcrivere. Tuttavolta poſſo dirle, che moſtravaſi eſteriormente lacera in più luoghi, e fuor di modo ſcolorita; di maniera che non vi volle poco a diſtinguere il calice; eſſendo da prima, oſſia in vicinanza della baſe tinto appena d'un verde tenero, che appreſſo facevaſi bianchiccio, e da ultimo prendeva ſu il medeſimo color de' petali. Anzi a dirla più filoſoficamente in tal luogo ogni ſegmento era vero veriſſimo petalo. Parlando poi dell' interno, la corolla rimane del tutto fuori d'ordine, ed i pezzi componenti la ſteſſa ſono in cento guiſe aggrovi-

gliati. Quivi ſtentai a ripeſcare gli organi della generazione, ed in iſpecie i femminili, a motivo della picciolezza; tal che l' occhio diſarmato non arrivava certo a diſcernerli. Ed il ſimile vuol dirſi de' maſchili eſſendo eglino pure naſcoſti fra' petali, e diſſeminati ſenza legge ove che ſia: tranne tre ſoli che in cambio dell' antera ſoſtenevano una ſottil fogliuzza di color caſtagno *LLL*. Per la qual coſa ſe a tutto ciò vorremo aggiungere ancora il ravviluppamento, la varia lunghezza, e la general confuſione di tutte le parti, ella ſcorgerà ſempre meglio, che quanto rieſce facile e curioſa a vederſi queſta ſingolariſſima roſellina, altrettanto è malagevole il deſcriverla aggiuſtatamente.

Fu ſpiccato dal roſajo queſto fiore moſtruoſo ſul decader di Maggio nel ben accivito ed elegante giardinetto del Sig. *Agoſtino Perſiani*, il quale, come dal principio le diceva, in atteſtato della ſincera amicizia ſua verſo di me volle graziosamente regalarmelo. Ma ſiccome a tanto per me caro e prezioſo dono, di lì a pochi giorni ne fe ſuccedere un altro del medeſimo genere, così avendola io, ſtimatiſſimo Sig., già meſſa a parte del primo, non ſo riſolvermi ora a goder da ſolo a ſolo il ſecondo. Piacemi d' eſſer ſeco lei liberale. Laonde eccogliene un picciol ſaggio dentro poche righe riſtretto, col ſignificarle cioè che dopo una ſettimana o in quel torno fu colta ſulla ſteſſa pianta, e dal medeſimo Sig. *Perſiani* altra roſa parimenti prolifica, e niente meno della già deſcrittale in varie parti sformata, e moſtruoſa. In effetto facendola paſſare in riviſta ſotto le d ta, trovai che in cambio del calice aveva cinque foglie di color verde bruno, la cui figura groſſolanamente accoſtavaſi a quella delle cinque foglie nella prima roſa oſſervate. Che nella corolla, oltre la totale irregolarità, vi eran de' petali ſcoloriti a ſegno, che in ſu la *lamina*, e verſo l' *unghia* onninamente sbiancavano. Che le ſtamigne, ed i piſtilli, giudicar volendo da quanto annunziano i ſenſi, mancavano affatto; inalzandoſi in vece, e dove appunto ſono d' ordinario impiantati, un corpicciuolo maſſiccio, di color gialletto, lungo ſei linee, e groſſo a proporzione. Queſto ſpiandolo col vetro mi ſi traſmutò in un faſcetto di fili, i quali coll' intrometter fra d' eſſi ſuperficialmente tanti eſiliſſimi ſpazj longitudinali, venivano a for-

mare altrettanti solchetti, che avevan de' già notati sulla coloncina il parallelo nella figura. Non per tanto cotesti fili io piegherei a crederli *filamenti* allungati, e convertiti nell' annunziato fascettino: indottovi a preferenza dall' analogia grande da me rilevata fra il medesimo ed il corpicello cilindrico, che formano gli stami del *Solatro scandente*, o *Dulcamara* del *Linneo*. Una circostanza però accompagnante simile metamorfosi vuol esser rammemorata: ed è che alla di lui sommità aggiravansi tre petali meschinissimi della tinta, e dell' odore quasi de' naturali, ma però talmente aggruppati insieme, che non fu possibile distrigarli senza qualche rottura. Inoltre è da notarsi, come di mezzo a tali petaluzzi si elevava una *gemma foglifera* già già sviluppata, e di color giallo verde, dal cui centro ne sortiva un' altra minore, e da questa una terza minore ancora, le quali tutte cominciavano a prendere una sfumatura rossigna: ciascuna per altro riguardo alla figura sull' andar di quelle, che metton fuori i rosaj al comparire della deliziosa e gradita primavera.

Non sarebbe fuor di proposito il sentirla qui chiedere, se di quest' ultima rosa ne abbia fatto il disegno, come le parrà probabilmente che avesse addimandato la bisogna. Ed io con ingenuità le rispondo, che alcune mie occupazioni di maggior importanza non mi permisero in quel mentre di soddisfare il mio desiderio, siccome ebbi l' agio di appagarlo quando fummi recata la prima. Ma sebbene non vada fornito della figura copiata dal naturale, so tuttavia dove trovasene una sufficiente a richiamare la sua idea: voglio dire nelle Memorie del 1707. della Reale Accademia di Parigi. Avvi pertanto nel volume di quell' anno una Dissertazioncella di Mr. *Marchant* sopra una rosa mostruosa da lui ritrovata il dì 13. Luglio, le cui mostruosità consistono, valendomi delle sue proprie parole, I. *En ce que, au lieu du bouton ou pericarpe, qui ordinairement termine le pedicule de la rose, & ou les graines sont contenües, il y avoit cinq feüilles en côte, qui soûtenoient la fleur, & qui en cet endroit tenoient lieu de calice.* 2. *Qu' à la place des filets, des sommets, & des autres petits corps charnus, qui dans l' etat naturel occupent le melieu de la rose, on remarquoit un bourgeon*

qui

qui s' élevoit, *& commençoit à former une branche*, *qui vraisemblablement seroit devenuë par la suite une branche ligneuse*, *d' une grosseur*, *& d' une longueur considerable* ecc.. Il disegno adunque di questo fiore toccante, com' ella vede, alcune mostruosità analoghe in parte alle da me antecedentemente rilevate, può, a mio giudizio, supplire per quello, che avrei dovuto io stesso formare; ed in conseguenza facendosi ad osservarlo renderle più sensibili i miei estremi racconti.

Darò compimento a questa lunga mia lettera col dir qualche cosa in compendio relativamente all' origine delle medesime rose. *La génération des végétaux*, scrive il sublime Contemplatore della Natura (*a*), *n' a pas une régularité constante*: *les loix*, *suivant les quelles elle s' opere*, *sont quelquefois troublées ou modifiées par divers accidens*. *De là naissent differents especes des monstres*, *& des mulets*. Ciò presupposto quali adunque saranno stati gli accidenti, quante le cause producenti la trasformazione de' nostri fiori? D' onde, in una parola, cotai mostri per eccesso? *Je n' entraprendrai point de l' expliquer*, ripiglierebbe qui forse colla consueta di lui grande ingenuità lo stesso Naturalista di Ginevra. Almeno io così la penso, non tanto per aver veduto che queste sono le parole, con cui chiude un paragrafo sopra una foglia di *cavol fiore* mostruosa nella IV. Memoria delle sue *Recherches sur l' usage des feuilles*, quanto per aver trovato eziandio che sebbene entri poi nella medesima dissertazione a parlare d' altra maniera di mostro, vuolsi dire di una rosa dal di cui centro si estolle un fusto quadrato, che porta alla sommità due bottoni *floriferi* diametralmente opposti, e privi del calice, pure nè anche in questo luogo entra nella spiegazione della di lei origine, e non azzarda la menoma congettura.

Non però con tanta modestia si diporta il sopraccitato M. *Marchant* là dove si fa a ragionare delle cagioni, che possono aver dato origine alle mostruosità della rosa da lui

(*a*) Contem. de la Nat. part. X. cap. XIV.

osservata. Anzi chiaro dimostra con le sue parole d'esser tutto disposto a credere ch'elle derivino dallo stravaso, e mescolamento de' succhi, accaduto ne' vasi del rosajo a motivo del taglio, a cui dovette alquanto prima soggiacere. Ma questa spiegazione, benchè apparirscente, non sarà mai ch'io m'induca ad adottarla per render ragione, o dirò meglio per ispiegare in qualche plausibil maniera l'origine delle nostre rose prolifiche. Imperciocchè primamente io considero ch' elleno sono d'un genere di mostri diverso da quello dell' Accademico Parigino: e quindi che al più al più è permesso il dire, che le cause secondarie o accidentali possono bensì alterare il colorito, e modificare la forma di un fiore, di un frutto, e finalmente anche di una pianta stessa, ma non giammai far nascere nuovi alberi, frutta novelle, e fiori non più veduti: quali appunto sembrano quelli che fino da bel principio mi studiai di porle distintamente sott' occhio.

Adunque che dovrassi pensare intorno alla formazione, ed ai principj, a' quali vanno debitori della stravagantissima loro figura? Come spiegare un fenomeno cotanto astruso, che ha diviso, e tutt' ora divide i più valenti Fisici? In quanto a me, dottissimo Sig., non so veder che due semplici mezzi. O dir bisogna col famoso Conte di *Buffon*, che le due nostre rose sieno state formate dalle predilette sue *molecole organiche* riunite e disposte in sì bizzarra guisa dalla forza attiva e vegetatrice: ovvero che procedon da germi così originalmente creati. Non avvi fondamento d'abbracciare la bella ipotesi Buffoniana, stante che le molecole organiche, e le forze attive o sieno plastiche, *sono omai state*, a dirla colle di Lei parole, *per tali e tanti argomenti mortalmente sconfitte, che nulla più trovasi in esse di reale, che il nome* (a). Laonde non rimane, come mostrai apertamente, che ricorrere al propizio refugio della preesistenza de' germi mostruosi; la quale viene da' suoi fautori con prove sì numerose ed incontrastabili dimostrata, che pare non potersene davvantaggio dubitare. E di vero basta leggere i *Winslow*,

(*a*) Opuscolo sugli Anim. infus. part. II. cap. XI.

gli *Halleri*, i *Vallisnieri*, i *Reaumur*, i *Bonnet*, ed altri per restarne pienamente persuasi. Sebbene e chi non vede, che questa sentenza tanto più acquista di forza, e di persuasione, quanto viene di giorno in giorno vie maggiormente assistita dalle osservazioni, e dai fatti? Accresca il di loro numerosissimo stuolo un fatto novello da me osservato, e vaglia in grazia della brevità per que' molti, che potrei qui produrre. Saprà che si allegano, come la più concludente dimostrazione dell' esistenza de' germi mostruosi, *due cervelli in una sola testa* (*). Ora convienmi dirle d'avere, non è gran tempo, veduto con gli occhi miei proprj presso l'eruditissimo Sig. *Jacopo Biancani* Professore di Antiquaria in questo celebre Instituto delle Scienze (*a*) un uovo di gallina più grande dell' ordinario, il quale ne capiva un altro minore, ma corredato della naturale corteccia pienamente compita ed indurata. Nuotava egli nell' *albume duplicato*, ossia nella chiara del primo, che era poi circondata dalla terza e quarta membrana, le quali restavano in fine riparate e difese dal guscio esteriore. Io non saprei raccontarle cosa racchiudasi nell' uoviccino imprigionato, stante che fummi bellamente proibito d'aprirlo, e d'esaminarne in conseguenza le di lui parti interne, come avrei davvero bramato. Ad ogni modo stimo bene di non occultarle, che la madre gallina, la quale si sgravò felicemente di simil uovo, ne aveva prima partoriti diversi a due tuorli.

Partendo adunque da questo fatto, e da altri moltissimi registrati nelle opere de' celebri sopraccitati Fisiologi e Naturalisti, a me pare di poter con ogni ragione inferire, che la maggior parte de' mostri, sieno animali, sieno vegetabili, non procede da fortuite cagioni, come opinano alcuni, ovvero dalle speziose molecole organiche del *Buffon*, ma bensì da germi *originalmente* mostruosi. Ed in conseguenza io cre-

Rrr ij

(*) *Winslow* Mem. dell' Accad. an. 1742.

(*a*) Questo stimabile mio amico fu colpito da improviso colpo d' apoplessia il dì 9 di Novembre 1789, onde dovette chiudere le luci al giorno per non rivederlo più mai, con mio sommo dolore, ed universale rammarico di tutti i buoni.

do di poter ammettere per lo meno come probabilissimo che anche le nostre rose prolifiche traggono la loro origine da consimili germi. Ma ella non pensi mica per questo, ch' io voglia affatto rimuovere l'azione delle cause secondarie dalla formazione d'essi fiori: mai no; anzi la veggo favorevolissima. Dico soltanto, che il Naturalista filosofo non può, e non deve per le addotte ragioni ripetere da essa interamente l'origine. Ed ecco, celebratissimo Sig., quali sarebbero in succinto i miei deboli pensamenti; tuttochè non ardisca di decidere, sapendo già quanto astrusa e difficil sia la spiegazione de' mostri. Per la qual cosa non ho da soggiungere, se non che attendo con sommo desiderio su questo articolo il di lei pesato giudizio; il quale, o che vaglia a confermare la mia congettura, o che venga a distruggerla, io l'avrò sempre egualmente a sommo grado; poichè così a me avverrà ciò, che suole avvenire a quelli, i quali frequentando uomini grandi, non ne partono dalla loro pratica, che arricchiti di lumi nuovi, e di nuove cognizioni. Il che ottenendo io dalla di lei gentilezza, l'assicuro con le parole del suo grande amico *Bonnet*, che *mon coeur ne sera jamais réfractaire a la veritè*. Poichè al riflettere dell'amatissimo mio Maestro Sig. Abate *Giambatista Tondini*, nella Prefazione alle *Memorie della vita di Paolo Rolli* „ tropo trista è la figura, „ che far si vede nella repubblica letteraria a quegl' imposto-„ ri, che stampano libri senza nominare neppur per gratitu-„ dine i nomi di chi e notizie, e più che notizie loro sugge-„ risce. Al contrario sono troppo seducenti le lodi, che nella „ prefazione della sua storia naturale dà Plinio a coloro, che „ ingenuamente confessano gli ajuti, che hanno d'altronde „ ricevuti „. *Est benignum*, dic' egli, *& plenum ingenui pudoris fateri*, *per quos profeceris*.

E qui offerendole di bel nuovo tutto me stesso, in grata riconoscenza del sì prezioso dono, ch'ella si è compiaciuta di farmi della sua benigna padronanza, e pregiatissima amicizia, la prego a continuarmi questa felicità, che mi bea tanto, e tanto mi onora, nell'atto che pieno della più riverente ed ossequiosa stima mi ratifico tutto suo

Bologna 14 Giugno 1789.

P
R
I
L
S
L
G
L
F
E
C
C
B
D
B

P
R
I
L
S
L
G
L
F
E
C
C
D
B
B

DELLA

VELOCITA' DELL' ACQUA PER UN FORO NEL FONDO DI UN VASO, CHE ABBIA UNO, O PIU DIAFRAMMI: E DELLA VELOCITA' PURE DELL' ACQUA PER UN TUBO VERTICALE CILINDRICO, O DIVERGENTE, ANNESSO A UN FORO NEL FONDO DI UN VASO SEMPLICE: E DEL SOFFIO CHE SI PROCURA NELLE FORNACI DI ALCUNE FERRIERE COL MEZZO DELL' ACQUA.

Del Sig. Teodoro Bonati.

1. EMpito di acqua il vaſo priſmatico *ACDB* ſi apra un piccolo foro *M* nella ſponda verticale *DB*, e quant' acqua eſce per *M* altrettanta ne venga aggiunta contemporaneamente in *AB*, coſicchè nel vaſo l'acqua abbia la ſua ſuperficie ſuperiore coſtantemente in *AB*, e ſia la linea orizzontale *BG* lo ſpazio da ſcorrerſi in 1″ colla velocità media dell' acqua pel foro *M*. In appreſſo la ſuperficie dell' acqua nel vaſo ſia mantenuta coſtantemente più baſſa, come in *EF*, e ſia *FH* lo ſpazio da ſcorrerſi in 1″ colla nuova velocità media dell' acqua per *M* in queſto ſecondo caſo. Così le *BG*, *FH*, ecc. potranno eſprimere le velocità per *M* eſſendo l'acqua mantenuta prima in *AB*, poi in *EF*, ecc.

2. Perchè le molte ſperienze fatte danno, che le velocità medie per *M* ſono in ragion ſudduplicata delle altezze dell' acqua ſopra il foro, avremo $BG : FH :: \sqrt{(MB)} : \sqrt{(MF)}$. Dunque le velocità *BG*, *FH*, ecc. terminano a una parabola *MHG* di un qualche parametro *p*. Dunque $BG = \sqrt{(p \cdot MB)}$, $FH = \sqrt{(p \cdot MF)}$, ecc. E dicendo *M* l'aja del foro, *M* ſarà $M \cdot BG = M\sqrt{(p \cdot MB)}$ l'acqua, ch'eſce per *M* in 1″ coll' altezza *MB* ſopra il foro; ed $M \cdot FH = M \cdot \sqrt{(p \cdot MF)}$ ſarà l'acqua per *M* in 1″ coll'altezza *MF*.

3. Se al foro *M* fatto per esempio in una lastra sottile ne sostituirò un altro o più grande, o più piccolo, però fatto esso pure in una lastra egualmente sottile, egualmente pulito, ecc., giusta le sperienze fatte le velocità pel nuovo foro saranno le medesime *BG*, *FH*, ecc. di prima, e termineranno alla medesima parabola *MHG* dello stesso parametro *p*; e le quantità d'acqua uscite pel foro in 1″ saranno diverse dalle prime solamente in ragione dell'aja del foro accresciuta, o diminuita.

4. Ma se chiuso il foro *M* se ne apra un altro *N* dello stesso diametro, che il foro *M*, ma armato di un tubo addizionale esterno dello stesso diametro che il foro, e lungo un diametro del foro, la sperienza ha mostrato, che le velocità medie per *N* saranno bensì parimente come le radici delle altezze dell'acqua sopra il foro, ma tutte saranno maggiori delle *BG*, *FH*, ecc. come sarebbero le *Bg*, *Fh*, ecc., che termineranno ad un'altra parabola di un parametro *q* maggiore del primo *p*.

5. Che se il foro sarà come *m* fatto nel fondo *CD* (*f*. 2), le velocità saranno pure in ragion suddduplicata delle altezze dell'acqua sopra il foro; e variandone il diametro termineranno tuttavia alla stessa parabola del parametro *p* se il foro sarà sempre in una lastra sottile, oppure termineranno alla parabola del parametro *q* se il foro sarà sempre armato di un tubo nella maniera accennata (4).

6. Il parametro riuscirà ancora diverso tanto pel foro *m* nel fondo, che pel foro *M* in una sponda (*f*. 1) se il foro sarà fatto in una lastra grossa, o verrà armato con un tubo esterno di diverse lunghezze, o con un tubo interno, o con un tubo conico convergente, o divergente, o con un imbuto di dentro, o se invece di essere nel mezzo del fondo sarà accanto a una sponda.

7. In tutti questi casi il parametro si può trovare con una sperienza. Essendo l' acqua dentro il vaso mantenuta come in *AB* si trovi quanta n'esce pel foro in un dato tempo, e quanta in conseguenza n'esce in 1″; e questa si dica $\mathfrak{Q}$. Trattandosi del foro *M*, e della parabola *MHG* dev'essere $\mathfrak{Q} = M \,.\, BG = M\sqrt{(p \,.\, MB)}$ (2); onde $p = \frac{\mathfrak{Q}^2}{M^2 \,.\, MB}$. Simil-

mente ſi pratichi in tutti gli altri caſi accennati; cioè per avere il parametro in ognuno dei caſi diverſi ſi divida il quadrato della quantità dell'acqua uſcita in 1″ pel prodotto del quadrato dell'aja del foro nell'altezza dell'acqua ſopra il foro. Il parametro, che riſulta dallo ſperimento fatto dal *Guglielmini* con un foro quadrato in una laſtra ſottile del lato di un quarto d'oncia del piede di Bologna, o ſia di lin. 3 $\frac{1}{5}$ del piede di Parigi, e coll'altezza dell'acqua ſopra il centro del foro di pi. 4 . 9 . 0, è di pi. 15 $\frac{1}{4}$. Dalla ſperienza del *Mariotte* (Diſcorſo 2. parte III) con un foro del diametro di 3 linee in una laſtra, della quale non ſi ſa la groſſezza, e coll'acqua alta 13 piedi, riſulta un parametro di p. 29. 5. 9. Dalla ſperienza del Sig. *Michelotti* con un foro del diametro di 3 pollici in una laſtra ſottile, e coll'altezza d'acqua di pi. 21 . 7 . 4 ſopra il foro riſulta il parametro di pi. 22 . 8 $\frac{4}{5}$. E dall'altra ſperienza dello ſteſſo Autore con un foro pure di 3 pollici, ma armato interiormente con un imbuto cicloidale riſulta il parametro di pi. 59 . 9 (Volume primo pag. 36, 105) minore di poco del noto parametro di pi. 60 . 4 della parabola, le cui ſemiordinate ſono lo ſpazio da ſcorrerſi in 1″ colla velocità del grave caduto dalla corriſpondente aſciſſa.

8. Mentre l'acqua è mantenuta in *AB* (*f.* 2.) la velocità pel foro *m* diſarmato non è già una velocità acquiſtata dall'acqua, che diſcenda coll'accelerazione dei gravi da *AB* fino in *m*, e che ſi muova per la ſola *cataratta*, o pel ſolo ſpazio *AEmFB*, che ſi concepiſca deſcritto colla rivoluzione di una iperbola, rimanendo il reſtante dell'acqua *AEmC*, *BFmD* affatto immobile, come hanno malamente fatto dire al *Newton* due grand'uomini (coſa ſorprendente!) *Giovanni Bernoulli* prima, e poi d'*Alembert*, ed in ſeguito altri. Si veda a queſto propoſito il § *Sed foramen* della prop. 36 del lib. II. del *Newton*; la parte II. del t. IV. dell'Idraulica di *Gio. Bernoulli*, e l'Enciclopedia alle parole *Cateracte*, *Hydrodinamique*. Le direzioni vere delle particole acquee da *AB* fino al foro ſono giuſta le linee punteggiate della fig. 3; e la velocità di eſſe particole da principio è piccola, e per buona parte della diſceſa è uniforme. Solamente quando arrivano a una certa piccola diſtanza dal foro paſſano preſto a

un moto ſenſibilmente maggiore, e con ſempre nuove accelerazioni arrivano al foro *m*.

9. Queſto moſtra, che l' ultima velocità, che è al foro, è effetto di una preſſione dell' acqua nelle vicinanze del foro, che incalza da tutte le bande l' acqua anteriore ſpremendola con una data velocità fuori del vaſo in una guiſa, ſon per dire, conſimile a quella di un nocciolo di ciriegia, che vien cacciato con velocita dalle polpaſtrelle di due dita, che lo comprimano.

10. Codeſta preſſione, che ſente l' acqua preſſo il foro dall' altr' acqua, che le ſovraſta, e l' attornia, ſe il vaſo foſſe nel voto, deriverebbe unicamente dal peſo dell' acqua dentro il vaſo, e ſarebbe proporzionale all' altezza della medeſima acqua ſopra il foro. Ma eſſendo il vaſo nell' aria la preſſione, che genera la velocità in *m*, è propriamente un riſultato di tre preſſioni, due delle quali ſono coſpiranti all' ingiù, ed una è contraria. Imperocchè l' acqua preſſo il foro oltre la preſſione, che ſente dall' acqua, ch' è in ragione dell' altezza DB della ſteſs' acqua, ſente ancora la preſſione dell' aria, che gravita in AB come un' acqua alta 32 piedi, o alquanto più. Dicendo queſt' altezza A, al foro *m* abbiamo veramente una preſſione all' ingiù eguale a quella di un' acqua dell' altezza $DB+A$. Ma queſta non può impiegarſi tutta in produrre velocità al foro perchè impedita in parte da un' altra preſſione, che fa pure l' aria contro il fondo, e contro il foro *m* con direzione contraria alle due prime, cioè all' inſù, e ch' è eguale a quella dell' acqua di un' altezza H, ch' è maggiore dell' altezza A, benchè di poco, cioè quanto importa il peſo dello ſtrato dell' aria ambiente il vaſo, e dell' altezza DB dell' acqua nel vaſo. Se il peſo di codeſto ſtrato d' aria ſarà $\frac{1}{900}$ del peſo di un eguale ſtrato di acqua, ſarà $H = A + \frac{DB}{900}$.

11. Queſta preſſione H al di ſotto del foro dee eliderne altrettanta dalle due preſſioni $A+DB$ ſuperiori al foro, coſicchè di queſte non rimane di libera, ed atta a produrre velocità al foro, che la porzione reſidua $DB+A-H$; la quale poi

le poi (per essere $H = A + \frac{DB}{900}$) si riduce ad essere $\frac{899DB}{900}$; cioè quasi DB, cioè quasi quella sola pressione, che avremmo nel voto (10); e così si spiega bene, come un vaso pieno di acqua, e con un piccolo foro aperto nel fondo si sia votato in tempi sensibilmente eguali tanto nell'aria, che nella macchina pneumatica.

12. Per tutto questo converrà concludere, che la velocità dell'acqua ai fori, che pur dee dipendere da una pressione (9), sia da ripetersi dalle sole altezze prementi *residue*, e *libere* fatta che siane la detrazione delle pressioni opponentisi all'uscita dell'acqua; cosicchè avendo dimostrato la sperienza, che nei vasi semplici, come $ACDB$, posti nell'aria le velocità sono sensibilmente come le radici delle altezze dell'acqua sopra il foro, si dovrà stabilire che le dette velocità propriamente siano in ragione delle radici delle altezze prementi *libere* nel senso spiegato.

13. Quindi volendo fare l'ipotesi, che venga a mancare l'aria soltanto al di sotto del fondo CD, siccome allora l'altezza premente $DB + A$ sarà tutta libera, dovremo dire che la velocità al foro prima che mancasse l'aria sotto alla velocità dopo stia come le radici delle altezze prementi libere nei due casi, cioè $:: \sqrt{(DB + A - H)} : \sqrt{(DB + A)}$: E perciò se per esempio fosse $DB = 4$ piedi, ed $A = 32$ piedi, ed $H = 32$ piedi più una quantità trascurabile, le due velocità staranno $:: \sqrt{4} : \sqrt{(4+32)} :: 1 : 3$; il che fa vedere quanto recedano dal vero quei, che dicono indistintamente *poca* la resistenza, che fa l'aria ai getti d'acqua.

14. Poichè essendo il vaso nell'aria si può contare, che l'altezza premente libera sia DB (11), se il foro m sarà in una lastra sottile, cui competa il parametro p, come al *n.* 3, l'acqua per m in 1″ giusta il *n.* 2 sarà $m\sqrt{(p.DB)}$, e nel caso che mancasse l'aria solamente sotto il foro, nel quale l'altezza premente libera è $DB + A$, la velocità per m, o sia lo spazio da scorrersi in 1″ colla velocità media pel foro m (1) sarà $\sqrt{(p.(DB+A))}$, e l'acqua uscita per m in 1″ sarà $m\sqrt{(p.(DB + A))}$.

15. Premesse queste cose vengo al caso di un diaframma.

Al vaso finora contemplato $ACDB$ col foro m sia unito un altro vaso (EFD (*f*. 4) col foro n nel fondo, e così avremo un vaso $AEFB$ con un diaframma CD. Chiuso il foro n si empia tutto il vaso di acqua, e perchè l'aria esca tutta gioverà l'aprire un foro nella sponda appena sotto C da chiudersi empito che sarà tutto il vaso. Si apra indi il foro n, e la parte superiore $ACDB$ sia mantenuta sempre piena di acqua fino in AB. Verrò prima a un caso particolare. I fori m, n sieno eguali; e sieno ambi fatti in lastre egualmente sottili, e così, che competa loro lo stesso parametro. Sia $DB = 1$ piede, $DF = 100$ piedi, $A = 32$ piedi (10). Ciò posto: l'acqua presso il foro n non può a meno di sentire la pressione all'ingiù di tutta l'acqua $FD = 100$. Da questa pressione si levi la contraria sotto il foro $= A =$ 32 piedi, e sopra n avremo un'altezza premente libera non minore di piedi 68. In m poi non possiamo avere una pressione maggiore di $DB + A$, ossia maggiore di 33 piedi. Dunque appena aperto il foro n avremo per n più velocità, che per m, giacchè essendo le altre circostanze pari abbbiamo in n una pressione libera non minore di 68, ed in m una pressione non maggiore di 33. Dunque perchè i fori sono eguali, uscirà in egual tempo più acqua per n che per m. Dunque comincierà subito a formarsi un voto fra la superficie come QP dell'acqua inferiore, che si abbassa, e la parte inferiore del diaframma CD. Nè codesto voto $CQPD$ cesserà di crescere se non quando coll'altezza diminuita FP dell'acqua sopra il foro n si abbia per n una velocità minore di prima, e ridotta ad essere eguale alla velocità per m, com' è manifesto.

16 Vengo ai termini generali. Si dica m l' aja del foro m, ed n l' aja del foro n. Sia p il parametro competente al foro m, e q sia il parametro pel foro n. La pressione dell'aria in $AB = A$, e la pressione dell'aria al foro $n = H$. Per le cose dette all' aprirsi del foro n avremo sopra n un' altezza premente libera non minore di $DF - H$, ed una velocità non minore di $\sqrt{(q.(DF-H))}$, e perciò passerà per n in 1'' una quantità d'acqua non minore di $n\sqrt{(q.(DF-H))}$. Ed in m avremo una pressione libera non maggiore di $DB + A$; e perciò una velocità non maggiore di $\sqrt{(p.(DB+A))}$,

e passerà per m in 1'' un'acqua non maggiore di $m\sqrt{(p.(DB+A))}$. Quindi finchè si troverà $n\sqrt{(q.(DF-H))} > m\sqrt{(p.(DB+A))}$ sarà manifesto, ch' è per passare, aprendo il foro n, più acqua per n, che per m; e che in conseguenza sotto m si formerà un voto.

17 Crescendo il voto, cala l' altezza dell'acqua sopra n, ed in conseguenza scema la velocità, e l' uscita dell' acqua per n. L'acqua siasi abbassata fino in QP. Allora la pressione residua e libera in n sarà $PF-H$, e la velocità in n sarà $\sqrt{(q.(PF-H))}$, e la quantità d'acqua per n in 1'' sarà $n\sqrt{(q.(PF-H))}$; ed intanto l'acqua per m continuerà ad essere in 1'' $m\sqrt{(p.(DB+A))}$ come prima. Quindi allora il voto cesserà di crescere quando si avrà $n\sqrt{(q.(PF-H))} = m\sqrt{(p.(DB+A))}$ perchè allora per n, e per m passeranno quantità eguali di acqua in tempi eguali.

18. Se sulle prime si avesse avuto appunto $n\sqrt{(q.(DF-H))} = m\sqrt{(p.(DB+A))}$, ciò avrebbe indicato che aprendo il foro n era per correre egual acqua per n, e per m, e che non vi sarebbe stato da aspettarsi voto veruno.

19. Ma se all'aprire il foro n si avesse $n\sqrt{(q.(DF-H))} < m\sqrt{(p.(DB+A))}$, cioè se la pressione $DF-H$ non fosse bastante per far uscire per n tant'acqua quanta nel medesimo tempo potrebbe sopravvenirne da m, in tal caso l'acqua inferiore al diaframma resta incalzata dalla superiore, e sforzata ad accrescere la sua velocità più di quello importi la sola pressione dell'altezza di acqua $DF-H$; ma nel tempo stesso la superiore avendo impiegata una parte della sua pressione $DB+A$ nello spingere al basso l'acqua inferiore, impiegherà soltanto il rimanente in produrre la velocità per m, e si ripartirà così, che tanto per m, che per n passi in un tempo copia eguale di acqua.

20. Per trovare quel tal grado di velocità pei fori m, n sia z quell'altezza di acqua, che corrisponde alla pressione, colla quale l'acqua superiore al diaframma unitamente alla pressione dell'aria in AB spinge l'inferiore: e si dica $b=DB$, $c=DF$. Pertanto la pressione sopra n sarà $DF+z=c+z$, dalla quale sottraendo la pressione contraria in n, cioè la pressione H, si avrà sopra n la pressione libera $c+z-H$. La pressione poi residua, e libera sopra m sarà $b+A-z$.

Quindi la velocità per n sarà $\sqrt{(q.(c+z-H))}$, e la quantità d'acqua per n in 1″ sarà $n\sqrt{(q.(c+z-H))}$. Come pure la velocità per m sarà $\sqrt{(p.(b+A-z))}$; e la quantità d'acqua per m in 1″ sarà $m\sqrt{(p.(b+A-z))}$; e dovendo essere eguali le dette due quantità di acqua, cioè dovendo essere $n\sqrt{(q.(c+z-H))}=m\sqrt{(p.(b+A-z))}$ si troverà

$$z=\frac{m^2p.(b+A)-n^2q.(c-H)}{m^2p+n^2q}$$, e la velocità pel foro n, cioè

$$\sqrt{q.c+z-H}=\frac{m\sqrt{(qp.(b+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}$$, e la velocità pel foro m,

cioè $\sqrt{(p.(b+A-z))}=\dfrac{n\sqrt{(pq.(b+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}$, e l'acqua tanto per m, che per n in 1″ sarà $\dfrac{mn.\sqrt{(pq.(b+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}$. E qui è da notarsi, che sarà z positiva quando $n^2q.(c-H) < m^2p.(b+A)$, oppure $n\sqrt{(q.(c-H))} < m\sqrt{(p.(b+A))}$, ossia (poichè $b=DB$, $c=DF$) $n\sqrt{(q.(DF-H))} < m\sqrt{(p.(DB+A))}$, che è il caso, che qui si contempla (19); e che in conseguenza sarà $z=o$ quando $n\sqrt{(q.(DF-H))}=m\sqrt{(p.(DB+A))}$, ch'è il caso del n. 18; e che sarà z negativa quando $n\sqrt{(q.(DF-H))}>m\sqrt{(p.(BD+A))}$, ch'è il caso del n. 16 cioè quello del voto sotto il diaframma.

21. Le suddette formole sono applicabili al caso, che invece dell'acqua, e dell'aria si avessero altri fluidi, come sarebbe se invece di acqua dentro il vaso AF si avesse del mercurio; ed invece dell'aria fuori del vaso si avesse un'acqua stagnante colla superficie YZV. In questo caso siccome il mercurio pesa 14 volte quanto l'acqua, sarebbe A un'altezza di mercurio $=\dfrac{ZB}{14}$, ed H un'altezza di mercurio $=A+\dfrac{BF}{14}=\dfrac{ZF}{14}$. Allora se l'altezza BF del vaso non fosse assai piccola, la quantità $A-H=-\dfrac{BF}{14}$ non si potrebbe trascurare, come si può molte volte trascurare nel caso, che

trattiamo di acqua, e di aria, nel quale $A-H=-\frac{BF}{100}$.

22. Se i due fori saranno fatti in lastre egualmente grosse, o armati egualmente (6), cosicchè competa ad ambi uno stesso parametro p; e se inoltre si vorrà trascurare la quantità $A-H$, si avrà $z=\frac{m^2b-n^2c}{m^2+n^2}+A$ (20); e la velocità pel foro $n=\frac{m\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ e la velocità pel foro $m=\frac{n\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; e l'acqua tanto per l'uno, che per l'altro foro in $1''=\frac{mn\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

23. Al n. 20 abbiamo detto z quell'altezza di acqua, che corrisponde alla pressione, colla quale l'acqua superiore al diaframma unitamente all'aria premente in AB incalza, e spinge l'acqua inferiore al basso. Ora si osservi, che questa pressione z aggiunta all'altra dell'acqua sotto il diaframma, cioè la pressione $DF+z$, agisce non tanto al foro n, che sopra ogni parte del fondo EF egualmente; come pure anche contro le pareti interne del vaso, dove si uniscono al fondo; e che dal fondo andando in su la pressione dell'acqua contro le pareti scema in ragione della distanza dal fondo, cosicchè in qualunque punto R della sponda verticale la pressione interna dev'essere $DF+z-FR$; e che in conseguenza in D appena sotto il diaframma sarà $DF+z-FD=z$; e sarà anche quella, colla quale il diaframma è spinto dall'acqua inferiore all'insù; ed appunto quella, colla quale l'acqua inferiore si oppone alla discesa dell'acqua superiore pel foro m, com'è manifesto, e che viene equilibrata da quella parte di pressione, che già abbiamo detta z al n. 20, e che s'impiega dall'acqua superiore per incalzare l'acqua inferiore quelle volte che sia $n\sqrt{(q.(FD-H))}<m\sqrt{(p.(DB+A))}$ (19).

24. La pressione poi esteriore in R, che deriva dall'atmosfera, è maggiore della pressione A quanto importa il peso dello strato d'aria dell'altezza BR; e supponendo questo peso $\frac{1}{900}$ del peso di un eguale strato di acqua, dicendo N

la pressione dell' aria in R sarà $N = A + \frac{BR}{900}$. Se la pressione dell' acqua interna in R sarà eguale alla pressione dell' aria pure in R, cioè se sarà $DF + z - FR = N$, allora fatto un foro in R si avrà l' equilibrio fra la pressione dell' acqua, che tende ad uscire pel foro, e la pressione dell' aria, che tende ad entrare pel medesimo foro. E siccome dal punto R in giù la pressione interna cresce più di quello cresca la pressione esterna quanto l' acqua pesa più dell' aria, facendo un foro fra R ed F, l' acqua per questo foro uscirà: ed al contrario perchè da R insù la pressione interna scema più che l' esterna, fatto un foro fra R e D, l' aria prevalendo s' insinuerà nel vaso.

25. Se si avrà un cannello comunicante $DHKT$, l' acqua in esso si fermerà in un tal punto K, dove la pressione dell' acqua in D sotto il diaframma $= z$ (23) unitamente alla pressione dell' acqua DI, o sia dell' altezza GK, sia eguale alla pressione dell' atmosfera sopra la superficie dell' acqua in K, la qual pressione in K è prossimamente $A + \frac{DB + GK}{900}$, che chiamerò L, onde sarà $z + GK = L$, e perciò $GK = L - z = L - \left(\frac{m^2p.(b+A) - n^2q.(c-H)}{m^2p + n^2q}\right)$ (20). Volendo considerare le A, H, L, cioè le pressioni dell' aria in AB, al foro n, ed in K (che differiscono di assai poco) come eguali fra di loro, avremo $GK = \frac{n^2cq - m^2bp}{m^2p + n^2q}$. Quindi se $n^2qc > m^2pb$ sarà GK positiva, e la superficie K sarà al di sotto della orizzontale DG; e quando $n^2cq = m^2bp$, la superficie K si troverà in G; e quando $n^2qc < m^2pb$, la GK sarà negativa, e ciò vorrà dire che la superficie dell' acqua nel cannello, che prima si trovava in K sotto l' orizzontale DG, ora si troverà in un punto K sopra la medesima orizzontale. Per esempio, si metta $p = q$, $n = 4m$, e $c = 4b$; sarà $CK = \frac{63b}{17} = 3\frac{12}{17}b$. Si metta invece $n = 2m$, e $c = \frac{1}{4}b$, e sarà $GK = o$. Si metta infine $n = 2m$, e $c = \frac{1}{4}b$; e sarà $GK = -\frac{2}{5}b = GK$.

26. Sarà però sempre $GK < FD$, cioè $\frac{n^2qc - m^2bp}{n^2q + m^2p} < c$. Infatti $-m^2pb < m^2pc$, ed aggiungendo n^2qc, sarà $n^2qc - m^2pb < m^2pc + n^2qc$, e perciò $\frac{n^2qc - m^2pb}{m^2p + n^2q} < c$.

27. Al n. 20 abbiamo, che la velocità per n è $\frac{m\sqrt{(pq.(b+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}$ essendo il vaso mantenuto sempre pieno fino in AB. Ora si cessi di aggiungere acqua nuova, e dopo un tempo t la superficie, ch'era in AB, siasi abbassata in LO, e nel susseguente tempicello dt sia passata in lo, e sia $DO = x$. Sarà $BO = b - x$, ed $Oo = -dx$. Per avere la velocità in n coll'acqua calata in LO basterà, che nella formola suddetta in luogo di $b (= BD)$ si sostituisca $x = DO$, e così la nuova velocità per n sarà $\frac{m\sqrt{(pq.(x+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}$ misura del viaggio, che scorrerebbe un corpo in 1″ colla nuova velocità per n. Codesto viaggio facendo $\frac{m^2pq}{m^2p+n^2q} = \mathfrak{Q}$, sarà $\sqrt{(\mathfrak{Q}.(x+c+A-H))}$. Dicendo $1'' = K$ se faremo $K : dt :: \sqrt{(\mathfrak{Q}.(c+x+A-H))}$ al quarto termine $\frac{dt\sqrt{(\mathfrak{Q}.(c+x+A-H))}}{K}$, questo sarà lo spazietto, che scorrerà nel tempo dt un velo d'acqua, che esca dal foro n. Ed il prodotto di questo spazietto nell'aja n del foro, cioè $ndt\sqrt{(\mathfrak{Q}.(x+c+A-H))}$, sarà il volume d'acqua uscita dal vaso nel tempo dt, nel quale rimane vota d'acqua una eguale capacità $Lo = -fdx$ dicendo f la sezione del vase. Dunque avremo l'equazione $-fdx = ndt\sqrt{(\mathfrak{Q}.(x+c+A-H))}$; ed integrando per modo, che quando $t = o$ sia $x = b = DB$, avremo

$$t = \frac{nfK\sqrt{(m^2p+n^2q)}\left((\sqrt{b+c+A-H}) - \sqrt{(x+c+A-H)}\right)}{mn\sqrt{(pq)}}.$$

Questo fa vedere, che se varierò i fori in maniera che il superiore m diventi l'inferiore, mentre l'inferiore n diventa il superiore, i tempi delle deplezioni saranno eguali.

28. Se $q = p$, ed $H = A$, sarà $t = \frac{nfK\sqrt{(m^2+n^2)}}{mn\sqrt{p}}\left(\sqrt{(b+c)} - \sqrt{(x+c)}\right)$.

29. Queſt'ultima formola è ſtata da me trovata conforme alle molte ſperienze da me fatte col vaſo cilindrico *AD* (*f.* 5) del diametro di lin. 89 alto lin. 102, cui era anneſſo un tubo *FG* lungo lin. $436\frac{1}{2}$, e del diametro di lin. $17\frac{1}{7}$. Nel fondo *CD*, ch'è di latta, vi è un foro *E*, ed altri tre ſtanno in *F* tutti del diametro di lin. $3\frac{1}{7}$. Anche nell'eſtremo *G* chiuſo con laſtra di latta ſtanno tre altri fori del diametro dei primi. *IKL* è un galleggiante fatto con una tavoletta ſottile *IK*, cui è anneſſo normalmente un regoletto *KL* ſegnato da *K* in *L* in pollici, e linee. Empito il vaſo *AC* di acqua ſino all'orlo, come pur anche tutto il tubo *FG* io applicava in *AB* il galleggiante, il cui regoletto *KL* avanzava tutto al diſopra del vaſo ſtando verticale. Aperto o il ſolo foro in *E*, o uno, o più fori in *F* con uno, o più fori in *G*, la ſuperficie in *AB* ſi deprimeva inſieme col galleggiante, ed il regoletto, che rimaneva ſempre vicino alla ſponda, mi dinotava i decreſcimenti, il tempo de' quali veniva miſurato colle oſcillazioni di un pendolo di un orologio, delle quali 84 ſi compivano in un minuto primo. Tuttochè il tubo *FG* foſſe di un'ampiezza tenue, le ſperienze mi ſono riſultate ſempre conformi alla formola.

30. Paſſerò a parlare di ciò, che dee accadere qualora la parte *CEFD* (*f.* 4, e 6.) inferiore del vaſo contenga in parte dell'aria. Eſſendo tutto il vaſo *AEFB* voto di acqua, ed il foro *m* aperto, ed il foro *n* chiuſo, ſi verſi acqua in *AD*, e ſi mantenga alta fino all'orlo *AB*. Dopo un qualche tempo l'acqua caduta da *m* abbia acquiſtato ſopra il fondo *EF* l'altezza *FO*. L'aria, che prima occupava tutto lo ſpazio priſmatico *CF* compreſſa come l'aria eſterna perchè con eſſa equilibrata, ora ridotta ad un volume minore, e perciò più compreſſa, avrà una forza eſpanſiva maggiore, e perciò farà tutt'all'intorno, ed anche al foro *m* all'insù una preſſione maggiore di prima, cioè maggiore di una preſſione di un'acqua dell'altezza *A* di 32 piedi; e queſta preſſione ſarà maggiore di prima (giuſta le ſperienze fatte) in ragione inverſa del volume, coſicchè facendo $DO : DF :: A$ al quarto termine $\frac{A.DF}{DO}$, ſarà queſta la preſſione dell'aria *CF* ridotta al volume *CO* contro il foro *m*; mentre che la preſſione

dell'acqua

dell'acqua in m all'ingiù è quella di un'acqua dell'altezza $DB+A$. Quindi qualora crescendo l'altezza FO la pressione in m dell'aria interna all'insù divenga eguale alla pressione dell'acqua superiore all'ingiù, cioè qualora divenga $\frac{A.DF}{DO}$ $=DB+A$, cesserà la discesa dell'acqua per m, il che perciò accaderà quando $DO=\frac{A.DF}{DB+A}=\frac{Ac}{b+A}$ (dicendo $DB=b$, $DF=c$); onde in tal caso $FO\,(=DF-DO)=c-\frac{Ac}{b+A}=\frac{bc}{b+A}$. Posto per esempio $b=1$ piede, $c=$pi. $2\frac{1}{4}$ essendo $A=$pi. 32, sarà $FO=\frac{1}{15}$ di piede.

31. Per potere allora empire di acqua anche la parte CO del vaso si faccia un foro r nella sponda del vaso appena sotto il diaframma. Allora l'aria interna resa comunicante, e perciò equilibrata colla esterna non farà in m all'insù, che la pressione A, la quale cederà alla pressione contraria $DB+A$ dell'acqua superiore, e dell'atmosfera all'ingiù; e così l'acqua per m potrà discendere. Empita per tal modo la parte inferiore del vaso fino per esempio in GH si chiuda il foro r, ch'era stato aperto, e si apra il foro n. Poichè l'aria CH in quel momento è compressa come l'aria esterna (colla quale comunicava) non premerà tutt'all'intorno, cioè e contro il foro m, e sopra la superficie GH, che colla pressione A (qui metterò eguale la pressione dell'aria esterna da AB fino in n) onde la pressione libera al foro m sarà $DB+A-A=DB$; e la pressione residua, e libera dell'acqua al foro n sarà $A+HF-A=HF$; e dicendo p il parametro del foro n, l'acqua per m in 1'' sarà $m\sqrt{(p.DB)}$, e l'acqua per n sarà $n\sqrt{(q.HF)}$.

32. Se, mantenendo la parte AD sempre piena di acqua fino all'orlo, l'acqua per m in questo caso sarà eguale all'acqua per n, cioè se sarà $m\sqrt{(p.DB)}=n\sqrt{(q.HF)}$, la superficie dell'acqua sotto il diaframma si manterrà in GH.

33. Che se sarà l'acqua per n maggiore che l'acqua per m, ossia se sarà $m^2p.DB<n^2q.HF$, la superficie GH si deprimerà. Questa sia calata fino in LM. L'aria stessa, che prima occupava lo spazio CH, ora ne occupa un maggiore

CM in ragione della DH alla DM, ed in conſeguenza tanto minore ſarà la ſua forza eſpanſiva, oſſia la ſua preſſione al foro m, e ſulla ſuperficie dell' acqua abbaſſata in LM. Quindi ſe ſi farà $DM:DH::A$ al quarto termine $\frac{A.DH}{DM}$, queſto ſarà la preſſione dell' aria CM contro m, e ſopra LM; e perciò la preſſione reſidua dell' acqua ſopra il foro m ſarà $DB+A-\frac{A.DH}{DM}$; e la preſſione reſidua in n ſarà $\frac{A.DH}{DM}+MF-A$; e la ſuperficie LM ceſſerà di abbaſſarſi quando l' acqua per m ſarà eguale all' acqua per n, cioè quando ſarà

$$m\sqrt{\left(p.\left(DB+A-\frac{A.DH}{DM}\right)\right)}=n\sqrt{\left(q.\left(\frac{A.DH}{DM}+MF-A.\right)\right)}$$

34. Perciò ſe oltre le denominazioni fatte ſi dica $FH=i$, $FM=x$, ſarà $DH=c-xi$, $Dm=c-x$; e ſoſtituendo ſi avrà

$$m\sqrt{\left(p.\left(b+A-\frac{A.c-i}{c-x}\right)\right)}=n\sqrt{\left(q.\left(\frac{A.(c-i)}{c-x}+x-A\right)\right)},$$ d' onde viene $x^2-x.\left(A+c+\frac{m^2p.(A+b)}{n^2q}\right)=-Ai-\frac{m^2p.(bc+Ai)}{n^2q}=x^2-2fx=-g^2$, cioè $x=f\pm\sqrt{(f^2-g^2)}=FM$ altezza, che in appreſſo ſarà permanente; e ſoſtituito queſto valore della x in uno dei membri della equazione, ſi avrà la quantità di acqua per m, o per n in 1''.

35. Ma ſe nel caſo del n. 31 l' acqua per n ſarà minore dell' acqua per m, o ſia ſe $m^2p.DB>n^2q.HF$ (33), allora l' acqua GF dovrà creſcere in altezza. Sia arrivata fino in IK. L' aria CH ſarà ridotta allo ſpazio minore CK, e perciò facendo $DK:DH::A$ al quarto termine $\frac{A.DH}{DK}$, queſto ſarà la preſſione dell' aria CK al foro m, e ſulla ſuperficie IK, onde la preſſione reſidua, e libera in m ſarà $DB+A-\frac{A.DH}{DK}$; e la preſſione reſidua in n ſarà $\frac{A.DH}{DK}+KF-A$. Quindi

l'acqua per m sarà $m\sqrt{(p.(DB + A - \frac{A.DH}{DK}))}$, e l'acqua per n sarà $n\sqrt{(q.(\frac{A.DH}{DK} + KF - A)}$, cioè (posto $FK = x$) $m\sqrt{(p.(b + A - \frac{A.(c-i)}{c-x}))} = n\sqrt{(q.(\frac{A.(c-i)}{c-x} + x - A))}$, equazione del n. 34, che somministra pure $x = f \pm \sqrt{(f^2 - g^2)} = FK$.

36. Quindi perchè $FK > FM$ dovrà essere $x = f - \sqrt{(f^2 - g^2)} = FM$; ed $x = f + \sqrt{(f^2 - g^2)} = FK$.

37. Fin qui ho parlato di vasi con un diaframma. Ora vengo ai vasi con due diaframmi. Sia pertanto il vaso $AGHB$ (*f.* 7) con due diaframmi CD, EF, ed i fori m, n, e. Chiuso il foro e si empia tutto il vaso di acqua. Indi aperto il foro e mentre l'acqua esce dal vaso se ne aggiunga tanta in AB, onde la superficie superiore si conservi sempre in AB. Sia $DB = b$, $DF = c$, $FH = d$. Le aje dei fori si dicano rispettivamente m, n, e. Il parametro competente al foro m sia p; quello del foro n sia q; e quello del foro e sia r. La pressione dell'aria in AB sia A; e l'altra in e sia $H = A + \frac{BH}{900}$ (10).

38. Suppongo subito, che non vi sia voto veruno, e che anzi al foro m l'acqua superiore incalzi l'inferiore con una pressione z; e che al foro n l'acqua superiore incalzi pure l'inferiore con una pressione t. L'acqua per m sarà $m\sqrt{(p.(DB + A - z))} = m\sqrt{(p.(b + A - z))}$. E l'acqua per n sarà $n\sqrt{(q.(FD + z - t))} = n\sqrt{(q.(c + z - t))}$. E l'acqua per e sarà $e\sqrt{(r.(HF + t - H))} = e\sqrt{(r.(d + t - H))}$. Queste tre quantità d'acqua nello stato di permanenza devono esser eguali. Dunque $m\sqrt{(p.(b + A - z))} = n\sqrt{(q.(c + z - A))} = e\sqrt{(r.(d + t - H))}$, d'onde si ricava $z = \frac{(m^2n^2pq + e^2m^2pr).(b + A) - e^2n^2qr.(c + d - H)}{e^2m^2pr + e^2n^2qr + m^2n^2pq}$,

$$t = \frac{m^2n^2pq.(b + c + A) - e^2r.(m^2p + n^2q).(d - H)}{e^2m^2pr + e^2n^2qr + m^2n^2pq}.$$

39. Se sarà z quantità positiva sostituendo il suo valore nella formola $m\sqrt{(p.b + A - z)}$ si troverà questa

$\frac{emn\sqrt{(pqr.(b+c+d+A-H))}=emn\sqrt{(pqr.(BH+A-H))}}{\sqrt{(e^2m^2pr+e^2n^2qr+m^2n^2pq)}}$ che è la quantità d'acqua, che uſcirà per m in 1″, ed in conſeguenza anche per n, e per e contemporaneamente; e queſta formola diviſa per l'aja del foro m, cioè diviſa per m darà la velocità pel foro m; e diviſa per n darà la velocità pel foro n; e diviſa per e darà la velocità pel foro e.

40. Creſcendo la $c(=DF)$, o la $d(=FH)$, o tutte e due, a ſegno che ſi abbia $z=o$, ciò vorrà dire, che l'acqua ſopra m non incalza più la inferiore, e che la preſſione $b+A$ è tutta libera per accelerare l'acqua al foro m; e l'acqua ſcorrente per m (ed in conſeguenza anche per gli altri fori n, e) a ogni 1″ ſarà $m\sqrt{(p.(b+A))}$.

41. Creſcendo anche più la quantità $c+d$ il trovato valore della z ſarà negativo, il che indicherà inoltre, che ſotto m ſi avrà un voto, e tuttavia per ogni foro ſcorrerà la ſteſſa quantità di acqua $m\sqrt{(p.(b+A))}$ in ogni 1″.

42. Così ſe ſi troverà il valore della $t=o$, ſapremo che al foro n non eſiſte il ſuppoſto incalzamento dell'acqua ſuperiore ſulla inferiore; e ſe anzi ſarà t negativa, ſapremo di più che ſotto n ſi avrà un voto.

43. Se eſſendo il valore ſuccennato t o zero, o negativo ſarà quello della z o zero, o negativo, la quantità dell' acqua per ciaſchedun foro ſarà ſempre l'anzidetta $m\sqrt{(p.(b+A))}$, la quale diviſa per m, o per n, o per e darà la velocità o pel foro m, o pel foro n, o pel foro e.

44. Ma ſe ſarà $t=o$, oppure t negativa, ma inſieme z poſitiva, avremo in m la preſſione libera $DB+A-z=b+A-z$, ed in n la preſſione libera $FD+z=c+z$, e l'acqua per m in ogni 1″ ſarà $m\sqrt{(p.(b+A-z))}$, e l'acqua per n ſarà $n\sqrt{(q.(c+z))}$, e nello ſtato di permanenza ſarà $m\sqrt{(p.(b+A-z))}$ $=n\sqrt{(q.(c+z))}$; e così ſi avrà il valore della z non più dipendentemente dalle quantità d, e, r, H, come prima (38), e ſarà $z=\frac{m^2p.(A+b)-n^2qc}{m^2p+n^2q}$; e la quantita d'acqua pei due fori m, n (ed in conſeguenza anche pel foro e) ſarà $\frac{mn\sqrt{(pq.(b+c+A))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}}$, la quale diviſa per uno dei tre fori dà la velocità per quel tal foro.

45. Dalle cose dette fin qui si può vedere, che pel caso di tre diaframmi *CD* (*f*. 8), *EF*, *GH* coi fori f, g, h, i, ai quali competano i parametri p, q, r, s, essendo $DB = b$, $DF = c$, $FH = d$, $HK = e$, nel caso di niun voto dicendo z, t, u gl' incalzamenti ai fori f, g, h, avrà luogo l' equazione $f\sqrt{(p.(b+A-z))} = g\sqrt{(q.(c+z-t))} = h\sqrt{(r.(d+t-u))} = i\sqrt{(s.(e+u-H))}$, dalla quale stando sulle tracce esposte si potranno ricavare e la quantità d' acqua per ogni foro in 1'' nello stato di permanenza, e le velocità per ciaschedun foro non tanto nel supposto caso di niun voto, che in qualunque combinazione di uno o più voti.

46. E lo stesso io dirò del caso di quanti diaframmi venissero proposti.

47. Passerò ai vasi, che hanno un tubo annesso a un foro fattovi nel fondo. I primi cinque vasi espressi colla fig. 9. sieno mantenuti sempre pieni di acqua fino all' orlo. Le altezze A, B, C, D, E sieno tutte $= b$. I fori F, G, H, I, K, L sieno eguali fra di loro. Le altezze eguali *GL*, *HM*, *IN*, *KO* si dicano ognuna $= c$. Ai fori F, G, L, I, N competa lo stesso parametro p. Il tubo *HM* sia cilindrico. Del foro I sia maggiore il foro N, ed a questo sia eguale la bocca inferiore O del tubo divergente *KO*.

48. Se *GL* ($= c$) sarà maggiore di $A (= b)$, la velocità per G sarà maggiore della velocità per F. La velocità per H è maggiore anche della velocità per G. La velocità per I è maggiore della velocità per G, e può esser anche maggiore della velocità per H secondo che N è più, o meno grande di I. E la velocità per K è maggiore della velocità per I. Così mostra la sperienza. D' onde nasce tanta varietà di velocità pei fori F, G, H, I, K, che sono tutti eguali, e con altezze eguali d' acqua sopra ognuno d' essi?

49. Giusta il *n.* 2 la velocità per F è $\sqrt{(p.b)}$. E giusta il *n.* 20 la velocità per G è $\frac{n\sqrt{(pq.(b+c+A-H))}}{\sqrt{(m^2p+n^2q)}} =$ (per essere qui $q = p$, $n = m$, ed $A - H$ quantità trascurabile) $\frac{\sqrt{(p.(b+c))}}{2}$. E tutte le volte, che sia $c > b$, come qui si suppone, si trova $\sqrt{(p.\frac{(b+c)}{2})} > \sqrt{(p.b)}$. Ecco adunque una ra-

gione, onde la velocità per G è maggiore della velocità per F.

50. La velocità per H dev' esser maggiore che per G perchè l' acqua uscita da G si dilata per riunirsi in L, e per sofferire in L il ritardo dei filamenti contrarj iL, oL, che dee rendersi sensibile anche in G. Ma l' acqua uscita da H arriva unita fino in M, dove non soffre il conflitto dei filamenti contrarj. Dunque si vede ancora, che per H l' acqua sarà più libera, e più veloce, che per G.

51. Nel caso dei fori I, N la formola del $n.$ 20 applicata al caso del foro I dà (fatta $q = p$, e trascurando $A-H$) $\frac{n\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, velocità per I. Ed abbiamo la velocità per $G = \sqrt{\left(p.\frac{(b+c)}{2}\right)}$. E essendo $n > m$ per essere $N > I$, si trova $\frac{n\sqrt{(p.(b+c))}}{\sqrt{(m^2+n^2)}} > \sqrt{\left(p.\frac{(b+c)}{2}\right)}$. Dunque egli è pure manifesta una ragione, onde l' acqua per I sia più veloce, che per G.

52. Anche in O manca quel contrasto dei filamenti, che si ha in N, con che si vede ancora, che la velocità per K dev' esser maggiore, che per I.

53. Il *Mariotte* nel Discorso secondo della parte terza del moto delle acque disse, che la velocità in H essendovi il cannello è media proporzionale tra la velocità in H senza il cannello, e la velocità, che si avrebbe al foro Q eguale alla bocca M fatto nel fondo del vaso PQ alto come il vaso CM.

54. Lo *s' Gravesand* (lib. 3. cap. 9) vedendo, che per H la velocità è maggiore col cannello, che senza, non pensando punto alla pressione dell' aria, ricorse alla coesione dell' acqua del cannello in H coll' acqua del vaso: e disse di aver trovato colla sperienza, che la velocità per M (ed in conseguenza anche per H) è quasi la stessa, che per Q, essendo i vasi mantenuti sempre pieni. Quindi converrebbe dire, che la colonna acquea MH colla sua coesione tira a sè l' acqua del vaso C con una forza proporzionale al suo peso, cosicchè la pressione dell' acqua del vaso dell' altezza C, e la coesione dell' acqua in H eguale al peso della colon-

na *HM* unite insieme in *H* equivagliano alla pressione di un' acqua dell' altezza $MH+C$, ed eccitino in *H* una velocità eguale alla velocità prodotta in *Q* dall' acqua dell' altezza *PQ* eguale all' altezza $MH+C$.

55. Anche *Daniello Bernoulli* pensa a tutt' altro, che al peso dell' atmosfera. La sua teoria (§ 23, 24 della Sez. 3 dell' Idrodinamica) importa, che la velocità per *M* eguagli la velocità per *Q* come ammette *s' Gravesand*, e che la velocità per *Q* sia quella di un grave caduto dall' altezza *PQ*. Sarebbe per ventura scusabile se avesse riposato in questo sulla sperienza asserita dallo *s' Gravesand*, ch' era conforme alla sua teoria. Ma avendola egli ripetuta trovò, che la velocità per *H* non era altrimenti eguale alla velocità per *Q*, ma *quasi media* (pag. 56.) fra la velocità per *F*, e la velocità per *Q* (53): e qui senz' altro ne attribuisce il divario agl' impedimenti. Viene egli pure ad adottare la coesione dell' acqua. Infatti considerando un tubo inclinato, irregolare *AfGD* annesso a una vasca *NQ* (*f*. 10) mantenuta sempre piena di acqua mentre questa scorrendo pel tubo va ad uscire pel foro *H*, cerca la pressione dell' acqua contro le pareti del tubo in un qualunque sito *F*. Stando alla sua teoria, la velocità per *H* è quella dell' altezza *SD*, o sia quella di un grave caduto per *SD*. E supponendo il tubo troncato in *FG* la velocità per *FG* sarebbe quella dell' altezza $RF=a$. E l' altezza della velocità attuale per la sezione *FG* del tubo non troncato sia *b*. Il *Bernoulli* vuole, che la ricercata pressione dell' acqua in *FG* sia quella di un' acqua stagnante dell' altezza $a-b$ (§ 10. Sez. XII).

56 Volendo applicare questa formola a un' altra sezione *fg*, sarà *a* l' altezza della velocità per *fg* supposto il tubo troncato in *fg*, cioè sarà $a=Cg$; e sarà *b* l' altezza della velocità attuale per la sezione *fg* del tubo non troncato; e la pressione ricercata in *fg* sarà qui pure $a-b$. Ma si può dare, che sia $b>a$, come se la sezione *fg* fosse eguale al foro *H*; perchè in questo caso la velocità attuale per *fg* eguaglia la velocità per *H*. Ma questa è maggiore della velocità supposta in *fg* col tubo troncato in *fg*. Dunque anche la attuale in *fg* è maggiore della supposta in *fg*; e perciò $b>a$. A maggior ragione si trova $b>a$ quando la se-

zione *fg* fosse minore del foro *H*. Pertanto nei casi di $b > a$ la formola $a - b$ è negativa *atque sic* (dice il *Bernoulli* §. 11 Lez. XII.) *pressio in suctionem mutatur*, *idest latera canalis introrsum premuntur*. E se a un foro in *f* starà appeso un cannello *fr* pieno d'acqua fino al punto *t* a livello del foro *H*, l'acqua *ft* non discenderà impedita (dice l'Autore) *ab attractione aquæ præterfluentis*: ed ecco un'*attrazione* dell'acqua in *f* analoga alla *coesione* dello *s' Gravesand* dell'acqua in *H* (*f*. 9) (54).

57 Questo al certo è un attribuir una forza eccessivamente troppa alla *coesione*, all'*attrazione* dell'acqua. Si tuffi un dito nell'acqua, e poi si ritiri fuori tenendolo rivolto in giù, e si vedrà che al suo estremo si forma una goccia, che cresce; e quando questa arriva ad esser lunga tre linee circa, si stacca. Dunque al più si potrà accordare all'acqua una coesione, od un'attrazione eguale al peso di un'acqua alta tre linee; ma non mai a quello di un'acqua dell'altezza *HM* (*f*. 9), o dell'altezza *ft* (*f*. 10), che può essere di piedi.

58 Quindi è, che quantunque le formole Bernoulliane intorno ai diaframmi, e nel caso di $n\surd(q.(DF - H)) < m\surd(p.(DB + A))$ (19) s'accostino talvolta al vero (cioè quando i parametri sieno uguali, ed in oltre sia $A - H$ quantità trascurabile), altre volte però se ne discostano notabilmente, appunto quando non si può trascurare la quantità $A - H$, come si è veduto al n. 21, perchè i principj, d'onde esse formole discendono, non sono i giusti (57).

59 Di molto ancora recedono dal vero le formole Bernoulliane trattandosi dei tubi divergenti contemplati qui sopra. Se al vaso *DN* (fig. 9) si adatterà un cannello comunicante *YXoZ*, l'acqua in questo si fermerà in un punto *Z*, dove la pressione dell'atmosfera uguaglia le due pressioni contrarie, una della colonna *XY*, e l'altra, ch'è la pressione laterale dell'acqua in *Y*; e si è mostrato al n. 26 che questo punto *Z* sarà sempre più alto del foro *N*. Ma adattando un simile cannello al vaso *E*, che porti il tubo divergente *KO*, l'acqua in questo cannello si ferma in un punto *T* più basso della bocca *O*. Una ragione di questo è, che l'acqua per *K* è più libera, che per *I*, perchè in *I*

sente

ſente la remora, che naſce dal conflitto dei filamenti in N, e per queſto la preſſione laterale dell' acqua ſotto K è minore, che ſotto I, cioè in Y. Quindi per far equilibrio coll' atmosfera premente in T vi vuole una colonna d'acqua KV maggiore della colonna YX, acciocchè colla preſſione laterale ſotto K minore, che ſotto I, faccia equilibrio colla preſſione dell' atmosfera in T, che ſi può dire eguale alla preſſione dell' atmosfera in Z.

60 Di quanto T nei caſi diverſi ſtia più baſſo di O finora non ſaprei determinarlo, che con una ſerie di ſperimenti. Ne ho fatto alcuni pochi, e qui ne dirò uno.

61 Era $aK =$ lin. 102; $Kx =$ lin. 15; $xO =$ lin. 663; il diametro in $K =$ lin. 5, ed il diametro in O di lin. $10\frac{1}{2}$. la porzione TR del cannello era di vetro. Chiuſa la bocca O, ed empito tutto di acqua fu riaperta la bocca O; e quando l' acqua del vaſo ſi fu abbaſſata tre pollici, e fu arrivata in c, l' acqua nel cannello ebbe la ſuperficie in T lin. 1079 più baſſa del punto x, cioè p. 7. 5. 11.

62 Chiuſo il cannello xeR, ed empito di nuovo il tubo divergente, ed il vaſo, e riaperta la bocca O, l' acqua ſi è abbaſſata tre pollici, cioè da a in c, in 12 oſcillazioni di un orologio, delle quali 144 fanno un minuto primo; ed in altre quattro oſcillazioni ſi è abbaſſata un altro pollice; con che ſi trova, che l'acqua del vaſo mentre arrivò in c avea proſſimamente una velocità da ſcorrere $\frac{3}{5}$ di pollice per ogni 1″. E perchè il diametro del vaſo è di lin. 89 eſſendo il diametro in x di lin. 5, la velocità per x rieſce di poll. 190 per ogni 1″; alla qual velocità compete l' altezza $\frac{(190)^2}{724}$ (eſſendo poll. 724 il noto parametro pei gravi cadenti) $=$ poll. 50, poco meno.

63 E perchè la ſezione in x alla ſezione in O : : 5 : $(10\frac{1}{2})^2$: : 100 : 441, la velocità per O era di ſcorrere poll. 43 per ogni 1″.

64 Troncato in x il tubo xO, la velocità dell' acqua abbaſſataſi da a in c era di ſcorrere poll. $\frac{16}{115}$ per ogni 1″, ed in conſeguenza la velocità in x col tubo troncato fu di ſcorrere poll. 44 per ogni 1″.

65 Vediamo quanto queſto corriſponda alla teoria, ed ai precetti del *Bernoulli*. La ſua teoria importa, che la velocità per O, e l' altra per x del tubo troncato in x foſſero quelle di un grave caduto dalle altezze cO, e cx: poichè $cO =$ lin. 744 $=$ pol. 62; e $cx =$ lin. 81 $=$ pol. 6. 9, le velocità delle due cadute ſaranno $\sqrt{(724.62)}, \sqrt{(724.6\frac{1}{4})}$, cioè pol. 211, e poll. 69 ben diverſe dalle oſſervate, che furono di pol. 43, e di pol. 44 ed è oſſervabile, che queſte velocità avuteſi ſi ſcoſtano ancora dalla ragion ſuddupplicata delle altezze, e che ſe ne diſcoſtano così, che all' altezza maggiore corriſponde una velocità minore.

66 L' Autore al §. 12 della ſez. XII. dà la formola $\frac{mm}{nn} a - c$ per l' altezza di x ſopra la ſuperficie dell' acqua in T, eſſendo $a = cO$, $c = cx$; m la ſezione O, ed n la ſezione x. Dal n. 61 ſi ricava $a =$ pol. 62, $c =$ pol. 6. 9, ed $m : n :: 441 : 100$. Quindi ſoſtituendo riſulta T più baſſo di x piedi 100 meno un pollice; dovechè nella ſperienza T fu più baſſo di x ſoli pi. 7. 5. 11: divario eſorbitante.

67 S' era accorto il *Bernoulli*, che la ſua teoria ſi ſcoſtava troppo dal fatto; ma non per queſto ſoſpettò della teoria, e ſoltanto incolpò gl' impedimenti, che ritardano la velocità per O; e per la pratica diſſe, che in luogo di $\frac{mm}{nn} a$ della formola baſtava mettere l' altezza della velocità attuale in x da trovarſi colla ſperienza.

68 Queſt' altezza dedotta dalla velocità attuale è di pol. 50 (62). Dunque dovrebbe eſſere $xT =$ pol. $50 - c =$ pol. 43. 3 (65) $=$ pi. 3. 7. 3., dovechè nella ſperienza ebbi pi. 7. 5. 11; ed è ben rimarcabile, che coi pi. 3. 7. 3 la ſuperficie T dell' acqua nel cannello ſi ſarebbe trovata più alta della bocca O contro ogni ſperienza di queſto genere fatta con tubo divergente.

69 Non recheranno meraviglia le eſpoſte diſcrepanze ſe ſi conſideri che l' Autore ha dimenticata affatto quell' azione dell' aria, che in queſto genere di ſperienze ha una gran parte. Nel voto il riſultato ſarebbe ſtato affatto diverſo.

70 Ecco com' io spiego il mio sperimento. Ammetto col *Bernoulli*, e col Sig. Ab. *Bossut* (Hydr. §. 689), che la pressione laterale dell' acqua alle pareti in *Kx* sia la pressione atta a produrre in *K* quella velocità libera, che si avrebbe senza impedimenti da *K* in giù meno la pressione atta a produrre la velocità attuale per *Cx* ritardata dagl' impedimenti inferiori.

71 Se il tubo *KO* troncato in *x* come al n. 64, l' avessi fatto sboccare colla bocca *x* nel voto, allora la velocità per *x* sarebbe stata affatto libera, e sarebbe stata prodotta in *K* da tutta la pressione dell' acqua *Kc* unita alla pressione *A* in *c* dell' aria. Onde la prima delle due pressioni del n°. precedente sarà $A + cK$.

72 Per avere l' altra pressione convien trovare il parametro conveniente al foro *K* armato del tubo *Kx* (6). Poichè troncato il tubo in *x* ebbi per *x* la velocità di pol. 45, 9 (64), dividendone il quadrato per l' altezza *Kc* dell' acqua sopra il foro, ch' era di pol. 5 $\frac{1}{2}$, il quoziente 383 sarà il parametro ricercato.

73 E perchè col tubo *KO* intiero ebbi per *x* la velocità di pollici 198 (62), dividendone il quadrato pel parametro si avrà per quoziente pol. 102. 4 = pi. 8. 6. 4 altezza premente di acqua atta a produrre in *K*, e perciò anche per *x* la velocità avuta per *x* col tubo *KO* non troncato.

74 Dunque la pressione laterale dell' acqua in *x* col tubo *KO* intiero sarà quella di un' acqua stagnante dell' altezza $A + cK -$ pi. 8. 6. 4. (70, 71, 72). Questa pressione laterale dell' acqua in *x* unita alla pressione dell' acqua dell' altezza *xT* dev' esser eguale alla pressione *A* dell' aria in *T*. Dunque l' altezza $xT =$ pi. 8. 6. 4 $- cK =$ pi. 8. 6. 4 $-$ pi. 0. 5. 6 (61) $=$ pi. 8. 0. 10; ch' è maggiore dei pi. 7. 5. 11 avuti nella sperienza di soli pol. 6. 11. La cosa meriterebbe d' esser confermata con altri sperimenti.

75 Intanto essendosi trovato qui sopra, che l' acqua in *x* preme le pareti con una pressione $A + cK -$ pi. 8. 6. 4 $=$ pi. 32 $+$ pi. 0. 5. 6 $-$ pi. 8. 6. 4 $=$ pi. 23. 11. 2; e tolto il cannello *xeR* l' aria si presenterebbe tosto al foro *x* con la pressione $A =$ pi. 32, prevalendo questa a quella dell' acqua l' aria entrerà pel foro *x*, e mescolata coll'

acqua verrà da queſta rapita al baſſo, ed in un con eſſa uſcirà per la bocca *O*.

76 Si conoſce quindi in che conſiſta l' artificio, ond' eccitano con gran profitto in alcune Ferriere un ſoffio violento, ed equabile per mantenere acceſa la fornace per fondere la vena del ferro. Per un condotto *AB* (fig. 11) va l' acqua in una vaſca *LNOM*, d' onde ſcende per più canali *CE* di tavole, divergenti, ed all' incontro dei ſottopoſti piani *F* ſpiccia tutt' all' intorno, empie la camera *GK* fino in *IP*, ed eſce per un emiſſario *KR*. Pei fori *u*, *u*, *u* fatti in un lato d' ogni canale (detto perciò flauto) entra l' aria per la ragione ſpiegata, e traſcinata dall' acqua che diſcende, eſce per le bocche *E*, ed all' urto coi piani *F* ſi ſepara dall' acqua: e trovandoſi in una camera *GQKH* tutta ben chiuſa a riſerva di due fori *K*, *T*, nè potendo uſcire pel foro *K* ſempre occupato dall' acqua, eſce per l' altro *T*, e pel tubo *TV* va a ſoffiare con violenza, ed equabilmente nella fornace.

Fig. 3.

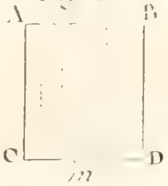


Fig. 4.

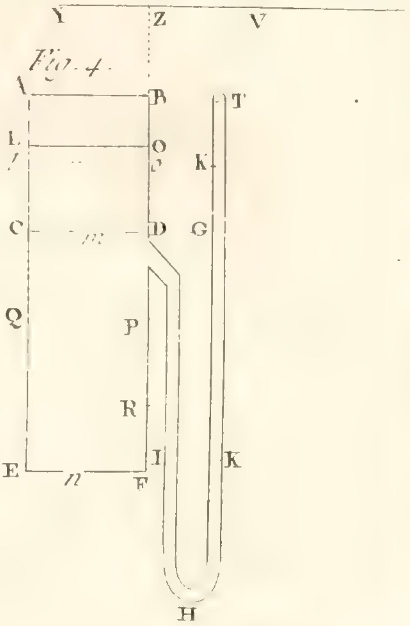


Fig. 7.

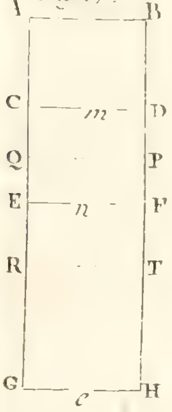


Fig. 9.

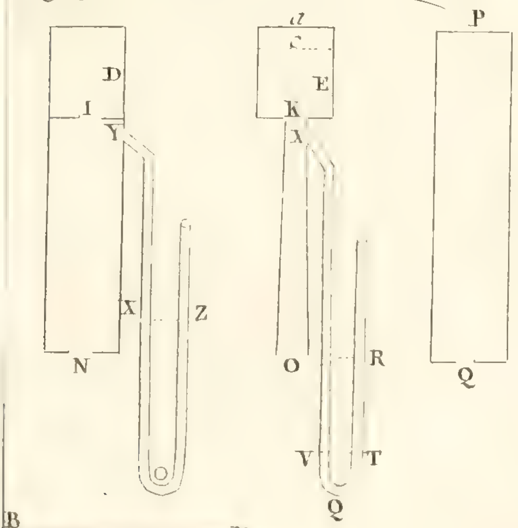
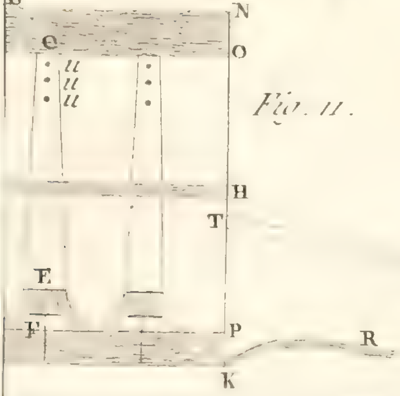


Fig. 11.



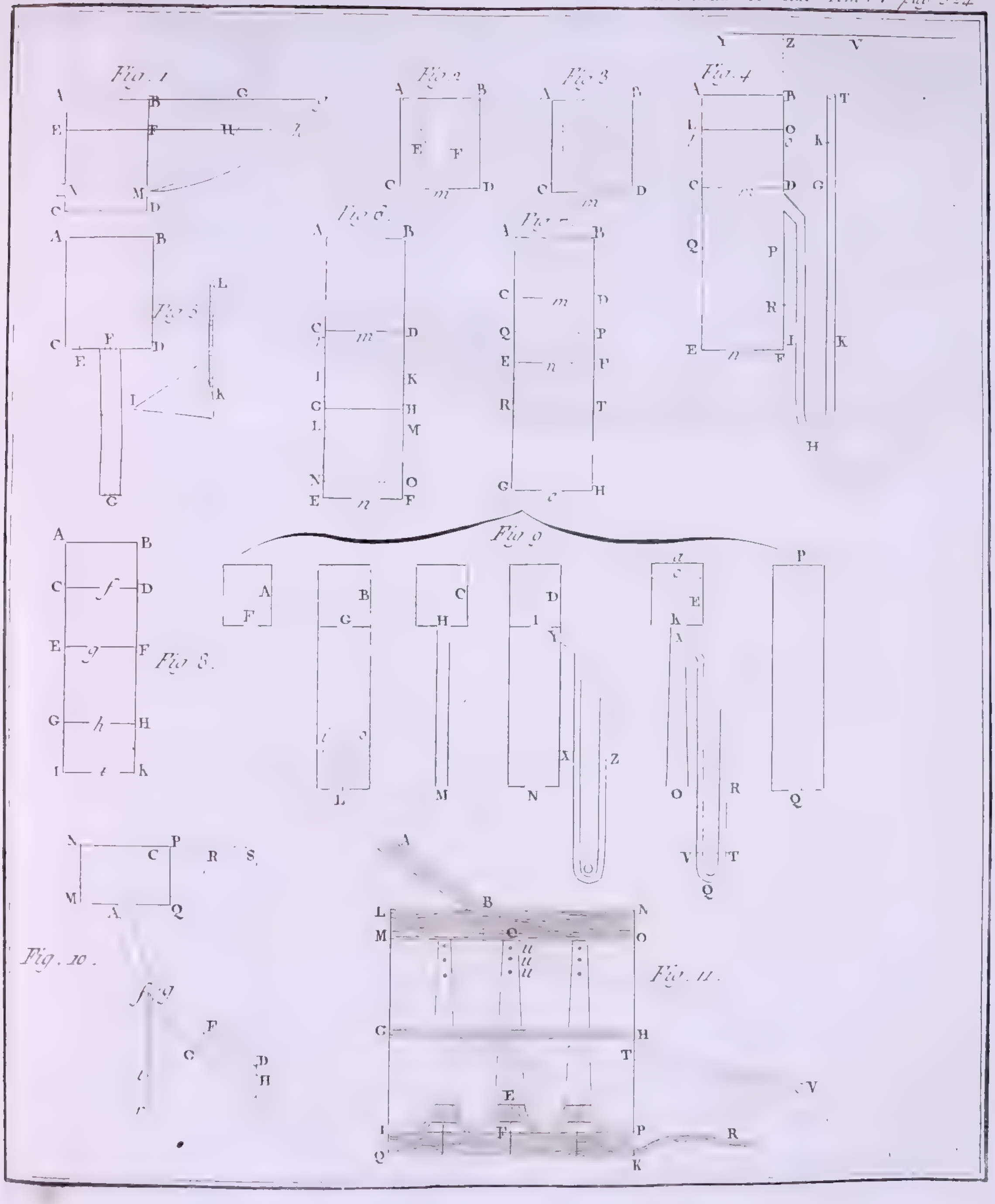


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11

OSSERVAZIONI

SOPRA VARJ EFFETTI DELLA PRESSIONE DE' FLUIDI.

Del Sig. Simone Stratico.

1 B*Oyle* diede il nome di paradoſſi idroſtatici alle leggi fondamentali dell'equilibrio e preſſione de' fluidi, perchè rieſcono eſſe affatto fuori dell'eſpettazione e del prevedimento che ſe ne ha, volendo dipendere dal ragionamento, e non dall'eſperienza. E non pertanto è certiſſimo, che quelle leggi non ſono diverſe dalle leggi ſtatiche de' corpi ſolidi, delle quali non altro eſſer poſſono, ſe non che una modificazione.

2 La gravità opera ne' fluidi, come ne' ſolidi, ma a prima giunta, e forſe anche dopo qualche meditazione non ſi comprende bene come una maſſa di diaccio che riempie un vaſo cubico di fondo orizzontale, prema ſoltanto il fondo con tutto il ſuo peſo, e non eſerciti veruna preſſione nelle pareti verticali dello ſteſſo vaſo: e queſta medeſima maſſa ridotta fluida prema la baſe del vaſo appunto, come da prima con tutto il ſuo peſo, ed inſieme prema le pareti dello ſteſſo vaſo, e la preſſione che eſercita in ciaſcheduna parete ſia la metà di quella ch'eſercita ſulla baſe; per modo che la ſteſſa mole d'acqua, la quale nello ſtato di ſolidità preme come uno, nello ſtato di liquidezza prema effettivamente nel fondo e pareti del vaſo come tre, peſando in amendue queſti ſtati come uno. E ſe la medeſima mole d'acqua liquida ſi contenga in un vaſo parallelepipedo, la di cui baſe ſia doppia, o la metà di quella del vaſo cubico poc'anzi conſiderato, la preſſione nella baſe orizzontale ſarà ſempre come il peſo di tutta la mole d'acqua, e la preſſione nelle pareti

ſarà come due volte e mezza, o come ſei volte il peſo della ſteſſa mole.

3 La forza di gravità, che ſollecita le pareti de' fluidi ad allontanarſi dalla maſſa e ſcorrere verſo i lati, ſe non ſiano ſoſtenute, non può operare altrimenti, ſe non che facendole diſcendere per piani inclinati, e la preſſione che eſercitano allorchè ſono quiete deve ridurſi alla legge di preſſione de' corpi ſolidi poſti in equilibrio ſopra piani inclinati. Suppongaſi il corpo *C* ſul piano inclinato *AE*. La ſua forza di gravità rappreſentata da *CB* ſi riſolve nelle due *CA*, *AB*, con la prima delle quali preme il piano *AE*, coll' altra *AB* è ſollecitato a diſcendere: ſicchè, ſe vi ſia un piano verticale *FG*, il quale trattenga la diſceſa di *C*, eſſo ſarà premuto con la forza *AB*. Queſte tre forze ſono rappreſentate dai tre lati del triangolo *BDE*, ſimile a *CAB*, onde *BE* moſtra la forza totale di gravità, *DE* la preſſione ſul piano inclinato, *DB* la preſſione nell' appoggio verticale *GF*. E poichè le due *BD*, *DE* preſe inſieme ſono maggiori di *BE*, è manifeſto che generalmente i corpi gravi poſſono eſercitare per la loro gravità delle preſſioni, la ſomma delle quali ſia maggiore del loro peſo.

Fig. I

4 Ma ſe il corpo *C* foſſe collocato in *D* ſul piano orizzontale *DE*, tutta la ſua preſſione ſi eſerciterebbe ſullo ſteſſo piano, e non affatto ſul piano verticale *FG* contiguo al detto corpo. E ſe foſſero collocati verticalmente ſopra *D* molti corpi, la preſſione ſarebbe come la ſomma de' peſi loro, ma eſercitata ſolamente nel piano orizzontale, e non mai nel verticale. Ed ancora, ſe *BD* rappreſenti una ſerie verticale di corpi, *DE* una ſerie orizzontale di corpi eguali, non ſi troverà mai, che il punto *E* d'un piano ivi ſollevato verticalmente ſia premuto da queſti; nè in verun altro modo ſi potrà intendere l'effetto della preſſione eſercitata nel parete verticale, ſe non che ritornando alla poſizione del corpo *C* ſopra il piano inclinato. Quindi poichè non ſi conſidera mai una ſerie di ſole particelle fluide nella verticale e nell' orizzontale d'un vaſo, ma ſempre una maſſa che ne occupi la capacità, perciò la preſſione ch'eſercita una mole di fluido contenuta da fondo orizzontale e pareti verticali dovrà eſſere dedotta dalla legge ſtatica del piano inclinato.

5 Con la ſteſſa altezza AD ſi poſſono fare de' piani diverſamente inclinati, come AF ad angolo ſemiretto aF, αF ad angoli maggiore, e minore del ſemiretto. Ciò poſto s'oſſervi, che la gravità totale dello ſteſſo corpo collocato ſopra qualſivoglia de' ſuddetti piani ſi riſolverà nel caſo d'equilibrio in modo, che la preſſione eſercitata nel piano verticale BF ſia coſtantemente rappreſentata dalla linea AD eguale a DF, e la preſſione ſul piano inclinato ſia rappreſentata dalle linee DF, dF, δF. Lo che eſſendo vero per ogni punto q della BF relativamente alla ſerie verticale di parti fluide inſiſtenti ſopra t, o, p, ſi dedurrà che la ſomma delle preſſioni in BF ſarà rappreſentata dalla ſomma delle linee DA, nA, cioè dall'area del triangolo iſoſcele rettangolo ADF, e la preſſione ſul piano inclinato ſarà rappreſentata dalla ſomma delle linee αB, pq: AB oq: aB, tq, cioè dall'area de' triangoli aBF, ABF, αBF. Laonde ſuppoſto che ſi contenga un fluido ne' vaſi la ſezione verticale de' quali ſia $\alpha\delta FB$, $ADFB$, $adFB$, la preſſione nella parete BF ſarà ſempre come il triangolo rettangolo iſoſcele ADF, e la preſſione ſulla baſe ſarà come la ſomma de' due triangoli αBF, $\alpha\delta F$ uno eſprimente la preſſione ſul piano inclinato, l'altro eſprimente la preſſione ſulla baſe: e così dicaſi di $ADF + ABF$, e di adF, aBF: al che corriſponde l'eſperienza. Fig. II

6 Ma inoltre ſe ſopra una tavola OP ſi diſpongano due piani inclinati FA, FS, i quali per mezzo di peſi attaccati a due fili avvolti a due carruccole pendenti da due ſtanti BR, br reſtino equilibrati e formino angolo retto tra di loro, e ſemiretto con la tavola, indi ſi collochi un globo G ſopra entrambi, è certo che per mantenere i piani nella reſpettiva loro poſizione, converrà aumentare i peſi attaccati ai fili, ed è certo inſieme che la tavola OP ſoſterrà la preſſione di tutto il peſo G: giacchè ſe tutto queſto apparecchio ſi metta in equilibrio ad una bilancia, indi ſi levi dal medeſimo il peſo G, converrà ſcemare dal contrappeſo egual miſura per mantener l'equilibrio. Parimente ſupponendo che i piani inclinati ſiano tre o più, i quali formino un angolo ſolido, ed il corpo G poſi ſopra tutti, premerà eſſo tutti i piani con forza eguale, e premerà ſulla baſe di tutti queſti piani con forza eguale al ſuo peſo. Così ne' fluidi la Fig. III

legge di pressione nella base e ne' pareti va del pari con la legge statica di pressione de' solidi ne' piani inclinati ad angolo semiretto.

7 Le parti dell' acqua sconnesse tra di loro per la fluidità non solamente pesano ed aggravano le pareti ed il fondo de' recipienti, ma anche gli strati di fluido sottoposti. Quindi è manifesto che l' acqua pesa nell' acqua. Per altro, siccome la volgare sperienza insegna che un vaso pieno d' acqua immerso nell' acqua s' alza si abbassa e si trasporta lateralmente con forza minima, e da non paragonarsi con quella che si deve impiegare per produrre gli stessi movimenti nell' aria; così i Peripatetici dedussero che l' acqua non gravita nell' acqua, e generalmente che i fluidi non gravitano nel proprio elemento.

8 *Boyle* dimostrò il contrario con la nota esperienza, cioè che esplorando il peso d' una boccetta vuota chiusa immersa nell' acqua, e resa così pesante sicchè di fatto s' immerga, indi aperta la boccetta così immersa sicchè v' entri dell' acqua, essa pesa appunto tanto di più quanto è il peso dell' acqua che è entrata. Di questa esperienza si servono generalmente i Fisici per dimostrare che l' acqua nell' acqua pesa per l' appunto come nell' aria. Dall' altra parte, essendo certo che il vaso pieno d' acqua immerso nell' acqua si move con forza minima, e che una nave affondata, se si prescinda dall' aderenza al fondo fangoso, si solleva con forza di gran lunga minore del peso dell' acqua ch' essa contiene, bisogna sviluppare l' equivoco, che nasce da questi confronti.

9 Un vaso chiuso e vuoto appeso ad una bilancia, immerso sott' acqua e messo all' equilibrio, da qualsivoglia forame aperto nelle sue faccie laterali, o nel fondo, o nel coperchio si riempie d' acqua, ed anche se sia affatto senza fondo aggrava la bilancia nello stesso modo, e per restituire l' equilibrio conviene aggiungere tanto contrappeso, quanto è il peso dell' acqua che occupa la capacità del vaso. Ora siccome, quando si giudica del peso d' un corpo posto sulla bilancia, vi si connette necessariamente l' idea della pressione ch' esso esercita nella lance, ed in questo senso suol sembrare dimostrativa l' esperienza di *Boyle*; così può recar confusione l' osservare nell' esperienza modificata col vaso senza

fondo,

fondo, che l'acqua occupa bensì la capacità del vaso, ma non esercita sopra d'esso alcuna pressione, e non pertanto l'aumento del peso sia il medesimo, come se il vaso avesse un fondo. Quindi sebbene sia vero che l'acqua pesa nell'acqua, l'esperienza di *Boyle* non lo prova direttamente, siccome suol sembrare.

10 L'acqua introdotta nella boccetta immersa preme col suo peso nelle pareti e nel fondo di essa, ma non turba l'equilibrio per questa pressione, giacchè quanto preme al di dentro la contenuta, altrettanto preme al di fuori con direzione contraria l'acqua che la circonda, e tenta d'entrare e d'occupare il luogo occupato dalla boccetta. Il volume del vaso chiuso ed immerso nell'acqua è composto dal volume delle sue pareti, e dal volume o spazio vuoto d'acqua che le pareti stesse racchiudono: quindi la forza che fa l'acqua posta d'intorno al vaso pareggia il peso d'un volume d'acqua eguale ai due indicati volumi. Aperto il vaso da qualsivoglia parte ed occupato d'acqua lo spazio, che per l'innanzi n'era vuoto, la forza che fa l'acqua posta d'intorno per entrare e sostenere lo stesso vaso diventa minore appunto di tanto quanto è il peso dell'acqua introdotta, e perciò a mantenere l'equilibrio richiedesi tanto peso di più dall'altra parte della bilancia, quanto è il peso dell'acqua che entrò nella boccetta, o nel vaso aperto da qualunque delle sue faccie.

11 Il peso dell'acqua nell'acqua si manifesta con la pressione che esercitano gli strati superiori negl'inferiori, la quale è tanto maggiore quant'è maggiore l'altezza del fluido, e produce effetti corrispondenti ne' corpi immersi e cedevoli, o compressibili. Per dimostrare coll'esperienza questa verità, ho intrapreso di confrontare il peso d'alcuni corpi immersi appena sotto la superficie dell'acqua, col peso loro, mentre erano immersi alla profondità di sei piedi sotto la stessa superficie. Questo confronto fu da me fatto con un pesce, un pezzo di carne di bue, un pezzo di lardo, un pomo, una vescica piena d'aria, ed un tubo di vetro chiuso dalla parte superiore, ed immerso coll'estremo inferiore aperto nell'acqua. A tutti ho attaccato un pezzo di piombo, onde nell'acqua fossero preponderanti. Il peso che ebbero calati a sei piedi

fu in tutti maggiore di quello, che moſtravano immerſi poco ſotto la ſuperficie del fluido, ond'è paleſe che i loro volumi ſi ſono ſcemati, e quindi, che eſſendo minore il volume d'acqua ſcacciato dal ſuo luogo ſcemavaſi meno il peſo totale del corpo immerſo.

12 Quindi ſi può aſſerire con certezza, che il corpo d'un peſce o d'un animale qualſivoglia ſecondo la varia profondità, alla quale è immerſo nell'acqua, eſſendo più o meno premuto, è anche più o meno diminuito di volume nelle ſue parti cedevoli, come ſono le carni ed il graſſo; e che ſe eſſo ſia peſante poco più dell'acqua, quando è immerſo appena ſotto la ſuperfice del fluido, diviene relativamente ſempre più peſante ſecondo che più s'affonda. Diminuito così il volume non s'altera, nè si difforma ſenſibilmente la ſua figura, ma appariſce ſimile a quella che ha nell'aria, ſebbene effettivamente ſi alteri, atteſo che il volume del capo e del torace, che ſono oſſei, non cede, e la diminuzione ſi fa ſoltanto nelle parti molli e capaci di condenſazione.

Fig. IV 13 Calando nell'acqua per mezzo d'un filo, e tenendo ſoſpeſa una veſcica chiuſa e piena di mercurio, eſſa prende quella figura che compete al ſuo peſo ed alla cedenza delle ſue pareti, e la mantiene a qualunque profondità ſia calata. Se s'introduca un cannello di vetro nella veſcica, e queſta vi ſi leghi d'intorno ſtrettamente, il mercurio ſi ſolleva nel cannello all'altezza che corriſponde alla profondità dell'immerſione. In queſta facile ſperienza è da notarſi, che l'acqua eſercita nella veſcica una preſſione indicata dall'altezza del mercurio nel cannello: ſicchè *AB* di mercurio s'equilibra con *DB* d'acqua: e ſe degli altri cannelli ſorgeſſero da *b*, *B*, il mercurio s'alzerebbe in *a*, *α* allo ſteſſo livello di *A*, e diminuirebbeſi il volume della veſcica ſimilmente, atteſe le compreſſioni eguali in tutti i punti. Nè per quanto ſi moltiplicaſſero i cannelli ſi varierebbe *AB*, poſto che la ſuperficie dell'acqua reſtaſſe in *CD*, e che la capacità della veſcica foſſe maggiore di quella de' cannelli preſi inſieme. E perciò ſebbene la colonna d'acqua che preme in *c* ſia maggiore di quella che preme in *b*, e la corriſpondente colonna di mercurio *a b c* ſia maggiore della *AB*, ſono però egualmente premuti i punti *B C*, perchè eſſendo equilibrato il mercurio tra *B b*, la preſſione in *c* è eguale

ad $ab = AB$. Per la qual cosa mi sembra meno esatta l'osservazione di *Gravesande* (Elem. Phys. § 1469), che quando un solido è immerso in un fluido a grande profondità, la pressione nella parte superiore appena differisce dalla pressione nella parte inferiore; sicchè i corpi immersi profondamente nell'acqua siano premuti da ogni parte quasi egualmente. Si deve dire invece che sono da ogni parte premuti con esatta eguaglianza, mentre a ciò che manca, per la disuguaglianza d' altezza delle colonne di fluido esterno prementi, supplisce la mole del corpo immerso o per la sua continuità, o per la sua resistenza nascente dalla coerenza delle sue parti e dalla sua figura, e fa lo stesso effetto delle colonne di mercurio equilibrate in *B b*.

14 Consideriamo in fatti il caso d'un corpo molle, o d'un corpo vuoto e tenue compresso dall'acqua. Riposti in una vescica piena d'acqua un guscio d'uovo vuotato per un piccolo buco, otturato poi con cera, un globo di vetro vuoto e di tenui pareti, un pezzo di cera molle di qualsivoglia figura, un pesce, un girino, indi chiusa con forte legame la vescica si metta in un vaso cilindrico proporzionato, e di robuste pareti. Sopra la vescica s'aggiunga quanto peso piace che prema sulla sezione orizzontale del cilindro. La pressione di 200 libbre e più ancora non danneggia punto nè schiaccia gli animali, nè il guscio d'uovo, nè il globo di vetro, che dentro si contiene, nè altera la figura del pezzo di cera molle. Se il corpo immerso vuoto e fragile come il vetro sia della figura di un cilindro a base piana e bastantemente ampia, è certo che la pressione a certo grado accresciuta cederà e si romperà; come appunto accade, se alla macchina pneumatica s'applichi un recipiente cilindrico con base piana e non conformata a campana, mentre quello dopo poche estrazioni d'aria si rompe: la campana resiste per quanto si continuino l'estrazioni. Quando la superficie premuta è piana, le parti vicine al mezzo cedono più di quelle vicine alla circonferenza, e trovando sotto di sè spazio non resistente cedono: ma quando la superficie è convessa e di sostanza rigida, essa non può cedere in un punto senza che il punto vicino s'innalzi, ed il vicino egualmente premuto dal primo non può innalzarsi. Non può avvicinarsi

una parete del guſcio d'uovo alla ſua oppoſta, ſenza che la figura del guſcio ſi dilati, ed a queſta dilatazione reſiſte la preſſione che s'eſercita in que' punti che dovrebbero diſcoſtarſi. Realmente però non è eguale la preſſione che il guſcio d'uovo ſoffre in tutti i punti dall'acqua che lo circonda: giacchè in *c* ſoffre maggior preſſione di quello che in *m* o in *B*. Qualora dunque la forza di coerenza del guſcio baſti a ſoſtenere la differenza naſcente da *bc*, lo ſchiacciamento non può accadere per quanto s'accreſca la forza dell'acqua premente. Quanto poi al pezzo di cera molle che non muta figura o agli animali immerſi che non ſoffrono danno dalla preſſione dell'acqua, ſe queſte maſſe ſi conſiderino come compoſte di materia a un dipreſſo uniforme, e ſiano atte a diminuirſi di volume per la compreſſione, eſſe ſi diminuiranno ſenza cambiamento della loro figura, poichè ſono preciſamente al caſo della veſcica di mercurio, nella quale il punto *B* è premuto come il punto *c*, quello dalla colonna *AB*, queſto dalla colonna *ab*, mentre per la differenza *bc* eſſa è equilibrata dalla contrapreſſione di *Bc*. La figura del corpo, che s'immerge nell'acqua, o ſi muta perchè le di lui parti non avendo alcuna coerenza tra di loro, per la gravità loro non ſoſtenute cadono, o ſe le ſue parti ſono coerenti, punto non s'altera dalla creſciuta uniforme eſterna preſſione. Quando ſi getta un fluido nell'acqua, con la quale non ſia meſcibile, prende eſſo una figura diſſimile da quella che aveva cadendo, ſecondo che richiede la gravità delle ſue parti, e la tenacità o viſcoſità loro. Se nel cadere s'addenſi, come ſarebbe del ſego liquido che ſi verſaſſe nell'acqua fredda, conſerva la forma che prende, e la continuità della maſſa prodotta equilibra le differenze *bc* tra le preſſioni in *B* ed in *c*.

15 Per la ragione che abbiamo ſopra indicata § 3 e ſeg. non biſogna confondere l'effetto della preſſione de' fluidi col peſo de' medeſimi eſplorato con la bilancia. Si fa dai Fiſici queſta ſperienza. Appeſo ad una bilancia per mezzo d'un manico abbaſtanza lungo un bicchiere non affatto pieno d'acqua ſi mette in equilibrio con un contrappeſo. Dall'alto d'uno ſtante fiſſo ſulla tavola ſporge orizzontalmente un braccio di legno fiſſato allo ſtante, e dall'eſtremo del brac-

cio discende un cilindro di legno, immobile. Si dispone la bilancia per modo, che il cilindro si possa immergere nell' acqua contenuta nel bicchiere, l'equilibrio si turba e prepondera il bicchiere, nel quale l'acqua s'innalza. Per restituire l'equilibrio bisogna aggiungere alla bilancia tanto contrappeso, quanto è il peso dell' acqua, che si dovrà versare nel bicchiere, onde s'innalzi allo stesso segno, a cui è innalzata per l'immersione del cilindro. Ma se il cilindro, invece d'essere annesso al braccio fisso orizzontale, sia attaccato al manico del bicchiere, in questo caso l'equilibrio resta il medesimo e senza alterazione di contrappesi, o che il cilindro sia fuori, o che sia immerso nell'acqua. In questo secondo caso senza veruna alterazione di peso, la pressione nel fondo del bicchiere s'accresce coll' immersione del cilindro, ma questo accrescimento non si manifesta sulla bilancia. Ed è appunto lo stesso, come accade se un uomo stando sul suolo prema una delle due lancie della bilancia posta in equilibrio, oppure prema la stessa lance, mentr'egli è sulla medesima collocato. Quindi, se il cilindro fissato al braccio orizzontale s' immerga alla stessa misura in un vaso di grande o piccola capacità messo in equilibrio alla bilancia, sarà sempre eguale l'aumento del peso per restituire l'equilibrio dopo l'immersione, ma la pressione nel fondo sarà molto diversa e relativa all'altezza a cui sarà asceso il fluido per l'immersione del cilindro.

16 Corrisponde a questa l'altra esperienza, che se sullo stesso fondo circolare sieno eretti successivamente tre vasi d' eguale altezza, uno cilindrico, uno conico divergente, l'altro conico convergente, ed il fondo sia mobile, sicchè possa abbassarsi ed alzarsi scorrendo con moto parallelo a sè stesso senza lasciar sortire l'acqua di cui si riempiano, la pressione sul fondo sarà in tutti eguale, ancorchè i pesi dell' acqua contenuta ne' vasi siano molto diversi tra di loro. Nel cilindrico la pressione è eguale al peso di tutta l'acqua: nel vaso conico divergente all' insù, tutto il volume d'acqua che eccede la misura del cilindro è sostenuto dai lati del vaso inclinati all' infuori, nel vaso conico convergente all' insù, ogni punto dei lati del cono fatti di materia resistente opera come il cilindro di legno affisso al manico del bic-

chiere, e ſenza accreſcere il peſo accreſce la preſſione ſul fondo, per quanto l'acqua s'innalza. E che di fatto non accreſca il peſo ſcorgeſi ad evidenza, mentre iſtituendo queſta eſperienza, il vaſo conico divergente all'insù ed il cilindrico reſiſtono al contrappeſo, che equilibra la preſſione ſul fondo; ma il vaſo conico convergente non reſiſte ed è ſollevato dal contrappeſo, ſicchè biſogna ritenerlo con una forza fiſſo alla tavola, ſulla quale ſi fa l'eſperienza.

17 Da queſte oſſervazioni facilmente s'intende come una nave di qualſivoglia peſo galleggiante ſul mare, non accreſca la preſſione ſul fondo del mare ad eſſa ſottopoſto, più che l'acqua che v'era da prima nel luogo della nave. Perchè la nave occupa nell'acqua un luogo eguale al volume d'acqua, che peſa quanto eſſa, e che diſcaccia dal luogo ſuo. E poichè l'acqua ſcacciata non aumenta l'altezza del mare in tutta la ſua eſtenſione comunicante, non vi ſarà preſſione maggiore nel fondo ſottopoſto alla nave ſteſſa.

18 Così ancora le nuvole ſoſpeſe nell'atmosfera e galleggianti per la loro gravità relativa minore di quella dell'aria non peſano affatto nelle regioni inferiori: perciocchè ſono ſoſtenute ed equilibrate dalle colonne d'aria poſte d'intorno, e l'altezza dell'atmoſfera troppo inſenſibilmente ſi può innalzare per l'aggiunta de' volumi delle nuvole, atteſa la libera comunicazione in tutta la ſua eſtenſione.

19 *Leibnizio* per iſpiegare le variazioni del barometro prima che cada la pioggia e mentre cade, pensò che le nubi ed i vapori rendeſſero più peſante l'atmosfera prima di cadere, e nell'atto di cadere, non eſercitando più il proprio peſo ſull'aria, queſta premeſſe meno il barometro.

20 Sul primo aſſunto non ſi è moſſa alcuna difficoltà, ancorchè ſi poteſſe per quello che abbiamo poc'anzi notato. Sul ſecondo produſſe egli un'ingegnoſa eſperienza, la quale appartiene alle preſenti noſtre oſſervazioni, e che non ho per anche veduto compiutamente ſpiegata. Abbiaſi un tubo del diametro di tre pollici, e lungo circa piedi quattro, ripieno d'acqua, e s'appenda all'eſtremo dell'aſta d'una bilancia. Dal manico del tubo, o dall'eſtremo dell'aſta penda per un filo un globo di piombo, il quale ſia appena immerſo ſotto la ſuperficie dell'acqua del tubo. Facciaſi l'equili-

brio: indi si tagli o s'abbruci il filo dal quale pende il globo: nel tempo della discesa del globo si turba l'equilibrio, e prepondera il contrappeso, e giunto il globo al fondo, l'equilibrio si restituisce. L'illazione è, che il globo nell'atto di discendere non pesa sulla bilancia, e che perciò lo stesso dee dirsi de' vapori, quando raccolti in goccie discendono nell'atmosfera, che perciò non premono, ond'essa gravita meno nel mercurio del barometro.

21 Ora considerando l'esperienza stessa, indipendentemente dall'applicazione, che ne fece l'Inventore, s'osservi essere verissimo che mentre un corpo discende non può esercitare veruna forza per la sua gravità sopra un altro corpo, col quale non abbia alcuna connessione. Se l'esperimento s'istituisse nel tubo occupato soltanto dall'aria, non vi sarebbe alcuna meraviglia per la preponderanza del contrappeso, perchè il globo non avendo alcuna connessione col tubo, o con la bilancia, allorchè è rotto il filo, non può ne' medesimi esercitare alcuna azione.

22 Ma il caso è diverso, quando nel tubo v'è l'acqua, per cui il globo deve aprirsi la strada discendendo ed esercitando una pressione. Se si faccia sorgere dall'ima parte del tubo un cannello di vetro più alto del tubo stesso, nel quale l'acqua si metterà allo stesso livello, esso serve d'indice per vedere, come l'acqua sia premuta nell'atto della discesa del globo. In fatti essa s'innalza notabilmente sopra il livello, che aveva nello stato di quiete.

23 Se il filo da cui pende il globo non sia annesso al manico del tubo o all'estremo dell'asta della bilancia, ma ad un braccio fisso, onde la bilancia non sia punto gravata dal peso del globo nello stato d'equilibrio, allora tagliato o bruciato il filo, nell'atto che cade il globo per l'acqua, il tubo prepondera, e molto più quando il globo è giunto al fondo. Che se il tubo sia occupato soltanto dall'aria, allora mentre il globo cade l'equilibrio non si turba, ma bensì propondera il tubo, quando il globo è giunto al fondo.

24 Per ispiegare questi fatti bisogna distinguere la pressione dal peso. Quando il globo pende dal manico del tubo esso aggrava la bilancia con tutto il suo peso, e l'aggrava nello stesso modo se sia o non sia immerso nell'acqua.

Allorchè discende per l'acqua, ciò succede per l'eccesso del suo peso sopra quello d'un pari volume d'acqua, che ascende mentre il globo cade. Non grava dunque con tutto il suo peso la bilancia, e perciò prepondera il contrappeso. Quando il globo pende dal bracio fisso, non accresce peso alla bilancia o immerso o no che sia nell'acqua del tubo. Tagliato o bruciato il filo s'aumenta il peso del tubo di tanto quanto è il peso d'un volume di acqua pari al volume del globo: ed inoltre s'aggrava la bilancia di quella parte di peso, che preme sulla bilancia stessa discendendo, onde prepondera il tubo.

25 Per vedere poi, come il peso cadente non aggravi di tutta la sua quantità la bilancia, si osservi il seguente fatto di Statica. Se ad un filo avvolto ad una carrucola s'appendano due pesi disuguali, e la carrucola col filo e pesi s'appenda ad una bilancia, e si faccia equilibrio, indi sollevato il peso maggiore fino alla carrucola si lasci cadere, sicchè sollevi il minore, nel tempo della discesa l'equilibrio si turba e prepondera il contrappeso. In questa sperienza non preme sull'asse della carrucola e per conseguenza nella bilancia la parte di peso che cade, e preme quella che non cade. Se i due pesi siano p, q, la parte, che non cade e preme è $\frac{4pq}{p+q}$, e la parte che cade e non preme è $\frac{(q-p)^2}{p+q}$ (Vedasi *Desagulier* Cours de Physique Not. sur la Leç. III. pag. 171) Lo stesso accade al globo che discende per l'acqua, una porzione del quale cadendo non preme, l'altra preme nella bilancia.

Se $q=11$ peso del globo di piombo, $p=1$ peso d'un pari volume d'acqua, la parte di peso che non cade e preme sarà eguale a $3\frac{2}{3}$, e la parte che cade e non preme sarà eguale a $8\frac{2}{3}$.

26 E perciò quando il globo pende dal manico, e tagliato il filo cade, lo sbilanciamento deve farsi per quella parte che cadendo non preme, cioè il tubo deve riuscire più leggiero di $8\frac{2}{3}$, quindi deve preponderare il contrappeso, e restituirsi l'equilibrio, allorchè il globo è giunto al fondo. Quando poi il globo pende dal braccio fisso, e tagliato il filo cade, primieramente deve rendersi preponderante il tubo, perchè vi si aggiunge un volume equivalente nel peso

ad

ad un pari volume d'acqua. In fatti ſe il globo foſſe della ſteſſa gravità ſpecifica dell'acqua, tagliato il filo, eſſo non diſcenderebbe, ma la bilancia ne ſentirebbe il peſo, ed il tubo ſi renderebbe preponderante. Nell'atto poi di cadere la parte premente la bilancia è, come nell'altro caſo, $3\frac{2}{7}$, e la non premente è $8\frac{1}{7}$. Ma la premente non avendo contrappeſo che la equilibri fa preponderare dalla ſteſſa parte la bilancia. E ritornando alla ſperienza della carrucola, queſto ſecondo caſo ſarebbe come ſe il peſo maggiore anneſſo al filo non aveſſe contrappeſo nella bilancia, mentre allora ſicuramente la bilancia ſteſſa preponderebbe nell'atto della diſceſa dalla parte della carrucola.

27 L'indice, nel quale s'alza l'acqua nell'atto della caduta del globo, dimoſtra la preſſione, che s'eſercita dall'acqua nel fondo del tubo, la quale non ſi deve confondere coll'effetto del peſo nel produrre lo sbilanciamento. Il globo pendente dal braccio fiſſo immerſo nell'acqua innalza la ſuperficie dell'acqua, accreſce la preſſione ſul fondo, e non turba punto l'equilibrio a cui ſiaſi meſſo il tubo ripieno d'acqua ſenza il globo immerſo. Se il fondo del tubo foſſe mobile, e poteſſe ſcorrere parallelo a sè ſteſſo, dimoſtrerebbe con la ſua diſceſa, o con la forza occorrente per impedirla, la preſſione che s'eſercita ſul ſuo fondo, per l'acqua innalzata coll'immerſione del globo. Così ancora dimoſtrerebbe l'effetto della preſſione naſcente dal globo cadente, e che ſi fa ſtrada per l'acqua: ma sì l'uno che l'altro effetto niente turbano la legge d'equilibrio del tubo col ſuo contrappeſo. Lo ſteſſo deve dirſi dell'innalzamento dell'acqua che ſi oſſerva nel cannello, il quale è un effetto della preſſione ſul fondo del tubo, che niente altera la legge del ſuo equilibrio col contrappeſo. Così ſe un uomo con una tromba ed uno ſtantuffo foſſe poſto in equilibrio ſopra una bilancia, ed agitando lo ſtantuffo faceſſe aſcendere l'acqua in un tubo comunicante con la tromba, l'equilibrio punto non ſi turberebbe.

28 La varia altezza a cui ſorge l'acqua nel cannello è un effetto della proporzione che paſſa tra la ſezione del tubo e quella del cannello tanto nella ſua origine, quanto nel ſuo progreſſo. La forza premente del globo che diſcende è

la ſteſſa, quando le due ſezioni del tubo e del cannello nella ſua origine ſiano le medeſime. Ma ſe il cannello dalla ſteſſa ſezione o forame aperto nel fondo del tubo ſorgerà cilindrico, o conico divergente o convergente, riuſcirà diverſa l'altezza a cui l'acqua s'innalzerà nel cannello ſopra il ſuo primo livello: perchè la ſteſſa quantità d'acqua cacciata fuori dovendoſi conformare in figure così diverſe ſulla ſteſſa baſe, produrrà altezze differenti. Laonde l'altezza a cui ſi ſolleva l'acqua nel cannello non è miſura della preſſione che ſoffre il fondo, ma ſoltanto un indizio, il quale però dimoſtra perchè la bilancia non ne riſenta alcuna alterazione, mentre all'azione del grave premente all'ingiù corriſponde eguale azione in ſenſo oppoſto dell'acqua ſpinta all'insù.

29 Inoltre queſta preſſione ſul fondo ſarà diverſa a miſura che il globo ſarà maggiore, o minore riſpetto alla ſezione del tubo, o che invece della figura sferica ſi darà al corpo che diſcende una figura conica cilindrica o altra che ſia, e l'oſſervazione dell' altezze a cui s' alza l' acqua nel cannello, difficile per altro da farſi con eſattezza, potrebbe moſtrare le varie reſiſtenze che ſoffrono i corpi diſcendenti per l' acqua, dipendentemente dalla loro figura. Finalmente ſe ritenendo il medeſimo tubo e globo facciaſi che il cannello abbia il medeſimo diametro del tubo, l' innalzamento dell' acqua nel cannello ſteſſo ſarebbe inſenſibile, eppure la forza eſercitata dallo ſteſſo globo cadente nel fluido, da cui naſce la preſſione, ſarebbe la ſteſſa.

30 Induce queſta oſſervazione a penſare quanto importi la proporzione de' forami al fondo de' vaſi, per regolare la velocità dell' acqua che dai medeſimi eſce, e l'altezza a cui può ſalire. In fatti quando ad un vaſo ripieno d' acqua ſi toglie d'un tratto il fondo, la preſſione dell'acqua contenuta nel vaſo è nulla ſopra quella che eſce, e tutte le parti del fluido diſcendono col moto naſcente dalla gravità liberamente eſercitata, e perciò eguale. Ma quando invece di togliere il fondo s'apre in eſſo un forame, la preſſione dell'acqua ſuperiore ſull'inferiore non è della colonna d'acqua inſiſtente ſopra il forame, ma di tutta quella che è contenuta nell'ampiezza del vaſo, come ne fa certa prova l'abbaſſamento uniforme di tutta la ſuperficie del fluido. La re-

cente teoria di M. *Bernard* (Nouveaux Principes d' hydraulique) è la più soddisfacente ch' io trovi fino ad ora a spiegare i fenomeni di questa classe, sopra i quali si fonda gran parte dell' Idraulica. Il fluido contenuto nel vaso opera premendo con la sua gravità, mentre è aperto il forame, nello stesso modo come un grave posto sopra un piano inclinato, la di cui altezza alla base abbia la proporzione dell' ampiezza del forame alla proporzione di fondo che rimane non occupata dal forame. Quando la base del piano inclinato è nulla, cioè che il forame occupa tutto il fondo, la pressione del grave cadente sul piano è nulla: e il fluido cade per la sola sua gravità, quando la base ha una proporzione insigne all' altezza, allora la pressione è grande. Si deduca a confronto lo spazio percorso in un dato tempo dal fluido in un vaso cilindrico in questa ipotesi de' piani inclinati, e la massa di fluido così discesa si trasformi in un cilindro la di cui base sia eguale all' area del forame, l' altezza che ne risulterà sarà lo spazio percorso dal fluido nel dato tempo, cioè l' altezza a cui potrebbe ascendere. Se l' area del fondo sia 30, quella del forame sia 1, l' altezza del vaso sia 15, si troverà l' altezza del getto, o lo spazio percorso dal fluido eguale a 29 $\frac{1}{2}$. Se l' area del fondo sia 30, il forame 29, l' altezza del vaso sia $=$ 15, si troverà lo spazio percorso 14 $\frac{1}{2}$.

31 Questa verità, che pure è di fatto, fu conosciuta per molto tempo, anzi *Gicard* (Hist. Reg. Acad. Paris. lib. 1 Sect. 3 Cap. 4) intraprese di dimostrare coll' esperienza che l' ampiezza del vaso e del fondo contribuiva poco o molto ad alterare la quantità d' acqua ch' esce da un forame aperto nel fondo stesso. *Daniele Bernoulli* (Hydrodyn. Sect. 5. §. 4) vide sagacemente, che non si poteva trascurare la proporzione dell' area del fondo a quella del forame, e dedusse dai suoi principj la formula $h=\frac{m^2a}{m^2-n^2}$, nella quale h esprime l' altezza corrispondente alla velocità con cui l' acqua esce dal forame, n l' area del forame, m l' area del fondo, a l' altezza dell' acqua nel vaso. In questa formula però supposto n infinitamente piccolo, diventa $h=a$, che corrisponde all' esperienza: ma supposto $m=n$, h diviene

infinita, che è una conseguenza troppo lontana dal vero, e dalla realità, perciocchè la forza, per cui l'acqua discende, quando il fondo è distrutto, è realmente la forza di gravità, che non esercita veruna pressione sul fluido sottoposto.

32 Ho voluto riscontrare coll'esperienza, se corrisponda al fatto la teoria dedotta dalle varie pressioni del fluido contenuto in vasi di diverso fondo ed aperti con lo stesso forame. Si sono preparati due vasi parallelepipedi alti pollici 40, di base quadrata, una del lato di linee 102, l'altra del lato di linee 30. Il fondo di ciascheduno de' detti vasi è munito d'una grossa lastra d'ottone, nella quale è aperto un forame circolare del diametro di linee 18, il di cui contorno è solcato a vite. A questo forame s'applica una lastra circolare col contorno solcato a vite simile alla precedente. In questa lastra rotonda assottigliata nel mezzo è aperto un forame circolare del diametro di linee 6. Si ha inoltre un' altra simile lastra rotonda col contorno solcato a vite perforata nel mezzo con buco circolare del diametro di lin. 6, esternamente munito d'un tubo cilindrico dello stesso calibro lungo lin. 10, ed internamente munito d'un imbuto che dall'ampiezza del forame s'espande ad un cerchio del diametro di lin. 16. Ciascheduna di queste due lastre si può applicare a ciascheduno de' mentovati due vasi, onde il forame per cui esce l'acqua sia precisamente lo stesso nell'esperienze di confronto. La proporzione dell'area de' forami all'area del fondo nel vaso maggiore è di 200 : 1, nel minore di 17 : 1 prossimamente. Empiuti successivamente detti vasi, e mantenuti pieni, facendo versar l'acqua sempre dallo stesso uomo, con pari avvertenza, nascente da molta abitudine (il che equivale a qualsivoglia artifizio, che immaginar si possa per l'uniformità del riempimento) si è raccolta e misurata l'acqua che in pari tempo uscì da ciaschedun vaso per lo stesso forame.

I. Dal vaso maggiore per il forame aperto nella lastra assottigliata nel tempo di 30 minuti secondi si sono raccolte d'acqua - - - - - - - - - - - lib. $32 \frac{1}{4}$

II. Dallo stesso, per il forame munito di tubo e d' imbuto, nello stesso tempo, si sono raccolte d'acqua lib. 45.

III. Dal vaso minore, per il forame, come nell'Esp. I.,

nello ſteſſo tempo, ſi ſono raccolte d'acqua - - lib. 30 $\frac{1}{4}$

IV. Dallo ſteſſo vaſo, per il forame, come nell'Eſp. II., nello ſteſſo tempo, ſi ſono raccolte d'acqua - - lib. 42 $\frac{1}{2}$

33 E' certo che la quantità d'acqua, la quale uſcirebbe libera affatto dagli effetti della contrazione della vena, ſarebbe maggiore di quella, che ſi è raccolta nell'eſperienze ſuddette. Tolgono in gran parte gli effetti ſteſſi, il cilindro eſteriore, e l'imbuto interiore, di cui è munito il forame nell' eſp. II. e IV., e quindi ſi ſcorge quanto notabile ſia la differenza della quantità raccolta nello ſteſſo tempo, a confronto di quella che ſi raccoglie nell' Eſp. I. e III. Ma ciò, che importa all'oggetto noſtro preſente, è d'oſſervare, come coſtantemente dal vaſo di baſe più ampia eſca per lo ſteſſo forame da pari altezza in pari tempo maggiore quantità d'acqua, di quello che dal vaſo di baſe più riſtretta. Differenza che ben ſi prevede, ſe ſi fondi un calcolo ſull'aſſunto, che la gravità dell'acqua operi nel premere e ſollecitare l'uſcita per i forami aperti nel fondo del vaſo non liberamente ma con forza diminuita in quella ſteſſa proporzione in cui ſi diminuiſce la ſollecitazione d'un grave poſto ſopra un piano inclinato, la baſe del quale all'altezza abbia la proporzione dell'area del fondo non occupata dal forame all'area del forame. Onde ſi raccoglie che la preſſione idroſtatica non ceſſa giammai, ma ſoltanto ſi modifica con certe leggi, nel produrre l'uſcita e la velocità de' fluidi che eſcono dai forami diſcendendo, o zampillando, o elevandoſi in tubi aggiunti: e queſte leggi dipendono dalla proporzione tra l'aria del fondo e quella del forame, poſta l'altezza pari.

34 *Danielle Bernoulli* (Hydrodyn. Sect. XII) eſaminò con particolare ſtudio le leggi di preſſione, ch'eſercitano i fluidi nelle pareti de' vaſi o tubi, per i quali ſcorrono, e chiamò idraulico-ſtatica queſta conſiderazione, che a dir vero ſembra ſublime e nuova. Se per un tubo il quale derivi da un vaſo mantenuto pieno d'acqua, e ſia d'un tratto ſpezzato, eſca l'acqua con la velocita corriſpondente all'altezza a, e prima che foſſe ſpezzato l'acqua eſca da un'apertura minima fatta nel tubo ſteſſo con velocità corriſpondente all'altezza b, la preſſione dell'acqua nelle pareti del tubo sarà $a-b$. Sicchè, ſe per qualche combinazione avvenga

che b ſia maggiore di a, la preſſione del fluido nelle pareti del tubo ſarà negativa, cioè non ſarà dal fluido nelle pareti, ma da queſte in quello, e ſi cangierà in ſucchiamento. Una tale combinazione ſi ha nel caſo ſeguente. Abbiaſi un vaſo $ABFG$, dal fondo del quale diſcenda il tubo DE conico divergente; ſi mantenga pieno, e la preſſione dell' acqua nel punto D, per la teoria dell' Autore, ſarà eſpreſſa dalla formula $c - \frac{m^2 a}{n^2}$: nella quale l' area del forame $E = m$, la ſezione del tubo in $D = n$, l' altezza dell' acqua ſopra $E = a$, e l' altezza ſopra $D = c$. E' manifeſto, che la ſuddetta formula in queſto caſo eſprime una quantità negativa. Quindi deduce egli, che ſe dal punto D diſcenda un tubo DL, e s' immerga nell' acqua, mentre quella del vaſo diſcenderà per E, ne aſcenderà dell' altra da L in D e caderà per E, atteſo che la preſſione negativa diventa ſucchiamento. L' eſperienza corriſponde, mentre fatto il tubo conico DE lungo 4 pollici, il forame E di 5 linee di diametro, D di 4, l' altezza BA di pollici 18, BD di 19, DL di 10, e mantenuto il vaſo pieno d' acqua, mentre eſſa diſcende per E, ſe n' alza per LD, e diſcende per DE.

35 Queſta teoria e queſta ſperienza ſembrano confermarſi a vicenda, ſicchè non ſi poſſa negarvi l' aſſenſo, e non pertanto laſciano nella mente una certa dubbiezza, che non ſi può vincere, principalmente per la ſtrana fraſe di preſſione negativa, e perchè non ſi ſcorge quale conneſſione aver poſſa una forza, che per qualſivoglia direzione s' eſerciti ſulla parete d' un tubo conico rigido, col movimento d' aſceſa dell' acqua per il tubo laterale LD. Ommettendo di riferire gli ſtudj fatti da molti, per riſchiarare queſto argomento, addurrò ſoltanto le mie oſſervazioni e penſieri. Primieramente la formula ſopraddotta porta in conſeguenza, che mantenendo le altezze medeſime c a, s' avrà ſempre preſſione negativa e ſucchiamento qualunque ſia la proporzione di m ad n, purchè m ſia maggiore di n. Ma ciò non combina affatto all' eſperienza. In ſecondo luogo laſciando n c come ſono, ed allungando ſoltanto il tubo conico, ſicchè s' accreſca a ed m, dovrebbe il ſucchiamento farſi da maggiore altezza, cioè con forza maggiore: il che parimente non com-

bina coll'esperienza. In terzo luogo, se il tubo conico non fosse piantato verticalmente, ma uscisse dal vaso con direzione orizzontale del suo lato inferiore, non dovrebbe farsi la pressione negativa o succhiamento, perchè in questo caso *a* sarebbe eguale a *c*, e per quanto *m* fosse maggiore di *n*, non vi sarebbe accelerazione più in *m* che in *n*, atteso che l'altezza da cui dipende la velocità è la medesima: eppure col fatto succede il succhiamento.

36 Io non mi tratterrò qui a considerare gli elementi della teoria Bernulliana, dai quali è dedotta la suddetta formula, lo che troppo mi allontanerebbe dall'intenzione d'esaminare e d'investigare la cagione d'un fatto, il quale non combinando in tutte le sue modificazioni con la formula, avvisa già non essere gli elementi stessi conformi alla verità fisica. Ad oggetto pertanto di sviluppare il meccanismo di questo fenomeno, ho istituito la seguente breve serie d'esperienze.

37 *ABFG* è un vaso di vetro cilindrico dell'altezza di poll. 18 del diametro di poll. $3\frac{1}{2}$. Esso è circondato a ciaschedun estremo d'una fascia di lastra d'ottone, nel bordo della quale è scolpita una vite. Una serve per adattarvi un fondo d'ottone: l'altra per adattarvi un cilindro di vetro simile al primo, onde avere doppia altezza di vaso. Nel mezzo del fondo d'ottone è aperto un forame circolare del diametro di lin. 4. Intorno a questo forame è aderente alla superficie esterna del fondo un anello schiacciato d'ottone del diametro di dieci linee, concentrico al forame, col contorno interiore scolpito a vite, onde adattarvi i cannelli, de' quali si dirà. Un altro anello simile è aderente all'interna superficie del fondo. Il vaso di poll. 18 è mantenuto pieno d'acqua, e si nota con un cronometro a minuti primi, secondi, e terzi il tempo nel quale si riempie un vaso della capacità di lib. 20. Sebbene alcune dell'esperienze qui registrate non servano immediatamente all'oggetto, pure siccome erano nella serie e possono servire ad altre considerazioni, si riportarono.

I. Dal forame nudo aperto nel fondo .... Tempo. 0.50''.20

II. Dal forame munito esternamente d'un tubo cilindrico d'ottone, calibrato alla sezione del fo-

rame, lungo pollici 4. Questo tubo, come i seguenti, s' adatta al fondo del vaso con base fatta a vite, che s' unisce all' anello. - - - - - - 0.39''.19

III. Dal forame munito del tubo precedente, allungato coll' aggiunta d' un altro eguale in lunghezza e calibro - - - - - - - - - - - - - 0.41.26

IV. Dal forame munito esternamente del cilindro, come al n. 2, ed internamente d' un imbuto o cono tronco, la base minore del quale è eguale al forame, la maggiore è del diametro d' un pollice, l' altezza d' un pollice - - - - - - - 0.35.59

V. Dal forame munito del tubo come al n. 2, ed internamente d' un imbuto d' altezza doppia, e doppia espansione della sua base maggiore - - 0.35.56

VI. Dal forame munito di tubo cilindrico esteriore, dal quale all' altezza *DR* di linee 10 discende un tubo *DL* lungo poll. 12, del diametro di una linea e mezza aperto nell' aria - - - - - - - 0.39.24

chiuso il tubo laterale con cera in *L* - - - - - 0.39.22

immerso il tubo laterale in un vaso d' acqua alla profondità di 6. pollici - - - - - - - - - - 0.39.23

In questa sperienza l' acqua non esce per il tubo laterale, nè entra mai ascendendo, nè la vena d' acqua si altera punto chiudendo, o lasciando aperto nell' aria l' estremo *L*. Se mentre l' acqua discende per *E* si chiuda il forame *E*, essa discende per *L*, e lasciando libero *E* continua a discendere per *L*. Ma vuotato il vaso interamente, e di nuovo riempiuto per ripetere l' esperienza, l' acqua esce per *E* e non per *L*. Se questo tubo cilindrico si allunghi a quadrupla lunghezza, l' acqua nel discendere esce spontaneamente dal tubo laterale.

VII. Dal forame munito di tubo esterno conico tronco, la di cui sezione minore è del diametro di lin. 4, precisamente eguale al forame, e la sezione maggiore è del diametro di linee 5. Il tubo è lungo pollici 4. - - - - - - - - - - 0.28.32

Dal punto *D* di questo tubo lontano lin. 10 dal

punto

punto *R* parte un tubo tenue del diametro di poco più d' una linea, il quale difcende per 12 pollici fino a *L*. Quefto tubo laterale nell' Efper. prefente era chiufo con cera all' eftremo fuo inferiore.

VIII. Dallo fteffo forame munito dello fteffo tubo efterno, e dell' imbuto interno, come al n°. IV, col laterale chiufo come nella Sper. prec. - - o . 21". 4

IX. Dallo fteffo forame munito dello fteffo tubo efterno, e dell' imbuto interno, ma col laterale aperto nell' aria - - - - - - - - - - - - - o . 28 . 32

X. Dallo fteffo forame munito, come nell' Efper. preced., ma col tubo laterale immerfo nell' acqua o . 20 . 47

L' acqua è afcefa per il tubo laterale all' altezza di poll. 14 da *L* in *D*. Il tubo *DL* è immerfo in un vafo del diametro di due pollici ripieno d' acqua, il livello della quale va abbaffandofi a mifura che effa è alzata e trasfufa in *DE*. Convenne perciò aggiungere a *DL* un tubo di vetro per allungarlo, giacchè l' altezza *LD* riufcì di poll. 14, nè l' acqua fi potè innalzare da maggiore profondità.

Quando il tubo laterale fi lafcia aperto nell' aria, mentre l' acqua efce per il conico verticale, fcorgefi la vena mefcolata con molte bolle d' aria, rumorofa nel cadere, e gorgogliante. Chiudendo col dito il tubo laterale, o immergendolo nell' acqua, la vena comparifce unita e lifcia.

XI. Dal forame munito di tubo conico fimile al precedente e tre tubi laterali *DZ* chiufi con cera all' eftremità inferiori, e l' imbuto interno o. 24. 32

XII. Dallo fteffo con i laterali immerfi nell' acqua o. 24. 3 l' acqua è afcefa per tutti tre i laterali all' altezza di circa pollici 14.

XIII. Dallo fteffo con i laterali aperti nell' aria o. 28. o

XIV. Il vafo *ABFG* fi è fatto d' altezza doppia cioè di pollici 36. Dal forame nudo come al n. I. o. 38. 35

XV. Dal forame munito come al n. VI. di tubo cilindrico - - - - - - - - - - - - - - - o. 29. 13

XVI. Dal forame munito di tubo efterno conico

come al n. VII., col laterale chiuso di cera - - o. 19″. 34

XVII. Dal forame munito come nella precedente col tubo laterale immerso nell' acqua - - - o. 19. 29
l' acqua è ascesa dalla profondità *LD* di poll. 20.

XVIII. Dallo stesso aggiungendo l' imbuto interno o. 16. 32
l' acqua è ascesa per il laterale dalla profondità *DL* di poll. 24

Se si mantenga sempre pieno allo stesso modo il vaso in cui s' immerge il tubo laterale, la solita quantità d' acqua si raccoglie in tempo eguale a quello, che si osserva se il tubo laterale sia chiuso.

XIX. Allo stesso vaso si applicò orizzontalmente lo stesso tubo conico dell' esperienze precedenti, ed internamente vi si è apposto il solito imbuto. Per far ciò, e per l' esperienze relative all' uscita dell' acqua dai forami aperti nei lati dei vasi, si ha un vaso di metallo alto 5 pollici, il quale si può adattare al vaso di vetro in luogo del solito fondo. Nella parete di questo vaso di metallo è aperto il forame di lin. 4 di diametro, e sono applicati alla sua superficie esteriore ed interiore gli anelli sopra descritti, per apporvi i tubi e gl' imbuti soliti. Servono anche questi anelli per adattarvi delle piccole lastre col contorno a vite, e traforate con buchi di varia grandezza per le sperienze di questo genere. S' inclinò il vaso per modo, che il lato inferiore del tubo conico aggiunto riuscisse orizzontale. All' estremo del tubo laterale, che in questa esperienza riusciva pressochè orizzontale, s' adattò un cannello di vetro verticale, che si è immerso nell' acqua. Per questo l' acqua è ascesa dalla profondità di poll. 20.

XX. Al solito forame del fondo s' applicò un tubo conico lungo poll. 4, ma tale, che la sua sezione maggiore è del diametro di linee 10: e perciò la proporzione tra le aree del forame e dell' estremità del cono era di 16 : 100. Parte da questo tubo il laterale *DL*, per il quale non ascende mai acqua, mentre discende per *DE* da qualsivoglia altezza di vaso. La quantità d' acqua che si raccoglie è poco maggiore di quella che in pari tempo esce dal forame nudo.

XXI. Si è allungato con un tubo aggiunto di 4 pollici il tubo conico adoperato al n. VII., sicchè formava un tronco

conico lungo pollici otto; non si osservò, nè differenza nel tempo per raccogliere la data quantità d' acqua, nè che l' acqua s' innalzasse da profondità maggiore di quella a cui s' innalzava adoperando il solo tubo conico lungo poll. 4.

XXII. Se il tubo laterale del conico n. VII. sia di vetro, e s' immerga nel mercurio, questo s' alza nel laterale più o meno secondo la velocità e quantità dell' acqua che esce dal conico.

XXIII. Se il tubo laterale di vetro si faccia assai lungo e si immerga nell' acqua, questa s' innalza fino a certo segno, e resta sospesa, ma non passa nel tubo *DE*, se *DL* non sia di lunghezza minore dell' altezza a cui si sostiene per la velocità e quantità di quella che esce per *DE*.

XXIV. Se il tubo laterale di vetro si faccia passare per un turaccio di sughero, col quale sia chiusa una bottiglia piena d' acqua, sicchè sia impedita ogni pressione dell' aria esterna nell' acqua della bottiglia, questa non passa mai da *LD* in *DE*, qualunque sia la velocità e quantità di quella che passa per *DE*.

XXV. Se il tubo apposto al forame sia conico convergente all' ingiù, ed abbia un laterale, l' acqua esce sempre per amendue i tubi.

38 Se si considerino queste sperienze, si rende manifesto che il fenomeno di cui si tratta non altro esprime, che un vuoto relativo, o una rarefazione dell' aria mescolata coll' acqua nel tubo verticale conico, la quale dà occasione all' aria esterna di preponderare premendo sull' acqua, in cui è immerso il tubo laterale, e di farla per esso salire. Come poi succeda questa rarefazione, mi pare che si spieghi soddisfacentemente in questo modo. Quando l' acqua esce per il forame nudo, viene in minor copia in pari tempo di quello che per il forame munito del tubo cilindrico esterno, e per questo in minor copia di quello che per lo stesso munito dell' imbuto interno. Dipende ciò dall' aderenza dell' acqua alle pareti del tubo cilindrico, la quale distrugge in parte l' effetto delle direzioni obblique con cui uscendo l' acqua dal forame nudo diminuisce e contrae la sezione della vena. Quando poi s' aggiunga l' imbuto interiore, non si distrugge soltanto, ma si previene e s' impedisce che le parti

dell' acqua nell' uſcire vengano con direzioni tanto obblique, e perciò in pari tempo ſe ne raccoglie quantità maggiore. Quando s' appone il tubo eſterno conico divergente, i di cui lati divergano con certa proporzione, o ritenendo l' imbuto interno, o no, ſi raccoglie dallo ſteſſo forame in pari tempo quantità maggiore di quello che dal tubo cilindrico, come facilmente ſi rileva dal confronto dell' Eſp. II e VII, IV e VIII. E' queſto un indizio, che l' uniformità di ſezione nel tubo cilindrico, per la ſua aderenza alle pareti, produce qualche reſiſtenza all' acqua che cade, reſiſtenza che, per l' allontanamento ſucceſſivo de' lati del conico, in queſto non incontra. Di fatto ſcorgeſi al n. III che il tubo cilindrico allungato dà la ſolita quantità d' acqua in tempo più lungo di quello che il tubo più corto. Queſta reſiſtenza è la cagione del fenomeno notato al n. VI. L'acqua forzata ad uſcire per il laterale del tubo cilindrico, continua a vuotarſi per eſſo, anche ſe ſi ſchiuda *E*, e dimoſtra ch' eſercita verſo l' origine del tubo laterale una preſſione, che di per sè non baſtava a determinare l' uſcita del fluido, ma che determinata coll' aver chiuſo il tubo *E* continua poi per l' aderenza delle parti dell' acqua tra di loro e con le pareti del tubo laterale. Quindi ſe il tubo cilindrico ſia aſſai lungo, mentre l' acqua per eſſo diſcende, paſſa anche nel laterale, come ſi notò al n. VI, appunto come fa quando il tubo è conico convergente all' ingiù, e ſi notò al n. XXV.

39 La ſteſſa quantità d' acqua che paſſa per l' area del forame, paſſa altresì per qualſivoglia ſezione orizzontale del tubo cilindrico. Così ancora la ſteſſa quantità che paſſa per l' area del forame paſſa per ogni ſezione orizzontale del tubo conico divergente all' ingiù, ſebbene in queſto ſecondo caſo ſia maggiore che nel primo. Nel tubo cilindrico la quantità di fluido occupa ſimilmente le ſezioni ſucceſſive del tubo, che ſono eguali: non così nel cono, dove le particelle dell' acqua in ciaſcheduna ſezione che ſi dilata debbono eſſere più diſcoſte tra di loro, di quello che nella precedente più riſtretta. Si formano dunque tra le dette particelle degl' intervalli, i quali ſaranno occupati dall' aria meſcolata già coll'acqua, e per tale dilatazione ed eſpanſione del luogo, dove prima ſi conteneva, reſa più rara. Quindi l' aria eſterna pre-

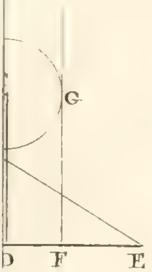
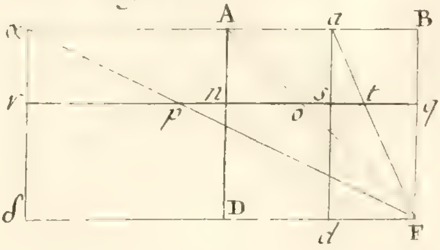
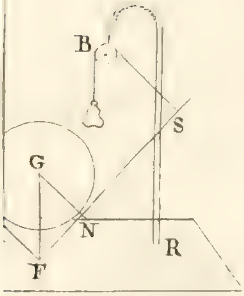


Fig. 2.





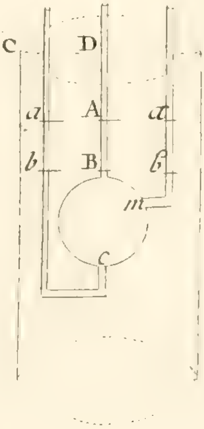


Fig. 4.

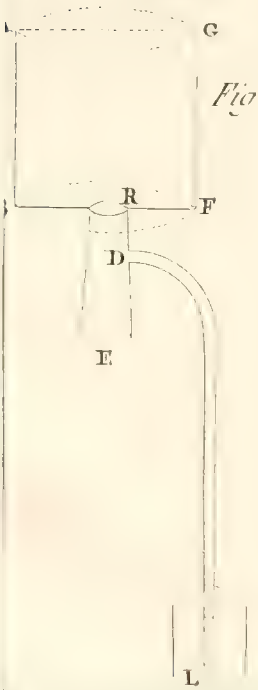


Fig. 5

Fig. 1.

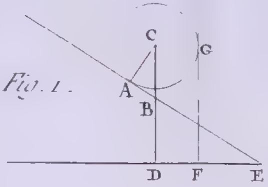


Fig. 2.

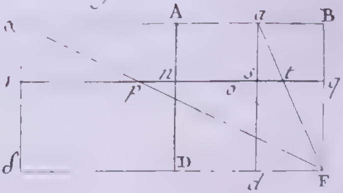


Fig. 3.

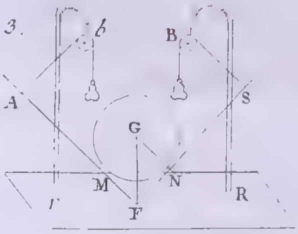


Fig. 4.

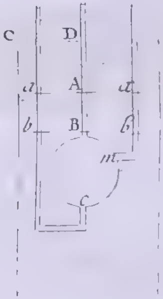
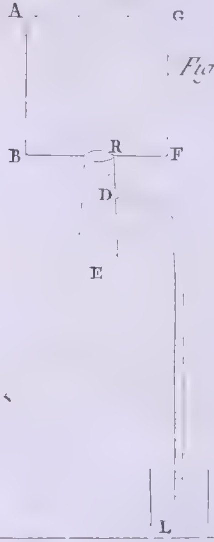


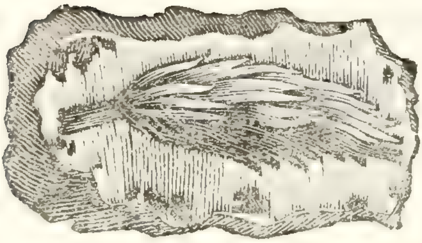
Fig. 5.



mente sulla superficie dell'acqua, nella quale è immerso il tubo laterale, non trovandosi all'equilibrio con quella che si contiene ne' mentovati intervalli, fa ascendere l'acqua nel tubo laterale a tanto maggiore altezza, quant'è maggiore lo sbilanciamento. E se il tubo laterale è aperto nell'aria, la medesima entra ed ascende, fa gorgogliare la vena mescolandovi le sue bolle, e ritarda la velocità del fluido che esce per *E*, come si osserva al n°. IX.

40 Generalmente quando le due pareti d'un mantice si discostano tra di loro, tanto è più forte l'irruzione dell'aria nello spazio compreso tra le due pareti, quant'è più diligentemente chiusa d'intorno la cassa del mantice. Del pari quanto più esattamente è adattato ad una tromba lo stantuffo, tanto maggiore è la sua efficacia a sollevare l'acqua. Nel caso nostro ciò, che può diminuire il grado di rarefazione dell'aria negl'intervalli mentovati, è l'introduzione della medesima per la base inferiore del tubo conico, qualora essa sia troppo ampia, e l'aderenza delle parti dell'acqua tra di loro non basti a tenerle unite in tanta distanza; il che appunto succede, se il tubo conico sia troppo divergente, come si osservò al n°. XX. Ma inoltre, se la cassa del mantice non sia perfettamente chiusa, o se lo stantuffo non sia adattato con somma esattezza ed esquisito contatto alla tromba, la rarefazione d'aria che si produce con queste macchine è comparativamente tanto maggiore, quant'è maggiore la velocità con cui esse s'agitano. Così nel caso nostro quanto più veloce è l'uscita dell'acqua, o per l'altezza del vaso, o per l'aggiunta dell'imbuto e del tubo, o per tutte queste combinazioni prese insieme, tanto è maggiore in ogni istante la rarefazione dell'aria negl'intervalli considerati, tanto minore l'effetto di quella che cerca sempre d'introdursi e d'insinuarsi per di sotto nella vena di fluido, tanto maggiore lo sbilanciamento dell'aria atmosferica preponderante, e tanto maggiore l'altezza a cui l'acqua s'innalza da *L* a *D*. Corrispondono a questo meccanismo i fenomeni XIX, XXII, XXIII, XXIV, e se mal non m'appongo si rende ragione in questo modo d'ognuna delle osservate particolarità. Quindi si rinunzia volentieri alla frase di pressione negativa, la quale non reca un'idea chiara, nè come

da principio ſi diceva, dà alcuna conneſſione tra l'effetto dell' acqua che diſcende per un tubo rigido verticale, e di quella che aſcende per il laterale. E perciò il fenomeno invece d'eſſere idraulico ſtatico è realmente idraulico pneumatico. (*)



(*) Nota del Sig. Cavalier Lorgna. *Mi compiaccio moltiſſimo di vedere avvalorata da quella del reputatiſſimo Sig. Co. Stratico l'opinione, che ho ſoſtenuta vent'anni fa intorno a queſto curioſiſſimo ſperimento Bernoulliano. Sin dal 1769 in una Diſſertazione coronata dall' Ac. R. di Mantova, e pubblicata in quella Città ſopra la preſſione dell' acqua, ho non ſenza fondamento conſiderato il fenomeno come idraulico-pneumatico* (pag 18, 19), *ed ho attribuito l'aſceſa del liquore alla preponderanza dell aria eſterna ſull' acqua in cui è immerſo il cannello laterale. In fatto non ſembra che a forze ipotetiche e negative convenga dar luogo per iſpiegarlo, come ſapientemente il riflette il Sig. Co. Stratico, mentre l'effetto è naturale, ſe ben ſi eſtimi, e ſi riduce a quello de' ſifoni.*

DELLA MANIERA

DI FAR SERVIRE L' ELETTROMETRO ATMOSFERICO PORTATILE (*) ALL' USO DI UN IGROMETRO SENSIBILISSIMO.

MEMORIA

In cui si rischiarano molte cose intorno al trascorrimento del fluido elettrico ne' Conduttori imperfetti

Del Sig. Don Alessandro Volta.

§ I.

Come dal poco vigore dell' elettricità eccitata colle ordinarie macchine, e meglio dalla più pronta dissipazione della medesima può giudicarsi dell' umidità dell' ambiente.

Non v' è alcuno, il quale si sia qualche poco familiarizzato colle sperienze elettriche, che non conosca la grandissima influenza, che hanno l' umido e il secco sulla forza e sulla durata dell' elettricità eccitata colle ordinarie macchine; e che non giudichi più o meno così all' ingrosso al primo porvi mano della maggiore o minore umidità dell' ambiente. Con quale stento, se il tempo e il luogo, ove si sperimenta, sono molto umidi, si perviene ad eccitare una forte elettricità, comunque sia in buon ordine la macchina? E come presto la smarriscono i conduttori, per quanto sembrino

(*) Questo elettrometro sensibilissimo, e comodissimo inventato già da *Tiberio Cavallo*, e megliorato in appresso da *Saussure*, da *Bennett* e da noi pure, è omai reso comune, consiste in due mobilissimi pendolini sospesi entro una boccetta di cristallo ad un cappelletto metallico, sopra del quale si adatta all' uopo una piccol' asta o verghetta parimenti metallica. Vegg. le Trans. Fil., e le mie *lettere sulla meteorologia elettrica* inserite nel Giornale di Pavia intitolato *Biblioteca fisica d' Europa*, Lett. 1. 2. e 3.

bene isolati? Essa se ne va via e per l'aria vaporosa, e per l'umido velo che ricopre i sostegni isolanti, siano questi di vetro nudo, o intonacato di buona lacca, o d'altra vernice resinosa.

Questa dissipazione dell'elettricità ci porge, a ben riflettere, un indizio meno equivoco dell'umido che regna, di quello ce l'offra il giuoco stesso della macchina più o meno indebolito; conciossiachè il buono o cattivo stato e adattamento de' cuscini, dell'amalgama, ed altre circostanze influiscono troppo considerabilmente sulla forza dell'elettricità che si eccita; laddove riguardo alla durata della medesima in un dato conduttore isolato in una data maniera (es. gr. in una sfera, o cilindro di ottone sospesi a un cordoncino di seta, o sorretti da una colonnetta di vetro, o di cera-spagna) non v'è d'ordinario che l'umido dell'ambiente, e quello contratto dal sostegno isolante, che scemar possa tale durata dell'elettricità, ossia accelerarne la dissipazione.

Ecco dunque la prima e la più ovvia maniera di fare delle sperienze igrometriche col mezzo dell'elettricità. Abbiasi un conduttore metallico di discreta mole montato sopra un candeliere isolante, e munito ad una sua estremità di un buon elettrometro di *Henley* ossia *Quadrante-elettrometro*, e posto tal conduttore isolato in luogo discosto da altri conduttori, e infusavi una determinata dose di elettricità non molto grande, come sarebbe di 20 o 25 gradi del detto elettrometro, notisi quanto tempo passa prima che il pendolino suo sia caduto intieramente, o che è meglio, abbassato siasi fino a un dato punto, es. gr. a 5 gradi. Se l'aria è secca molto, lo si vedrà sostenersi per più minuti, ed anche qualche ora; all'incontro se è molto umida, alcuni secondi solamente: anzi ove l'isolamento sia di vetro nudo, e per sorte non della migliore specie di vetro, avverrà ne' tempi e luoghi estremamente umidi, che si abbatta il pendolino del tutto in uno o due secondi, ed anche meno. Però è che truovo molto meglio, siccome per tutte le altre sperienze elettriche, così particolarmente per quelle di cui ora si tratta, d'impiegare un qualche migliore isolamento, servendomi a tal uopo di bastoni di vetro coperti di più mani di buona vernice d'ambra, o incrostati di ottima ceralacca:

ho

ho allora il vantaggio, che anche nell' estrema umidità riman teso ossia sollevato di alcuni gradi l' elettrometro, annesso al conduttore in tal guisa isolato, per più secondi dopo ricevuta l' elettricità; ma ho da un' altra parte l' incomodo, che di troppo lunga durata è poi cotesta elettricità infusavi, ogniqualvolta l' aria non è gran fatto umida, e molto più nel gran secco, sostenendosi allora dei quarti d' ora, e delle ore intiere.

Il tempo pertanto compreso tra alcuni secondi, ed una o più ore, forma in queste sperienze la *scala igrometrica*: la quale, come si vede, è di una grandissima estensione; tale anzi, che diventa sommamente incomoda e impraticabile, niuno per avventura ritrovandosi, che volesse condannarsi per una semplice prova igrometrica di questo genere ad un' osservazione sì lunga e nojosa. In oltre è d' uopo dell' arredo di una macchina elettrica, o di un buon elettroforo per ogni volta, e dovunque voglia instituirsi una simile sperienza; ciò che la rende oltre modo imbarazzante: sicchè, anche per questo, chi mai vorrebbe intraprenderne una serie? Sperienze di questa sorte, che non sono (lo confesso io medesimo) di una grandissima importanza, si tralascian piuttosto che eseguirle a costo di tanto tempo e di tanti preparativi.

E' vero, riguardo al tempo, che esso può accorciarsi di molto, promovendo e sollecitando la dissipazione dell' elettricità, mercè di toccare il conduttore, che la contiene, con un altro cattivo conduttore, ma pur conduttore, cioè con un corpo mezzo tra deferente e coibente (es. gr. con una sottil canna bene stagionata, con un bastoncino di legno secco, con una striscia di cuojo, o di cartone, con una funicella o semplice filo di refe, con una corda di minugia ec.) mercè, dico, di toccare quel conduttore elettrizzato con siffatti corpi, e tenervi applicato un capo di essi mentre la mano impugna l' altro capo. Con ciò facendosi strada all' elettricità nel conduttore per trasfondersi nel suolo, comunque strada ella sia più o men difficile, se ne accelera di molto il decadimento e la dissipazione; e v' è anzi pericolo di un acceleramento troppo grande, a segno di fare svanire cotal elettricità a un tratto, se l' ambiente, e quindi i cor-

pi semi-coibenti sopra menzionati espostivi, trovinsi più che mediocremente umidi.

Ad evitare pertanto siffatta perdita troppo precipitosa dell' elettricità, egli è molto spediente di tener unita al conduttore isolato una boccia di Leyden carica, sicchè abbia a scaricarsi essa pure mercè l'indicato toccamento fatto col bastoncin di legno, colla striscia di cuojo, o di cartone ecc.: scarica, la quale, attesa la grande capacità di tali boccie, anche picciole, non può compiersi così ad un tratto; ma esige un tempo discreto di alcuni minuti cioè primi o secondi, giusta la natura di tali imperfetti conduttori, la loro mole sì in lunghezza che in larghezza o grossezza, e la quantità d'umido che contengono.

§ II.

In che modo scaricandosi il fluido elettrico per la via di conduttori imperfetti trascorra per essi; e quanto influisca alla maggiore o minore difficoltà e lentezza del tragitto la lunghezza, e la larghezza de' medesimi.

L' umidità è tra tutte una condizione, che moltissimo influisce alla celere o tarda trasmissione dell' elettricità; ed è quella che ci siam proposti di più diligentemente esaminare, per farne l'utile applicazione già accennata, Comechè però la maggiore o minore facilità e prontezza di un corpo non perfettamente deferente a portar via l'elettricità, onde son carichi sia un semplice conduttore metallico, sia una boccia di Leyden, in ragione del maggiore o minor grado di umidità di esso imperfetto deferente, e quindi dell' ambiente cui è stato ed è attualmente esposto, costituisca l'oggetto principale delle presenti nostre ricerche, non vogliam tralasciare di osservare qualche cosa anche intorno all' altra condizione sopra indicata della lunghezza e grossezza di quel qualunque deferente imperfetto, che vien impiegato a dissipare gradatamente la carica elettrica.

Cominciando dunque dalla lunghezza, facilmente s' intende che quanto essa sarà maggiore, maggiore ancora, cioè più continuata riuscendo la resistenza, che incontra il flui-

do elettrico nello trascorrere questo più lungo tratto di strada non del tutto libera, nel penetrare da un capo all'altro un tal corpo difficilmente permeabile (che è ciò che vuol dire cattivo conduttore, deferente imperfetto), dovrà del pari essere più lungo il tempo impiegato a vincere siffatta resistenza, a superare tali maggiori ostacoli. Non per questo però dobbiam conchiudere con troppa fretta, che una lista di cartone, di cuojo, d'avorio, una funicella di canape, una verghetta di legno ecc. di doppia e di tripla lunghezza, ci mettano appunto un tempo doppio e triplo a sottrarre e disperdere col lor toccamento l'elettricità, di cui sia carico un conduttore, od una boccia di Leyden: l'esperienza, che sola può decidere anche qui, come in tante altre cose, mi ha fatto vedere che non ha luogo tal giusta proporzione; cioè che la lunghezza del tempo resta indietro dal calcolo, non però moltissimo. Così se una striscia di cuojo es. gr. lunga un piede porti via la carica di una boccetta di Leyden, a segno di farla cadere da 25 gradi del quadrante elettrometro a 5 gradi, in tempo di 30 secondi; un'altra simile striscia lunga il doppio, cioè due piedi, impiegherà a fare lo stesso non già il doppio di tempo, che sarebbe un minuto primo, ma notabilmente meno, cioè da 45 in 50 secondi solamente.

Molte sperienze in vero si richiederebbero, e fatte colla maggiore circospezione e accuratezza, per determinare di quanto precisamente cresca il tempo che vi vuole, acciò una data quantità e forza di elettricità venga rapita ad un conduttore, o boccia, mediante il tenervi applicata l'estremità di un dato cattivo conduttore, che tiensi per l'altra estremità in mano; per determinare, dico, di quanto precisamente cresca il tempo all'uopo richiesto, secondochè, tutte le altre cose pari, codesto imperfetto conduttore si tiene più lungo: e siccome i risultati verosimilmente varierebbero per le differenti specie di essi imperfetti conduttori, quali sono i crini e le penne (sebbene questi più alla classe de' coibenti, che a quella dei deferenti appartengano), ogni fatta di pietre, tranne le preziose (che trovansi anch'esse per lo più veri coibenti), tutti i legni, gli ossi, i cuoj, e la carta, e i fili di lino, di canape, di cotone, e l'acqua indurata in

ghiaccio, e infine, eccetto ſolo i metalli, tutti i corpi che non ſono molto inzuppati d'umido; ſiccome, dico, per ciaſcuno di queſti imperfetti deferenti varierebbero probabilmente i riſultati riguardo alla proporzione, onde colla riſpettiva lunghezza creſce il ritardo portato alla traſmiſſione dell' elettricità; così richiederebbeſi niente meno che una ſerie di ſperienze per ciaſcheduno. Or quelle, che fino ad ora ho fatto, ſebben molte ſiano, è ben lungi che baſtino. Poſſo dunque dire ſoltanto ciò che ho raccolto in generale e all' ingroſſo; ed è: che una doppia lunghezza porta un ritardo di tempo maggiore di un terzo, e ſovente più (come nell' eſempio ſopra recato ſi prolungano i 30 ſecondi a 45, o 50); ed una lunghezza tripla un ritardo proſſimamente doppio, e piuttoſto maggiore.

Venendo ora alle altre dimenſioni, non così toſto per avventura giudicheraſſi, che una maggiore groſſezza della verghetta di legno, della funicella di canape, della corda di minugia, oppure una maggiore larghezza della liſta di cartone, di cuojo, d'avorio ecc. influiſca cotanto a promovere ed accelerare la diſſipazione della carica elettrica, che fanno coteſti corpi col loro toccamento; e più d'uno ſarà ſorpreſo dicendogli io (ciò che coll' eſperienza può facilmente verificare) che ſe una liſterella di balena, di cartone, od altra ſimile, di una data lunghezza, abbia tale groſſezza e larghezza, eſ. gr. di un pollice, ſicchè impieghi, mediante il ſopra indicato contatto, 45 ſecondi a diſtruggere una data carica elettrica; adoperandoſi un' altra ſimile liſterella e dell' eguale lunghezza, ma larga il doppio, cioè due pollici, impiegherà circa un terzo meno di tempo, val a dire da 30 ſecondi, a fare lo ſteſſo; e la metà ſolamente, ed anche meno, cioè 20 ſecondi all' incirca, ſe ſia di larghezza tripla.

Anche qui è ben lungi che ſi poſſa ancora determinare con preciſione la differenza, che induce la maggiore o minore groſſezza e larghezza dei cattivi conduttori nel tempo che impiegano a portar via, mercè il loro toccamento, una certa doſe di elettricità; e nulla ancora ſono in iſtato di aggiugnere a ciò che ho eſpoſto all' ingroſſo: ſolamente farò oſſervare, che più aſſai della groſſezza contribuiſce al celere

trascorrimento del fluido elettrico la larghezza del deferente imperfetto che si porta al contatto della boccia o d'altro corpo elettrizzato; talchè, dove una striscia di cuojo o di carta di tre pollici es. gr. in larghezza impiegherà solo la metà di tempo d'un'altra simile larga un pollice, e quindi di massa tre volte minore; una carta tripla in grossezza, ed un cuojo similmente triplo, ma dell'istessa larghezza, cioè di un sol pollice, accelereranno sibbene anch'essi la dissipazione dell'elettricità, ma non già tanto quanto la carta e il cuojo tripli in larghezza, anzi pochissimo in confronto: e così pure un cilindretto di legno, ed una cordicella a budello, oppur di canape, di doppio diametro, e quindi di massa quadrupla, non porteranno tanta differenza, che arrivi a doppio men tempo impiegato nella esaustione della data quantità di elettricità; quando parrebbe che dovessero portarla anzi maggiore tale differenza, ed affrettare la cosa di più, sendochè per una doppia celerità basta, come si è qui sopra veduto, un aumento solamente triplo di massa, se questo sia in larghezza.

La cosa, che veniamo di osservare, parmi degna di molta considerazione: poichè sebbene già si sappia, e le sperienze tutto dì ci comprovino, che la capacità di contenere l'elettricità vuolsi misurare non dalla massa de' conduttori, buoni o cattivi che siano, ma dalla loro superficie, e sì dalla *superficie libera*; qui nel caso nostro non si tratta di elettricità contenuta, e diciam così stagnante, la quale appunto nella sola superficie de' corpi vien confinata, ma di quella ch'è in attual moto, e trascorre realmente da un capo all'altro penetrando tutto l'interno de' corpi. Adunque pare che dividendosi, come le allegate sperienze evidentemente dimostrano, in molti rivi il fluido elettrico, che per tai cattivi conduttori tragitta, investendo tutte, diciam così, le fibre di essi, come altrettanti canaletti; dovrebbe la facilità sua di scorrere, e la celerità di questo suo tragitto essere in proporzione del numero di tai canaletti, e però in ragione della massa del corpo deferente. Or come va, che l'evento non corrisponde, osservando noi che viene assai più facilitata ed accelerata la trasmissione dell'elettricità per l'accrescimento di superficie, massime estesa in largo, che per quello

della maſſa, aſſai più per la larghezza che per la groſſezza? Convien dunque dire, che quel fluido elettrico, che tragitta pel cattivo conduttore, ſcorra più volentieri lungo eſſa ſuperficie, che per l' interiore del corpo; ſebbene anche per queſta interna via non poco ſe ne traſmetta, il che è indubitato.

E', diſſi, indubitato che del fluido elettrico, il quale ſi ſcarica pe' deferenti maſſime imperfetti, ſebbene il più ſcorra ſulla ſuperficie di eſſi, pur ne trapaſſa anche per l' interno: in prova di che, laſciando da parte infinite altre ſperienze, baſta la ſopra indicata delle tre liſterelle di carta, le quali ſovrappoſte l' una all' altra e ſtrette inſieme, ſe non abbreviano di metà il tempo entro cui, mediante il lor toccamento, ſi traduce e ſi diſſipa una data carica elettrica, come lo abbreviano di metà, ed anche più, quando ſi uniſcano eſſe lateralmente filo a filo, o che è lo ſteſſo, ſi prenda una ſola liſta della ſteſſa carta egualmente lunga, e tre volte larga; ſe, dico, le tre liſterelle ſovrappoſte e ſtrette inſieme non abbreviano fino a ridurlo a metà il tempo, che s' impiega da una ſola e ſemplice a traſmettere una data quantità di elettricità, lo abbreviano ad ogni modo notabilmente.

Del reſto le due propoſizioni poco ſopra avanzate, cioè che più agevolmente ſcorra il fluido elettrico ſulla faccia de' conduttori imperfetti, che non per entro a' medeſimi, e che la porzione che pur tragitta per l' interno e ſi divida e ſi dirami in quanti rivi più può, ſono l' una e l' altra già da molto tempo note e dimoſtrate, ove ſi tratti di una ſcarica repentina e copioſa di tal fluido; e sì la ſeconda comprovata ſingolarmente dal non poterſi effettuare la ſcarica iſtantanea di una boccia di Leyden, e quindi produrre la commozione, per una ſottile ſtriſcia o filo d' acqua, la qual acqua ſi ha pure per un conduttore, ſe non perfetto come i metalli, paſſabilmente buono, e nè anche per un cilindretto della medeſima groſſo alcune linee, per poco che ſia lungo: laddove una ſcarica più o men iſtantanea, più o meno completa, eccitatrice della ſolita commozione, ſi ottiene dandole paſſaggio per una più groſſa, o meglio più larga lamina d' acqua, per un più groſſo cilindro, inſomma per un' ampia mole della medeſima. Dal che manifeſtamente ſi vede, come una groſſa piena di fluido elettrico, la

quale però tragitterebbe facilissimamente e senza alcun sensibile ritardo per un filo metallico sottilissimo, trovasi invece come in angusto alveo impedita e ritardata in una lamina o cilindro d'acqua largo più linee; ma che poi scorre bastantemente libera e quasi senza ritardo per un canale assai più grosso della stessa acqua. Diciamo dunque che questo fluido elettrico allorchè è in copia non tragitta per l' acqua unito e ristretto in un sol filo; ma in più fili o rivi si divide e scomparte, quanti gliene offre l'acqua, che è sul suo passaggio. Che se ciò fa nell'acqua, la quale, dopo i metalli e certi carboni, è il miglior conduttore, quanto più lo dee fare per gli altri corpi, che sono deferenti molto più imperfetti? Abbiam già veduto che in questi si divide anche una non tanto copiosa dose di tal fluido; e vedremo ben tosto che lo fa eziandio una picciolissima.

Riguardo allo scorrere il fluido elettrico provocato alla scarica più agevolmente sulla superficie che per l'interno degli stessi imperfetti conduttori, e fin dell'acqua stessa, ciò pure si manifesta, riguardo alle grandi piene di esso fluido, dalla viva e fragorosa scintilla, che compare nelle grosse scariche, e solca la faccia de' medesimi; formata tal scintilla, come si vede, dalla maggior quantità di esso fluido (non però da tutta), che schiva di penetrare que' corpi, ancorchè deferenti discretamente buoni, come per es. le membrane fresche e succose, i legni ancor verdi, e l'acqua medesima. Ma ciò, come si è già detto, non succede che nelle grandi scariche, quando il grosso torrente di fluido elettrico, perciò appunto che è troppo grosso, trova minore ostacolo e difficoltà a scorrere rasente la superficie del corpo, smovendo e spezzando l'aria contigua, di quello ne incontri a tragittare per l'interno dello stesso corpo, il quale, in qualità di non perfetto conduttore, gli oppone una resistenza tanto appunto maggiore, quanto più copioso è esso fluido, che incalza per passare tutto ad un tratto. Quando dunque la scarica non è così grande e poderosa, o quando pure essendolo, l'imperfetto conduttore che la provoca (o forma una parte dell'arco scaricatore) eccede una competente lunghezza, non iscorgesi allora cotesto salto della scintilla sulla di lui faccia; e la scarica nulla di meno con, o senza com-

mozione, che vuol dire più o meno pronta, si effettua, secondo cioè che quel tal corpo è più o meno deferente. Diremo pertanto che in questo caso tutto il fluido elettrico passi per l'interno del corpo, e niente sulla superficie? Non già: una buona dose anzi ne scorre sopra questa, ma diffusa e ripartita in modo, che non ispezza punto l'aria, nè la smove, ciò che al scintillare è richiesto; mentre il resto parimenti ripartito permea l'interno corpo.

Così dunque avviene nelle mie sperienze, con cui provoco la scarica non molto forte di una boccia di Leyden, o di un semplice conduttore, mercè il toccar questo o quella con un capo di una verghetta di legno, di una riga d'avorio, di una striscia di cuojo, di cartone ecc. più o meno lunghe e larghe, e più o meno umide, delle quali tengo in mano l'altro capo: avviene cioè, che tale scarica si faccia trascorrendo il fluido elettrico in gran parte comechè invisibile sulla superficie di tali corpi, e in parte sotto e per entro; e dividendosi qui e là, quanto più può, in molti rivi: e che essa scarica si compia non già in uno o pochi impercettibili istanti, bensì in un tempo notabile di più secondi, ed eziandio di alcuni minuti primi; per essere quei corpi, qualora non trovinsi molto umidi, assai poco deferenti.

Intorno alle quali sperienze opportuno mi sembra di osservare, che se si concepisce pur facilmente con un poco di riflessione, come dovendo tragittare una copia considerabile di fluido elettrico per un corpo non molto permeabile, quali sono i conduttori imperfetti, si divide esso e scomparte, per incontrare nel totale una minore resistenza, in molti rivi; non si sarebbe per avventura creduto, nè forse io medesimo immaginato avrei e creduto, se l'esperienza non mel mostrava, che l'istesso succedesse anche ad una picciolissima quantità di questo fluido. Ma pure è così: allorquando la carica, o di un conduttore semplice, o di uno unito a qualche boccia di Leyden, è così debole, che non se ne può ottenere scintilla sensibile, bastando essa appena a vibrare di 10, o 12 gradi l'elettrometro sensibilissimo di *Cavallo*, cioè a far divergere i pendolini di 5, o 6 linee; anche allora una lista di carta, di cuojo, di balena ecc. che sia più larga, o assai più grossa, ma singolarmente più larga, offre più facile

le e più sollecito passaggio a questa cotanto debole elettricità sicchè giunge a dissiparla in più breve tempo, di quello faccia un' altra lista in tutto il resto eguale, ma più stretta, o molto più sottile. Il che mostra ad evidenza, come anche la scarsissima dose di fluido elettrico, che se ne va via in ciascuno dei molti istanti, pe' quali dura il disfacimento di così picciola elettricità, che se ne va via, dico, condotta da quell' imperfetto deferente, vi s' incammina e scorre non già ristretta ed unita in un sol filo, ma bene diffondendosi a tutta la larghezza di tal corpo, e investendone tutti quanti i fili; non altrimenti che a gran larghezza di acqua si diffonde (come abbiam veduto, e già si sapeva) un grosso torrente dello stesso fluido elettrico, per procacciarsi un più libero e pronto tragitto. Se però questo scomparto di una gran piena di fluido elettrico non cagiona punto di meraviglia, e si concepisce pur bene che così debbe avvenire; non può per lo contrario non cagionarne il vedere, come una quasi infinitamente picciola quantità dello stesso fluido, con una forza di espandersi che è appena sensibile, pur cerca anch' essa un' ampia via per tragittare, prendendo quanto più può il largo nello scorrere pe' conduttori imperfetti: la qual cosa non che essersi prima d' ora dimostrata, non si sarebbe, torno a dire, per avventura creduta.

§ 3.

Sostituzione del semplice elettrometro atmosferico portatile agli altri apparati composti e voluminosi per le sperienze igrometriche indicate nel § 1: e come debbasi procedere per farle nella nuova maniera.

Ritornando ora dopo questa lunga, ma non inutile digressione, all' influenza, che ha lo stato più o men umido de' corpi imperfettamente deferenti, perchè più presto o più tardi si portin via, mediante il lor toccamento, l' elettricità di qualsisia conduttore o boccia; e ripigliando il discorso della facile applicazione, che può farsene all' igrometria, nel modo indicato nel § 1; mi giova richiamare quello che ivi ho proposto, essere cioè se non necessario, più che spediente di far intervenire una boccia di Leyden, almen piccio-

la; ſenza di che l'elettricità di un ſemplice conduttore, anche diſcretamente grande, ſi toglie mercè il contatto di quel qualunque imperfetto conduttore, che a tal uopo ſi adopera, in troppo brevi iſtanti, in un tempo quaſi non miſurabile, ove tal corpo (eſ. gr. legno, oſſo, carta, cuojo, od altro) trovisi conſiderabilmente umido, e molto più ſe, come accade talvolta, lo ſia all'eccesſo. Ma ſe per queſta parte è utile che s'uniſca la boccia di Leyden al conduttore iſolato, il qual comunica coll'elettrometro, acciò vi ſi ſoſtenga per un tempo miſurabile, cioè alcuni ſecondi almeno, l'elettricità provocata a ſcaricarſi col toccamento d'uno o dell'altro di tai deferenti anche molto umidi; divengono per un'altra parte imbarazzanti tali prove a cagione degli apparati e preparativi neceſſarj, mentre appunto richiedeſi oltre il reſto anche una boccia di Leyden.

Ho dunque penſato a far ſenza di tutti queſti apparati, cioè di macchina elettrica o di elettroforo, di conduttore, d'iſolatore, di boccia; e ad eſeguire le ſteſſe prove elettrico-igrometriche col ſemplice elettrometro di *Cavallo* taſcabile, con quel sì comodo e prezioſo ſtromento, di cui facciam in oggi sì grand'uſo, tanto per le oſſervazioni giornaliere intorno all'elettricità atmosferica, quanto per molte altre ſperienze di elettricità artificiale. Queſt'elettrometro, per poco che ſia ben coſtrutto, riceve prontamente l'elettricità da un baſtone di ceralacca, il quale altronde ſi eccita con ſomma facilità mercè di ſtropicciarlo colla mano, con carta, contro le veſti non umide, ecc. riceve, dico, il noſtro elettrometro di leggieri tanta elettricità quanta è neceſſaria a far divergere i ſuoi pendolini (ſian queſti ſemplici paglie alla mia maniera, ſian liſterelle di foglia d'oro alla maniera di *Bennet*, ſian fili metallici terminanti in pallottoline di midollo di ſambuco all'antica foggia di *Cavallo* e di *Sauſſure*) il più che diverger poſſono, cioè 6 8 10 linee, che ſegnano ſecondo la mia ſcala 12 16 20 gradi, e ad innalzarli anche di più, ſe il permette la capacità della boccetta in cui ſon chiuſi: ricevuta la quale elettricità la conſerva eſſo elettrometro così bene, cha trovaſi di non averla perduta ancor tutta a capo di parecchi minuti ſecondi, ancorchè ſtato ſia lungamente, e continui a ſtar eſpoſto ad un'aria

ſommamente umida, ſol che non venga viſibilmente bagnato. Or ſe l'elettricità ſoſtienſi, e i pendolini non giungono a cadere del tutto per più minuti ſecondi in un ambiente eſtremamente umido, che faranno in uno men umido, in uno anzi ſecco? E' facile l'immaginare che v'impiegheranno uno, due, tre, quattro minuti primi, un quarto d'ora, ed anche una o più ore, ſe l'aria è ſecchiſſima, e ſecchiſſime quindi anche le pareti eſterne della boccetta; e ciò è, che infatti ſuccede.

Ma ecco di nuovo l'incomodo e il tedio di dovere ſtar ad oſſervare troppo lungo tempo, per giudicare del grado di umidità dell' ambiente. Sebbene potrebbe abbreviarſi di molto queſto tempo, tenendo conto di quel ſolo che impiegano i pendolini a diſcendere da uno ad un altro dato grado di elettricità, per eſempio dai 12 ai 10 o agli 8 gradi. Ma che? facendoſi così diverrebbe poi troppo breve il tempo, e quaſi impercettibile qualunque volta l' ambiente ſi trovaſſe molto umido, abbaſſandoſi allora i pendolini da 12 a 10 gradi in meno di un ſecondo.

In viſta di ciò mi ſon rivolto anche pel noſtro elettrometrino allo ſpediente già ſpiegato ne' precedenti §§. del toccamento cioè da farſi con un conduttore imperfetto, onde affrettare l' uſcita e l'eſtinzione dell' elettricità; mi ſon, dico, rivolto di nuovo a queſto ſpediente; ma qui con miglior eſito: giacchè col medeſimo, anzi maggiore riſparmio di tempo, ho ottenuto di laſciare una ſufficiente [illegible] tra i due eſtremi di grand' umido e di gran ſecco, e di facilitare ſommamente le oſſervazioni di paragone. Ho dunque provato a ſollecitare la diſſipazione dell' elettricità indotta nell'elettrometro, mercè di toccare il ſuo cappelletto o la picciola aſta metallica di cui è ſormontato, con un corpo il quale non foſſe nè coibente nè buon conduttore, e con varj di queſti cioè di legno, carta, pergamena, cuojo, avorio, penne, barbe di balena, ſete, ſetole, crini, corde di minugia, ed altri; ed ho veduto che la debole elettricità dell' elettrometro (la quale in vero altro che debole non può eſſere, e in niun modo ſcintillante) non veniva per tai toccamenti involata tutta, ſe non a capo di alcuni ſecondi; quand' anche l' ambiente, cui que' corpi ſtavano

esposti, era umidissimo; e a capo solo di molti secondi, e d' uno, due, tre minuti primi, quand'era l'ambiente molto secco; e corrispondentemente nelle mezzane umidità: con una differenza cioè molto notabile per ogni picciola varietà ne' gradi d'umido; nel che, come si dichiarerà meglio in appresso, consiste il merito principale di queste sperienze igrometriche.

Dapprima avea provato a tener applicato al cappelletto dell'elettrometro l'uncino di una boccetta di Leyden carica quanto basta per far tendere di 10 12 o 15 gradi i pendolini, cioè debolissimamente; e mi serviva allora per dissipare sibbene poco a poco tal piccola carica, ma non tanto lentamente, che nojosa divenisse la sperienza, mi serviva o dei conduttori men cattivi tra li qui sopra accennati, od anche degli altri, ma ridotti in verghe o lamine di discreta grossezza e larghezza, e invece assai corte: la quale grossezza e larghezza massimamente fa sì che più presto trasmettano l'elettricità, ciò che fa ancora la minore lunghezza, come abbiamo mostrato nel §. 2. Avendo però trovato, che bastava armare l'elettrometro della sua asta metallica lunga due piedi o poco più, per formarne un conduttore di sufficiente capacità, e che bastava ridurre a listerelle sottili e molto strette la carta, la pergamena, la balena, la parte cornea di una penna da scrivere ecc. perchè col loro toccamento non involassero troppo presto l'elettricità di tal elettrometro armato; fui ben contento d'aver così semplificate al maggior segno queste sperienze: per le quali si vede, che altro più non si ricerca che l'elettrometro tascabile colla sua verghetta metallica, un bastoncino di cera-spagna, ed una di cotali listerelle, lunga soltanto uno, due, o tre pollici, e larga da una a due linee.

Or acciò per ogni prova resti sempre la lunghezza medesima della listerella semicoibente che ho scelta, senza di che non potrebbero essere comparabili le sperienze, adatto a ciascuna estremità di essa listerella una sottil'unghia metallica (come mostra la qui annessa figura); delle quali unghie una, che fa officio di manichino, prendo tra due dita, e l'altra la porto a toccare il cappelletto o l'astina dell'elettrometro, e ve la tengo applicata il tempo che bisogna.

Questa disposizione è anche vantaggiosa per ciò, che toglie che si tocchi colla mano il corpo medesimo semicoibente, sia penna, sia balena, sia carta, od altra materia; e che si cambj con ciò lo stato di umidità della medesima, pel calore di essa mano, per la traspirazione, ecc.

Ecco pertanto la maniera precisa, con cui fo l'esperienza. Assicuratomi che il mio elettrometro mantenga bene l'elettricità, cioè più d'un quarto d'ora dimorando in luogo discretamente asciutto, e un minuto almeno trasportato da questo luogo, o tirato fuori da tasca, ed esposto ad un ambiente il più umido che dar si possa (salvandolo solo da una pioggia che tutto lo bagni), lo elettrizzo col solito bastoncino di cera-spagna a segno, che i suoi pendolini di paglia (preferisco uno de' miei elettrometri a semplici paglie a quello di *Bennett* con fogliette d'oro, primieramente perchè non è bene, per le sperienze di cui si tratta, che sia troppo delicato, e con ciò suscettibile soltanto di debolissima elettricità; in secondo luogo perchè le paglie, non piegandosi come le dette fogliette, marcano con maggior precisione i gradi) elettrizzo, dico, il mio elettrometro tanto che i pendolini segnino 12 in 14 gradi, cioè le punte delle paglie si scostino una dall'altra 6 in 7 linee. Ciò fatto aspetto fino a che sian cadute da sè a 10 gradi giusti: allora tocco il cappelletto dell'elettrometro, o la verga metallica da cui è sormontato, col corpo semicoibente che ho scelto per queste prove, cioè colla listerella di cartone, d'osso di balena, di penna, o qual essa sia, armata delle due unghie metalliche nel modo che ho sopra descritto; o a dir più giusto fo toccare, e tengo applicata a detto cappelletto o verghetta non la listerella propriamente, ma l'unghia metallica che essa porta in cima; e sto a vedere quanti minuti secondi passano prima che i pendolini, i quali cominciano sul momento a decadere visibilmente, siansi abbattuti dai già detti 10 gradi a cui si trovavano immediatamente prima di tal toccamento, fino ai 2. Non aspetto che giungano a zero, perchè ci va più tempo ad estinguersi questi ultimi due gradi che per tutto il resto: e altronde è inutile; bastando per instituire il paragone la decadenza dai 10 fino ai 2 gradi.

Può farſi l'eſperienza anche col ſemplice elettrometro non armato della verghetta metallica; ma allora eſſendo pochiſſima l'elettricità contenuta ne' ſoli pendolini e cappelletto, ſe ne va via troppo preſto.

Riducendo ora in un ſol punto di viſta l'eſpreſſione e la teoria di queſte ultime ſperienze, è facile comprendere dal ſin qui detto che il numero de' minuti ſecondi. pe' quali ſi ſoſtiene l'elettricità, malgrado l'indicato toccamento, debb' eſſere maggiore: 1°. ſecondo che il corpo impiegato a portar via cotesta elettricità è di ſua natura meno deferente: 2°. quant' egli è maggiore in lunghezza: 3°. quanto è minore in larghezza e groſſezza (giuſta ciò che riguardo a tali dimenſioni abbiamo moſtrato nel § 2.): 4°. finalmente a miſura che trovaſi più ſecco. E però, quando ſi determini la ſpecie del corpo, e le ſue dimenſioni, reſta per elemento variabile la ſola umidità; e puoſſi per conſeguenza giudicare dei gradi di queſta dalla durata dell' elettricità nell' elettrometro, che viene col dato corpo toccato.

Quanto alle varie ſpecie di corpi, moltiſſimi ſono quelli, che ho ſperimentati a queſto intento; e non pochi mi han promeſſo ſulle prime buona riuſcita. Ho poſti dunque al cimento tagliuoli di legno, paglie, e foglie ſecche. fili, e ſtoffe di lino, di canapa, di cotone, di lana, carta comune da ſcrivere, carta ſciugante, e d'ogni altra qualità; varie membrane, e cuoj, e pergamene; corde a budello, ſetole, crini; oſſi, unghie, corni, avorio, teſtuggine, balena, penne: ma qual per uno, qual per altro inconveniente ho abbandonati quaſi tutti queſti corpi; e riſtretto mi ſono ormai a tre o quattro ſoli, cioè la pergamena ſottile, l'oſſo di balena, l'avorio, e la parte cornea e lucida delle penne; tra' quali non ſono ancor deciſo a cui dare la preferenza. Varj, come i legni e le paglie, i fili di lino ecc. molte membrane e cuoj, quaſi tutti gli oſſi, la carta, li ho rifiutati, perchè divenivano troppo deferenti per un umido, che s'accoſtava al maſſimo, a ſegno che involavano tutta l'elettricità dell' elettrometro in meno d' un minuto ſecondo, quando l'igrometro a capello di *Sauſſure* mancava ancora di alcuni gradi dal giungere ai 100, che è il punto che indica l'umidità eſtrema, quella cioè della nebbia. Alcu-

ni altri, e ſono le ſetole e i crini, li ho rigettati per un difetto tutto oppoſto, e voglio dire perchè divenivano quaſi intieramente coibenti ad un ſecco di 25, 30 gradi, o poco più, dell' iſteſſo igrometro, quando cioè diſcende a ſoli 75 70 o 68 gradi della ſua ſcala: il qual ſecco, ſebben avvenga di raro naturalmente in luogo coperto dal ſole (ove debbeſi conſultare ogni igrometro, per giudicare dell' umido dell' ambiente; non mai al ſole, che riſcaldando la ſoſtanza igrometrica verrebbe a diſſeccarla aſſai più dell' aria, che la circonda), pure qualche volta ſi oſſerva, ed anche maggiore. Ve n' ha pure tra i ſummentovati corpi, che vanno ſoggetti all' uno e all' altro di queſti oppoſti difetti, che ſono cioè troppo buoni conduttori per un umido eſtremo o quaſi, e troppo coibenti per un ſecco alquanto più che mediocre; di tal indole è la carta, la quale inoltre è ſoggetta a variare nel grado di conducibilità indipendentemente dall' umido, divenendo ſudicia, o in altro modo alterandoſi; nè va eſente da ſiffatti incomodi la pergamena, che abbandonerò forſe anch' eſſa, riducendomi da ultimo all' oſſo di balena, o alla parte cornea delle penne, e all' avorio: dei quali corpi, altronde più conſiſtenti, e di natura durevoliſſimi, e che, quando occorra, lavare ſi poſſono per renderli netti e mondi, prendendo delle liſterelle ſottili larghe da una in due linee, e lunghe da uno a tre pollici, ſecondo che ſperimentando trovaſi convenire; queſte quand' anche ſi tengano eſpoſte lungamente ad un' aria umida all' eſtremo, alla nebbia ecc. ſchivando ſoltanto di bagnarle, non avverrà che ſpoglino mai l' elettrometro di tutta l' elettricità, nè che ve la faccian cadere dai 10 ai 2 gradi, come vogliamo, più preſto di un minuto ſecondo, o mezzo almeno, e d' altra parte eſpoſte le ſteſſe liſterelle all' aria più ſecca, che naturalmente dar ſi poſſa (ben inteſo all' ombra), a un ſecco, in cui l' igrometro di *Sauſſure* ſegni 60 gradi, ed anche meno, non ſi comporteranno già a guiſa di aſſoluti coibenti, ma più deferenti ancora che coibenti verranno a capo di diſſipare l' elettricità dell' elettrometro in due o tre minuti primi al più: durata ſopportabile, e che non rende l' oſſervazione troppo nojoſa.

L' avvertenza di non eſporre al ſole la liſterella di balena

od altra qualunque di cui ci vogliam servire, che altrimenti riscaldandosi si asciugherebbe di soverchio, e diverrebbe molto più secca dell' ambiente, è, come si comprende, della massima importanza. Quando dunque vogliasi far prova dell' umidità non sol dell' aria chiusa di una stanza, ma anche dell' esterna, si esponga la listerella fuori della finestra, e vi si lasci per alcuni minuti, badando che non vi dia il sole, e non vi sia dato dianzi in modo, che il sasso, od altro su cui vien essa posata, siasi notabilmente riscaldato.

All' istesso modo, che vuol guardarsi la listerella dal sole, debbesi difendere anche dalla pioggia, ricercandosi che sia umida quanto l' aria, ma non bagnata ed inzuppata. Si copra essa dunque convenientemente fuori dell' istessa finestra quando il tempo è piovoso, in guisa cioè che abbia libero il contatto dell' aria, ma nè goccia, nè spruzzo alcuno vi cada sopra.

L' esperienza igrometrica poi può farsi o fuori della stessa finestra, o dentro nella stanza. Se dentro, convien perdere men tempo che sia possibile, acciò la listerella ritenga il grado d' umido contratto all' aperto. Se fuori, conviene ancora, qualora l' aria si trovi estremamente umida, far presto cioè non lasciare esposto l' elettrometro troppo lungamente, nè il bastone di cera-spagna a tal umidità estrema; poichè questo allora difficilmente si potrebbe con istropicciarlo elettrizzare quanto conviene, e quello pure difficilmente prenderebbe i 10 o 12 gradi richiesti di elettricità, e presi perderebbeli in pochi istanti, anche senza il toccamento della listerella; onde equivoca e mancante riuscirebbe l' esperienza. Da ciò si comprende, che neppure nelle stanze umidissime hanno a rimanere per giorni ed ore l' elettrometro e il bastone di cera-spagna, ma riposti devono tenersi in qualche altro luogo discretamente asciutto; e di là poi devon prendersi l' uno e l' altro, o cavare allora di tasca, qualunque volta occorre di esplorare l' umidità estrema o quasi di un' aria tanto libera, che chiusa.

Tralascio altre piccole avvertenze, che si presenteranno da sè a chiunque vorrà applicarsi a queste prove; le quali sembrar potranno cose da nulla ai poco intelligenti, ma a chi ama di internarsi nelle materie, non men dilettevoli che istruttive riusciranno.

§ 4.

§ 4.

Confronto delle nostre prove igrometriche cogli altri igrometri, singolarmente con quello di Saussure: *estensione della scala di graduazione in cotali prove: e come, e fino a qual segno può anche il nostro divenire un igrometro comparabile.*

Comechè le sperienze sin qui descritte, oltre all'essere curiose, abbiano la loro utilità; non pretendo io già che questa nuova maniera di esplorar l'umido di diversi luoghi e tempi debba generalmente preferirsi alle osservazioni de' migliori igrometri, quali sono quelli di *Saussure* a di *de Luc*, molto sensibili, e che più importa, comparabili. Sosterrò solo, che possono non di rado supplire a questi; e che ci offrono a certi riguardi qualche considerabile vantaggio sopra di essi, quantunque rimangano soggette tali nostre prove ad altri svantaggi e imperfezioni. Di questi vantaggi e svantaggi vengo ora a ragionare, e a porli più che posso in chiaro.

Il vantaggio principale, e il pregio più grande che ottengono le nostre sperienze, in cui facciam servire da igrometro l'elettrometro tascabile nel modo descritto nel § precedente, consiste nella grandissima estensione che si viene a dare alla scala igrometrica; cioè nel gran numero di gradi facilmente marcabili tra il termine di umidità estrema e un secco, che, se non è il massimo a cui giunger può l'arte, e neppure il più grande che dar si possa naturalmente, è però tale che ben rare volte s'incontra all'aperto, e nelle stanze non mai, o quasi mai: parlo di quel secco, che fa discendere l'igrometro a capello di *Saussure* dai 100 gradi, termine dell'umidità estrema, circa 40 gradi, cioè fin verso i 60. Ora qual è l'estensione, che abbiamo nelle nostre prove coll'elettrometro per tale mutazione nell'umido di 40 gradi? Quale cioè la differenza del tempo, che s'impiega a far cadere l'elettricità di cotesto elettrometro, mediante il conveniente toccamento della listerella semicoibente ecc. da 10 gradi a 2, siccome abbiamo prescritto? Grande oltre ogni credere; mentre va da un secondo, o mezzo secondo, a due o tre minuti primi, ed anche più. Se dunque consisi

anche un sol grado per minuto secondo, ecco 150, ecco 200 gradi corrispondenti a 40 dell' igrometro di *Saussure*, dal che si vede che tante minime mutazioni d'umido, le quali riescono insensibili, ovver minori di un grado nel detto igrometro, divengono oltre a un grado e due sensibili alle nostre prove, in cui è sì facile distinguere, e noverare i secondi.

E' dico agevol cosa noverare e distinguere i secondi: ed anzi marcabilissimi riescono i mezzi e i quarti di secondo, ed altre più piccole frazioni; laddove non son molto distinguibili i quarti di grado nell' igrometro di *Saussure*. Ho provato molte volte, ed ognuno può provare, che in un minuto secondo si possono proferire distintamente, ove contisi con celerità, i numeri uno, due, tre, quattro, cinque, sei; e contando nè così presto, nè troppo adagio, si arriva comodamente al cinque; e al quattro solamente, se si conta con posatezza: le differenze, che nascer possono son picciola cosa, e possono in molti casi trascurarsi. Io poi ho fatto l' abito di contare da uno fino a dieci in due secondi esattamente: ciò che mi risparmia in molte osservazioni, e segnatamente in quelle di cui ora si tratta, di consultar sempre l' orologio a secondi.

Se pertanto anche ad un umido estremo, all' umido es. gr. della nebbia e dell' aria rugiadosa, a quello che fa andare l igrometro di *Saussure* a 100 gradi, cui non oltrepassa mai, io ho ancora nelle mie prove un minuto secondo pel tempo che tarda a cadere l' elettricità dell' elettrometro tentato col solito toccamento ecc. dai 10 gradi ai 2: ecco un altro vantaggio, che s' aggiunge a quello della grande estensione, che abbiamo dal termine di tal umidità di 100 gradi fin ai 60 della detta scala di *Saussure*: questo nuovo vantaggio consiste in ciò, che si fa luogo a dinotare qualche cosa più in su dell' umido estremo segnato in tal igrometro. Infatti ove la mia listerella d' avorio, di penna, o di balena divenga, non che umida all' estremo, ma alquanto bagnata, porterà via l' elettricità dell' elettrometro in meno di un secondo, ma pure mi lascerà il tempo di contare quando fino a quattro, quando fino a tre, e quando fino a due, secondo che sarà più bagnata; e solo ove sia bagnatissima farà cadere a un tratto i

pendolini in un tempo sì corto e indiscernibile (come un quarto, un sesto, un ottavo di secondo), che sembrerà un istante.

Ma che? Se anche allora che questi cadono, o sembran cadere all'istante, osservar possiamo qualche gradazione. A quest'effetto basta in luogo di applicare la listerella semicoibente al cappelletto, o alla picciol asta ond' è guernito l'elettrometro, farvela toccare soltanto di volo, e darvi con quella delle percosse, in guisa che piegandosi essa listerella, mentre colla punta solamente della sua unghia metallica colpisce detta asta, ne sfugga rapidamente il contatto. In questo modo avverrà, che si possano ripetere 8 10 15 di tali schiaffi ossia colpi celeremente vibrati prima che decada l'elettricità dell'elettrometro dai soliti 10 gradi ai 2, ancorchè la listerella, che s'adopera, per l'estremo umido dell'ambiente cui fu esposta, anzi per vera bagnatura, sia atta a distruggere tale elettricità in meno d'un mezzo secondo, se invece di percuotere con essa così alla sfuggita, si tiene al consueto modo applicata al cappello od asta dell'elettrometro.

Veduto come, e quanto le nostre prove igrometriche coll' elettrometro vanno più in là di ciò che segna l'igrometro a capello, per quel che riguarda l'umido estremo; giacchè indicano al di più varj gradi di *bagnato*, che tal igrometro non dimostra punto; passiamo ora a vedere fin dove arrivano riguardo al secco. Per verità qui restano molto addietro dal termine a cui giunge l'igrometro di *Saussure*, e di *de Luc*, vuo' dire da quel secco estremo procurato coll'arte, d'onde comincia la loro scala di umidità, e ch'è segnato zero. Ho indicato sopra, che le mie prove s'estendono molto comodamente, ed offrono una assai grande scala dalla umidità estrema fino a quella segnata 60 gradi circa nell' igrometro di *Saussure*: or dirò, che poco più sotto può prolungarsi tale scala, cioè fino a 50 o 45 al più; giacchè divenendo per un secco maggiore di questo coibente del tutto o quasi, la solita listerella di penna, d'avorio, o di balena, più non vale a portar via l'elettricità dall'elettrometro, onde ve la lascia sussistere e dieci, e venti minuti primi, e qualche ora, se occorre: anzi anche allora, che l'igrometro suddetto segna soltanto 45 o 50 gradi divien nojosa di mol-

to l' esperienza coll' elettrometro, stantechè vi si sostiene l'elettricità malgrado il solito toccamento 4 5 6 minuti primi: il che è tropppo per chi appena può tollerarne 2, o 3.

Siccome però un sì gran secco, che faccia discendere l'igrometro a capello sotto i 45 gradi, ed anche solo sotto i 50, non si osserva mai, o quasi mai naturalmente, potendosi solo produrre coll'arte in vasi chiusi per mezzo della calce viva, dell'alcali vegetale, e di altri sali deliquescenti; così non dee considerarsi per un gran difetto che le nostre prove igrometriche coll'elettrometro arrivino a stento fino ai 45 o 40 gradi, di tal igrometro, e non passino più innanzi. Che poi, se con altro artificio potessimo giungere, servendoci sempre del nostro elettrometro, a misurare un secco ancor molto maggiore, come infatti il possiamo, e mostrerollo in appresso?

Intanto però, dirassi, gli elettrometri di *Saussure* e di *de Luc* hanno due punti fissi, su cui regolare la loro scala di graduazione, cioè l'umidità estrema che segnano 100 e il secco estremo, non già naturale, che impossibile sarebbe di determinare, ma artificiale, notato *o*: con che ottengono un igrometro *comparabile*. Ma come regoleremo noi la nostra graduazione per le sperienze igrometriche coll'elettrometro, mancandoci uno di questi punti fissi, cioè quello del secco estremo, e solo determinar potendo l'altro dell'umidità estrema? E come otterremo la comparabilità?

Qui altro mezzo non ho trovato che di regolare le sperienze sopra uno di quelli igrometri che sono appunto comparabili. Adunque prendendo per campione l' igrometro a capello di *Saussure*, riduco la mia listerella semicoibente, di cui voglio servirmi per portar via l' elettricità dal mio elettrometro, la riduco a tali dimensioni, onde impieghi 30 secondi giusti a far cadere i pendolini dai 10 ai 2 gradi, quando e dove il detto igrometro segna 80 gradi, che è un' umidità mezzana. Da principio riduceva la listerella a tali dimensioni, che per quella temperatura umida di 80 gradi impiegasse sol 10, o 15 secondi a portar via dall'elettrometro quella tal dose di elettricità, e mi riusciva bene quand' era l' aria più secca, ed anche quand' era più umi-

da, ma non molto oltre i 90 gradi: allora però che l'umido dell' ambiente paſſava i 93 o 94 gradi, era sì breve il tempo della ſperienza, che diveniva preſſochè inſenſibile; giacchè non durava il ſolito toccamento un ſecondo, e neppure un mezzo ſecondo, e colla mia maniera già indicata di contare uno, due, tre, quattro, ecc. non arrivava a due o tre, che già eran caduti intieramente i pendolini dell' elettrometro. Vidi dunque, che conveniva ſervirſi di una liſterella più lunga e più ſottile, tanto che impiegaſſe un po più di tempo a ſpogliare l' elettrometro della data doſe di elettricità; v' impiegaſſe cioè alcuni minuti ſecondi anche per un umido di 95, o 96 gradi, e per quello di 98 e 100 un ſecondo e mezzo almeno, il che appunto ſi ottiene qualora eſſa liſterella ſia tale, che per l' umido di 80 gradi impieghi poco più poco meno 30 ſecondi. Potrebbe anche ſceglierſi lunga e ſtretta tanto che impiegaſſe più d' un minuto ſecondo, e più di due nell' umido quaſi eſtremo di 97, o 98 gradi; il che renderebbe molto più ſenſibili le picciole mutazioni verſo queſto eſtremo, oſſia verſo i 100 gradi: ma come durerebbe allora la ſperienza più di 30 ſecondi per la mediocre umidità di 80 gradi, e più di un minuto primo o di due quando l' igrometro ſegna ſolo 40 gradi, e più di tre, di quattro, per un ſecco di ſei che lo fa diſcendere a 60 55 50 gradi; ed eſſendo che queſta troppo lunga durata rieſce di molta noja, torna meglio, per non incorrere in ſimile inconveniente, rinunciare ad una parte del ſopra indicato vantaggio, e prendere un termine di mezzo. Queſto termine dunque io ho preſo ſcegliendo tra gli altri conduttori più o meno imperfetti l' avorio, l' oſſo di balena, la parte cornea delle penne, oppur anche la pergamena, per farne la liſterella da adoprare nelle mie ſperienze elettrico-igrometriche, e riducendola a tali dimenſioni, che per l' umido di 80 gradi dell' igrometro di *Sauſſure*, che ſi può dire l' umidità mezzana, impieghi 30 ſecondi mercè di tenerla applicata all' aſta dell' elettrometro, a farne cadere l' elettricità dai 10 gradi ai 2. Così diſpoſte trovandoſi le coſe, le mie prove anche pel maggior ſecco naturale non durano mai più di 150 ſecondi, o al più 3 minuti primi: e d' altra parte per l' umido maſſimo durano ancora circa

un minuto secondo; o almen tanto da poter contare alla mia maniera uno, due, tre.

Ma è egli poi facile di ridurre la listerella, che si è scielta, a tale stato, che faccia durare la prova 30 secondi giusti per quell' umido che tiene l' igrometro di *Saussure* a 80 gradi? Anzi facilissimo, sol che si proceda colla debita attenzione e pazienza nei reiterati tentativi, che convien fare. Comincisi dunque a tagliar fuori cotesta listerella d'avorio, di penna, o di balena larga due linee circa, e lunga tre o quattro pollici; e cogliendo il tempo, che l' anzidetto igrometro segni li prefissi 80 gradi, si faccia di tal listerella la prova: impiega ella a distruggere col suo toccamento l' elettricità di esso elettrometro dai 10 gradi ai 2 più tempo dei 30 secondi che vogliamo? Si accorci allora troncandone un pezzo, e si riprovi: se scorgesi che metta ancor troppo tempo, si torni ad accorciare, e ciò a più riprese, finchè si trovi che vada bene. Che se avviene, per aver oltrepassato un poco il limite nell' accorciarla, il contrario cioè che in meno dei 30 secondi porti via quella listerella l' indicata dose d' elettricità dall' elettrometro, si ritagli in guisa che divenga più stretta: con che otterrassi (giusta quanto si è mostrato nel §. 2.) maggior ritardo nel trapasso dell' elettricità. Per tal modo ritagliando la nostra listerella or nella lunghezza, or nella larghezza, e poco per volta si arriva, mercè di molta pazienza, come avvisato già abbiamo, ad ottenere il giusto punto, cioè che per 80 gradi di umido dell' igrometro di *Saussure* faccia ella cadere l' elettricità dell' elettrometro, guernito del suo piccolo conduttore od asta metallica, da 10 gradi a 2 nel tempo di 30 secondi esattamente.

Or ecco come diventa anche il mio un igrometro fino ad un certo segno comparabile. Tosto che io l' ho ridotto a darmi giusto 30 secondi per 80 gradi dell' igrometro di *Saussure*; è pur forza che mi dia sempre un dato numero di secondi di più, e un dato numero di meno, per un dato numero di gradi al di sotto, e al di sopra di quelli 80. Invero è cosa molto penosa e difficile il determinare quanti secondi corrispondano a ciascun grado dell' igrometro di *Saussure* (che facciam servire per termine di paragone) dai

100 ſino ai 60 e più baſſo ancora: cioè quanti ſecondi impieghi la noſtra liſterella a far cadere l'elettricità dell'elettrometro da eſſa toccato, per l'umido di 99 gradi, poi di 98, di 97 e via diſcorrendo. Ma fatto ciò una volta con accuratezza, e trovato con reiterare le ſperienze, che ſi abbiano i medeſimi riſcontri, può formarſi una tavola di rapporto, in cui ciaſcuna delle noſtre prove elettrico-igrometriche ci dia il grado corriſpondente dell' igrometro di *Sauſſure*. Qualora poi non vogliaſi che un preſſo a poco, potrà baſtare di determinare coll'eſperienza il numero de' minuti ſecondi per ogni 5 gradi di detto igrometro; e ſi potrebbe anche eſſer contenti di limitarſi tra i 100 e i 70 gradi, nell' intervallo de'quali ſogliono accadere le mutazioni nell' umidità dell' aria; rariſſimo eſſendo il ſecco che faccia diſcendere più abbaſſo l' igrometro medeſimo.

Mi ſi domanderà s'io ho già fatte queſte prove, e coſtrutta l'indicata tavola. Al che riſponderò, che delle prove ne ho fatte moltiſſime; ma con diverſi ſemicoibenti o conduttori più o meno imperfetti, ad oggetto di ſcegliere il migliore, e con dare alle liſterelle formatene maggiore o minore lunghezza, maggiore o minore ſottigliezza, onde vedere quanto più lentamente o meno involaſſero l'elettricità all' elettrometro: variando nel qual modo le ſperienze poco ancora mi ſon fermato alle liſterelle d'avorio, di balena, e di penna, ridotte giuſto a tali dimenſioni, che facciano cadere l'elettricità del mio elettrometro a paglie dai 10 gradi ai 2 in 30 ſecondi preciſi per quell'umidità, che è ſegnata 80 gradi nell' igrometro a capello di *Sauſſure*: tanto ſolo cioè mi ci ſon fermato, quanto vi voleva per aſſicurarmi che cotal diſpoſizione della liſterella laſciando luogo alle prove dei gradi eſtremi d'umido, non rende quelle di un gran ſecco, ed anche del maſſimo naturale, ſoverchiamente lunghe e nojoſe, come ho ſopra moſtrato. Ho intanto confrontati varj termini intermedj; ma non già tutti i gradi tra i 100 e i 70 o 60 dell' igrometro di *Sauſſure*: anzi non l'ho fatto neppure di cinque in cinque compitamente. A queſto travaglio, ch' eſige maggior comodo e tempo, mi propongo d'applicarmi quanto prima: eſſo è tale del reſto, che ora che ſon poſti i fondamenti, ognuno può farlo da sè.

Resta però a vedere, se prendendo diverse listerelle e riducendo ciascuna a tal lunghezza e sottigliezza, che all'umido di 80 gradi abbian tutte bisogno di 30 secondi giusti per portar via col lor toccamento tanta elettricità all'elettrometro, da farne cadere i pendolini da' 10 gradi a' 2 come ho fissato, resta, dico, a vedere, se tutte poi cammineranno di paro per tutti gli altri gradi di maggiore o minore umidità; se impiegando una es. gr. 4 secondi per l'umido di 95 gradi, e 50 secondi per quello di 75 gradi, tutte le altre saranno lo stesso, e si corrisponderanno esattamente; oppure se discorderanno, impiegando chi 3 chi 4 chi 5 secondi per lo stesso umido di 95 gradi; chi 40, chi 50, chi 60 secondi ecc. per quello di 75 gradi. Se questa o simil altra discordanza avesse luogo, è facile comprendere che, comunque riuscissero comparabili coll'igrometro di *Saussure* le prove elettrico-igrometriche fatte con questa o con quella determinata listerella, già non sarebbero comparabili fra di loro le prove dell'una con quelle dell'altra; e che converrebbe far una tavola di rapporto per ciascuna: converrebbe che chiunque vuol seguire tali sperienze, facesse con quella listerella, ch'egli si è preparata, le prove confrontate a tutti i gradi uno per uno, o almen di 5 in 5 dell'igrometro che serve di campione, e sopra queste costrutta la sua tavola si servisse in seguito sempre dell'istessa listerella; poichè mutandola, ancorchè combinasse la nuova colla prima nel dare i 30 secondi richiesti per 80 gradi dell'igrometro di *Saussure*, come poi potrebbe accertarsi dell'accordo per tutti gli altri gradi, se una non serve di norma certa per l'altra?

Ma quanto il dubbio di tali discordanze ed anomalie sembra fondato e sulla ragione e sull'esperienza pe' corpi di diversa indole e natura, altrettanto pare che debba escludersi pe' corpi della stessa specie. Se dunque ci atterremo o al solo avorio, o alla sola balena, non v'è ragione di credere che le picciole accidentali differenze tra avorio ed avorio, tra osso ed osso di balena indur ne debbano una così notabile, da progredire due di queste affatto discordemente nella conducibilità pe' varj gradi d'umido superiori ed inferiori agli 80, quando sono stati ridotti a coincidere esattamente per questo termine medio di naturale umidità. E' ben vero che l'esperien-

za

za mi ha fatto vedere, che due listerelle di balena, le quali pareano egualissime, e così due d' avorio affatto simili in apparenza, differivano notabilissimamente una dall' altra nella virtù di condurre l' elettricità, tal che conveniva dare a questa assai maggiore lunghezza o assai maggiore sottigliezza, che a quella, acciò impiegassero ambedue l' istesso tempo a portar via egual dose di elettricità: ma quando finalmente a questa differenza si è rimediato col compenso giusto delle rispettive dimensioni, quando son ridotte le due listerelle della stessa materia al segno, che sì l' una che l' altra, coll' istessa umidità di 80 gradi, fa cadere i pendolini dell' elettrometro da 10 gradi a 2 in un tempo eguale, cioè di 30 secondi, non si vede perchè non debbano anche per ogn' altro grado di umidità fare gli stessi passi ambedue, e mantenere un perfetto accordo. Del rimanente convenendo che son queste semplici conghietture, mi riservo a deciderne colla sperienza, che non ho ancora abbastanza consultata su tal punto.

Ma dato anche, che per niun modo potesse ottenersi un' esatta comparabilità nelle nostre prove elettrico-igrometriche, dovrà dirsi perciò che a nulla esse valgano? E non basta per accordar loro qualche pregio, che ci indichino chiaramente le più picciole differenze di umidità dell' ambiente, quelle fin anche, che non sono marcabili dal sensibilissimo igrometro a capello? Or egli è così in fatti: e basta richiamarci, che per un grado di questo, ed anche meno, le nostre prove ci presentano la differenza di più di un minuto secondo, divisibile facilmente in cinque o sei tempi: basta dire, che da una stanza all' altra, anzi da un angolo all' altro dell' istessa stanza, si nota da noi non di rado la differenza di più secondi: infine, che va la differenza da un secondo a più di 100 per non più di 25 o 30 gradi dell' igrometro di *Saussure*, dai 98 cioè o dai 100 ai 75 73 o 70. In una sì grande estensione pertanto della nostra scala può giudicarsi convenientemente delle differenze nell' umido dell' ambiente, ancorchè manchi quell' esatta comparabilità, che pur si desidererebbe.

E giacchè son venuto a parlare delle differenze d' umido nelle stanze, non voglio lasciar di dire, che in queste prove

ſingolarmente rieſce bene il mio proceſſo, quantunque rieſca non male eziandio per eſplorar l'umido e il ſecco dell'aria aperta. La ragione è che nelle ſtanze non ſuol variare l'umido, che dai 95 ai 75 o al più 70 gradi dell'igrometro di *Sauſſure*; entro ai quali limiti l'oſſo di balena, la penna, l'avorio (ſiccome ancora la pergamena, la carta, ed altri corpi, ſe di queſti uno voglia ſervirſi) non diventano nè troppo conduttori, nè troppo coibenti; onde non è mai che la liſterella che ſi è ſcielta e preparata di conveniente lunghezza e larghezza impieghi nè meno di 2 o 3 ſecondi, nè più di 50 o 60 per far cadere i pendolini del mio elettrometro a paglie ſottili da 10 gradi a 2. All'aria aperta all'incontro va non di rado l'igrometro a 98 ed anche 100 gradi, termine dell'umidità eſtrema; nel qual caſo la noſtra liſterella ruba tutta l'elettricità dell'elettrometro in un ſecondo, o meno (ſuppoſto che rubi, come ſi richiede, in 30 ſecondi i ſoliti 8 gradi, da 10 cioè a 2): il che non è sì facile a farſi con preciſione; onde per meglio miſurare ſiffatto umido è d'uopo ricorrere allo ſpediente più ſopra deſcritto, che è di toccar di fuga replicatamente con eſſa liſterella l'aſta dell'elettrometro, e noverarne i colpi.

In quella maniera che all'aria aperta l'igrometro va ſovente fino al termine dell'umidità eſtrema, ciò che non ſuol fare nelle ſtanze; diſcende anche talvolta ſotto i 70 gradi, a 65 60, e, ſebben rariſſime volte, ſe pur non s'eſponga al ſole, anche a meno: pe' quali ſecchi la liſterella ſemicoibente qualunque ſia fa così male l'officio di conduttore, che laſcia paſſare più di 100 e di 200 ſecondi, prima d'involare all'elettrometro, col toccarne il cappello o l'aſta, e ſtarvi al modo ſolito applicata, l'elettricità dai 10 agli 8 gradi: il che rende, come più d'una volta ſi è accennato, troppo tedioſa l'oſſervazione.

§ 5.

Altra nuova maniera di prove igrometriche coll' iſteſſo elettrometro portatile, allorchè un gran ſecco rende o troppo incomode, o impraticabili quelle alla maniera già deſcritta.

Allorquando avviene che tutti o quaſi tutti que' corpi, i

quali nello ſtato ordinario ci ſi moſtrano imperfetti conduttori, o mezzo tra deferenti e coibenti, e che perciò io chiamo ſemi-coibenti, diventino per un ſecco ſtraordinario quaſi coibenti del tutto; nel qual caſo le ſperienze igrometriche alla maniera ſopra deſcritta rieſcono o troppo nojoſe e incomode, od anche affatto impraticabili; allora convien ricorrere ad altro ſpediente, per arrivar a conoſcere e diſtinguere i gradi di queſta ſecchezza: ed ecco quello che mi è ſuggerito, non dipartendomi dal caro mio elettrometro.

Prendo una riga d'avorio, o meglio una ſtriſcia di pergamena, larga da uno a due pollici, e lunga otto o dieci; (ſe è di più, tanto meglio); queſta ſtrofinata bene con due dita, o altrimenti, con che, per ritrovarſi appunto ſecca, facilmente ſi elettrizza, la preſento al cappello o all'aſta dell'elettrometro, ſenza farvela toccare; e ſto oſſervando, e notando per quanto tempo dura in eſſa ſtriſcia l'eccitatavi elettricità, e ſi fa ſentire all'elettrometro; cioè per quanti ſecondi, preſente quella, ſtanno aperti i di lui pendolini. Comunemente una buona pergamena monda e netta comincia a far dar ſegni all'elettrometro noſtro, ſtrofinata come s'è detto, ove l'ambiente cui è eſpoſta ſegni 80 gradi all' igrometro di *Sauſſure*: ma queſti ſegni ſi riducono ad un cenno di aprirſi e ſcoſtarſi, o ad una divergenza ſibbene di più gradi dei pendolini, ma paſſaggera e iſtantanea; per aver anche la quale convien tenere la ſtriſcia di pergamena parallela all'aſta dell'elettrometro, e diſtante ſol due o tre pollici, nel tempo ſteſſo che ſi ſcorre giù rapidamente colle due dita, con cui ſi ſtringe e ſtrofina. Se ſi ſtropiccia tenendola più lontana, e ſi preſenta dopo all'elettrometro, anche colla maggiore celerità poſſibile, non ſi han ſegni di elettricità, che già è ſvanita: eſſa, dico, è ſvanita, e non ſi han ſegni adoperando così, quando l'ambiente è troppo umido, o lo è anche ſol mediocremente, e fin ſe comincia ſotto dell' umidità mezzana a dominare il ſecco, quando cioè l'igrometro di *Sauſſure* ſegna 80 gradi, oppur ſolo 75 e 74. Più ſotto verſo i 72 o 70 gradi comincia l'elettricità della pergamena ſtropicciata a ſoſtenerſi; e quindi a fare ſtar divergenti i pendolini dell' elettrometro qualche ſecondo; e infi-

ne molti secondi, e sempre più a misura che l'igrometro dinota maggiore secchezza.

Non debbo qui tralasciar di dire, che, invece della striscia di pergamena, serve pur anche bene una di carta comune da scrivere; col solo divario, che questa non comincia a dar segno neppure dell'elettricità *momentanea*, di quella intendo, che fa alcun poco oscillare i pendolini all'atto stesso che si strofina la striscia davanti l'asta dell'elettrometro; non comincia, dico, a dar segno, se non per un secco, che porti l'igrometro di *Saussure* verso i 70 gradi; e non comincia poi a dare segni più o meno durevoli, tali cioè, che faccians sentire ai detti pendolini pel tempo di alcuni secondi, se non varj gradi più sotto, vale a dire per un secco assai più grande, e che mai o quasi mai accade naturalmente. Gli è perciò, e perchè la carta è più soggetta a rompersi e a guastarsi, che preferisco la pergamena: quale preferisco anche al feltro, al panno, e ad altre stoffe, che possono sibbene servire, ma che son soggette ad alterarsi in più maniere.

Ma sia la pergamena, o qualunque altro semicobente, che si prescelga per tali sperienze, ecco in queste un altro genere di prove elettrico-igrometriche, di cui valer ci possiamo ne' tempi e luoghi, in cui domina tale secchezza, che male riuscirebbero le prove, o il tedio ci apporterebbero di una lunghissima durata, tenendoci all'altro metodo, che abbiam sopra ampiamente descritto. Il nuovo che or qui proponiamo, e che è riservato ai secchi straordinarj, cominciando dai 70 gradi circa dell'igrometro di *Saussure*, non saprei dire ancora fino a qual segno di secchezza possa giungere: certo è però, che secco naturale non si dà, a cui non giunga e l'oltrepassi; sicchè può servire eziandio, se non pel massimo secco artificiale, per molti gradi che vi s'accostano, e che rendono non sol l'osso di balena, la penna, l'avorio, la pergamena, la carta, ma ogn'altro conduttore imperfetto, o semicoibente, coibente perfetto.

Ciò basti per ora di questa nuova maniera; che abbiam fatto poco più che indicare; e che a miglior occasione forse spiegheremo più ampiamente, ed estenderemo ad altre applicazioni.

LETTERA

Del Sig. Cavaliere Felice Fontana

Al Sig. de Morveau

Signore

NOn avendo ricevuto risposta di alcune mie lettere da qualche tempo speditele, molto temea che si fosse dimenticata di me; ma la gentil lettera, che ultimamente mi scrive, mi ha assicurato che ciò non sia. Le sue tre memorie, che si è compiaciuta farmi leggere anticipatamente, mi sono sembrate degne del loro Autore, che sempre eguale a se stesso non produce che cose eccellenti. I nuovj editori dell' Enciclopedia non avrebbero potuto ad altri meglio affidarsi che a lei per avere un lavoro il più completo e più perfetto in Chimica, per decorare questa grand' opera destinata a trasmettere alla posterità lo stato delle cognizioni umane nel presente secolo.

Io mi prendo la libertà di scriverle un estratto d' una memoria che ho fatto sopra la scomposizione dell' acqua: credo che dopo gli indizj, che vi troverà, potrà immaginare quant' io penso su quest' articolo. Credo dimostrato dopo i miei sperimenti, che 'l flogistico del ferro e l' acqua sieno i componenti, o gli elementi che costituiscono l' aria infiammabile, poichè i pesi dell' aria infiammabile, che si ottengono, corrispondono a quei dell' acqua consumata, e di quella parte di ferro che si cristallizza.

Mi resta a dimostrare in quale stato l' acqua si trovi in questa cristallizzazione di ferro, ciocchè non ho fatto a cagion dell' immenso e continuo travaglio, che mi costa la formazione del Gabinetto di Firenze, che contiene certa-

mente la Fiſica, l' Aſtronomia, la Chimica, e finalmente la Storia naturale nella grand' eſtenſione, ſe non che ciò che mi occupa ancora più, ſi è la gran raccolta d' anatomie in cera, che deggio fare per l'Imperatore, e quella che fo per Firenze. Eſſe ſaranno formate di più di 20 Statue per ciaſcuna, e di più di 4000 pezzi di particolarità. Non mi reſtano che due anni per terminarle interamente, farne fare i diſegni, le ſpiegazioni, ecc. Giudichi qual tempo poſſo concedere alle mie ſperienze.

Ella ha molta ragione di dire, che il *problema del ſecolo* è di ſaper ciò che diviene *l' acqua e 'l flogiſtico*. Non ſi ha fino ad ora che troppo negletto la neceſſaria preciſione per queſta ſorte di delicate ſperienze; ed ella vedrà dalla mia lettera, o per meglio dire, dall' eſtratto ſuperiore, quante precauzioni fa meſtieri di avere per ottener dei riſultati certi. Si è mancato altresì di raccorre i prodotti del mercurio per aſſicurarſi ſe vi foſſero dei vapori aſſorbibili dall' acqua ed in qual quantità. Biſogna ſcomporre l' aria infiammabile, che ottienſi in queſte ſperienze con dell' aria tratta dal *precipitato per ſe*, e queſt' è ciò ch' io farò ſubito che ne avrò il tempo. Proccurerò di ſcomporre eziandio i criſtalli, che ſi formano nei tubi di ferro, ſenza di che non ſon perſuaſo che ſi potrà giammai dire alcuna coſa di certo e concludente ſu queſto ſoggetto.

I criſtalli di quarzo che ella ha ottenuto mi ſembravan eſſere una prova molto iſtruttiva ed un gran paſſo di fatto per l' intelligenza d' uno di quei proceſſi, che la natura ſegue per formarli. Circa alla diſſoluzione e ſoſpenſione del quarzo o della terra ſelcioſa nelle acque d' Islanda credo eſſere in iſtato di poter dire alcuna coſa molto veriſimile, poichè poſſo appoggiarmi ſovra fatti, e ſovra fatti preſentatici dalla natura ſteſſa molto in grande. Nei *Lagoni delle Maremme* di Siena, che non ſono che ſorgenti d' acque più o men calde dal calor naturale fino a quello dell' acqua bollente, e i di cui getti s' innalzano da tre piedi fino a ſei, ſi oſſerva (nei luoghi ove l' acqua è più calda) che tutte le pietre, cominciando dalle più ſemplici fino alle più compoſte ed alle più dure, ſenza eſcluderne i quarzi, che ſono ſcompoſte dall' azion dell' acqua, ſi riducono in paſta; ed in

una polvere impalpabile, se sono esposte ai vapori umidi di queste acque calde, vapori che s'inalzan più di 100 piedi francesi ed in forma di nubi, e di colonne di fumo fino a 400 piedi d'altezza. Lo strepito è spaventevole, e tutte queste sorgenti, che sono per molte migliaja tra calde e fredde, esalano un' immensa quantità d' aria epatica frammischiata con molt' aria fissa. L' odor epatico fa sentirsi a sette od otto tese di distanza. Tutti i corpi, sui quali opera la cagione di questi fenomeni, si trovan più o men coperti di solfo, e questa cagione dee la sua origine ad alcune piriti che si scompongono successivamente. L'acido del solfo penetra tutte queste pietre quarzose, o selciose quasi interamente; e se s' infrangono trovansi umide nel loro interno, acide e sensibilmente cangiate alla lor superficie. Le vene di quarzo son divenute flessibili quasi come la cera, e possono esser piegate senza rompersi. Se tuttavia si lasciano all'azion dell' aria divengono friabili e cadono in polvere. Questa polvere è bianchissima, e s'attacca alla lingua come l'argilla; ne contiene in effetto, perchè se si unisce all'acido vitriolico, ottiensi dell'allume. Questi due caratteri posson avere ingannati gli osservatori più attenti, come eglino avean a prima vista ingannato me.

Leggonsi due memorie su di questo suggetto negli Atti di Siena, e si era creduto che le sostanze non solamente selciose ma ancor calcari si cangiassero in totalità in terra argillosa. Il fatto è, che avendo contuttociò presa di questa farina bianca esterna da queste pietre selciose, ed avendola esaminata in paragone della stessa pietra selciosa interiore non alterata, ho ottenuto gli stessi risultati da tutte e due, con picciolissime differenze, ed i principj componenti di tutte e due eran di terra selciosa per la maggior parte, qualche quantità di terra argillosa, ed un pochetto di terra calcare, come trovasi quasi in tutte le pietre di questa sorte (*).

(*) N. B. Queste sperienze sono state ripetute molte volte in appresso, e di diverse maniere, e contuttociò il successo, ed i risultati (che l'autore ha comunicato in seguito a molti suoi amici, e tra gli altri al celebre Commendator de *Dolomieu*, e *Mascagni* di Siena, ch'è uno di quelli che hanno scritto sui lagoni di cui è questione) sono stati costantemente gli stessi.

Queste acque tengono come in dissoluzione queste tre differenti terre, e questa forse è la ragione per cui non formansi degli strati silicei ove quest' acqua cade, come se ne fanno in Islanda. Ma ciò che è certissimo si è, che la pietra selciosa essendo esposta ai vapori dell' acido sulfureo volatile e di aria epatica dei *Lagoni* divien molle, fragile, farinosa, e si tiene come in dissoluzione nell'acqua senza supporvi un calor enorme, come s'è detto riguardo l'Islanda, poichè si veggon quivi parecchie alterazioni anche ove il calore è minor di quello dell' acqua bollente.

Se i nostri Lagoni non son vulcanici, la cagion si è che son poco estesi, e che le piriti sono in minor quantità del bisogno e poco profonde. Egli è tanto vero che la sorgente del calore è vicinissima alla superficie della terra, che le piriti non si trovano che alla superficie stessa, e che si veggono di tempo in tempo mancare e disseccare alcuni di questi *Lagoni* i più piccioli, e che pur davano dell'acqua calda, dei vapori sulfurei, dell'aria epatica, dell'aria fissa, del solfo.

Ho messo nell'acqua alcune piriti non ancora scomposte, ma per altro un poco alterate, ed umide, ed ho ottenuto dell'aria epatica, e dell'aria fissa, che si è naturalmente disimpegnata in questa circostanza. Queste piriti son ordinariamente ferrigne.

Egli è un fenomeno ben singolare che l'aria comune, in mezzo di tutte queste esalazioni, possa esser ottimamente respirabile, malgrado la quantità d'aria epatica e fissa prodotta dai Lagoni. Credo pertanto che non si possa attribuir ciò che ai vapori acquosi prodotti dal calore, i quali lavano, o purgano, per così dire, l'aria che si respira. Il mio eudiometro mi ha provato che quest' aria non era viziata che di $\frac{1}{20}$ al più. Io deggio, dunque, confermarmi sempre più con *Bergman* che noi non siamo ancora arrivati a provar con esperienze dirette che le terre primitive possan cangiarsi l'una nell'altra. E se si ha creduto trovare alcuni pezzi delle lave di Napoli ridotte totalmente in terra argillosa (di che molto dubito), ciò non prova altra cosa se non che le altre terre, e specialmente la selce è stata distrutta o dispersa dal continuo attacco dei più validi agenti della natura.

Può

Può averſene una prova da ciò, che queſti ſteſſi pezzi peſan meno che le lave in iſtato naturale, o compatto ſiccome ſono, quantunque impregnate d'un acido vitriolico, che lor è foreſtiero ed accidentale.

Se ella crede che queſti penſieri ſien degni di rifleſſione, può preſentargli alla celebre Accademia di Dijon, come un atteſtato del mio riſpetto. Ad ogni modo mi farò ſempre un onore di ricever ſue nuove, nè mi ſarà giammai coſa più grata quanto d'eſſer meſſo a parte delle ſue ſcoperte, in attenzione delle quali ho l'onore di dichiararmi.

Fine delle Memorie Sociali.

INDICE

DI CIO' CHE SI CONTIENE

NEL PRESENTE VOLUME.

CAtalogo de' Membri della Società Italiana pag. III

Elogio di Leonardo Ximenes.
Scritto dal Sig. LUIGI CACCIANEMICI PALCANI Profeſſore Primario di Geografia, e di Nautica nell'Inſtituto, e di Fiſica nella Pontificia Univerſità di Bologna. IX

SEZIONE PRIMA.

Oſſervazioni Meteorologiche fatte in Verona negli anni 1788, 1790.
Del Sig. ANTONIO CAGNOLI Aſtronomo, e Secretario perpetuo dell'Accad. di Agricoltura, Commercio ed Arti. I

Appendice alla Memoria intorno la dolcificazione dell' acqua del mare inserita nel III. Volume della Società Italiana.
Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Cavaliere della sacra Religione de' Santi Maurizio e Lazaro, Brigadiere, e Governatore delle Scuole Militari 8

Memoria intorno alle Mappe, e alla Sfera di riduzione per l' arte navigatoria.
Del medesimo 17

Dissertazione geometrico-analitica della Costruzione e della quadratura di alcune volte e lunule.
Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI 48

SEZIONE SECONDA.

Della longitudine di Verona, determinata con osservazioni astronomiche.
Del Sig. ANTONIO CAGNOLI. 77

Osservazioni sopra il ritorno delle Serie
Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI Professore di Matematica nella Pontificia Università di Bologna, e Secretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze 88

Memoria sulle pressioni esercitate da un corpo sostenuto da tre o più appoggi collocati nello stesso piano.
Del Sig. PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. 107

Prodromo d' Osservazioni sopra il trattato di Calco-

lo integrale pubblicato in Parigi dal Sig. Marchese de Condorcet *l' anno* M. DCC. LXV.
Del Sig. PIETRO FERRONI Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana 130

Sulle rivoluzioni del globo terreſtre provenienti dall' azione dell' acque Memoria Geologica.
Del P. ERMENEGILDO PINI Ch. Reg. B. Profeſſore di Storia Naturale 163

SEZIONE TERZA.

Della latitudine e delle Refrazioni di Parigi e di Verona, e dell' obbliquità dell' eclittica.
Del Sig. ANTONIO CAGNOLI 259

Teoria generale del moto rotatorio ſpontaneo de' corpi naturali ſopra piani inclinati
Del Sig. PAOLO DELANGES 278

Delle altezze barometriche Diſſertazione geometrico-analitica.
Del P. D. FRANCESCO MARIA FRANCESCHINIS.
Preſentata dal Sig. CAVALIERE LORGNA . . . 294

Del miſurare l' acqua che eſce dalle cateratte con moto libero Memoria I.
Del Sig. CAVALIERE LORGNA 313

Del miſurare l' acqua che eſce dalle cateratte con moto perturbato Memoria II.
Del medeſimo 330

Deſcrizione dell' Oſſervatorio meteorologico eretto al fine dell' anno 1780.

Del Sig. D. PIETRO MOSCATI Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano 356

Storia di un' egagropile ritrovata nel secondo ventricolo di un bue.
Del Sig. FRANCESCO TOGGIA.
Presentata dal Sig. CAVALIERE LORGNA 382

Sezione di un Cadavero.
Del Sig. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI Medico-Fisico 391

SEZIONE QUARTA.

Cateratta idrometrica proposta
Dal Sig. CAVALIERE LORGNA 397

Continuazione delle Osservazioni anatomiche patologiche sugli organi uropoietici.
Del Sig. VINCENZO MALACARNE Professore Primario di Istituzioni Cerusiche, e dell' Arte Ostetricia nella R. I. Università di Pavia, e Cerusico Pensionario di S. M. Sarda 408

Considerazioni sopra una maniera diversa da quella che segue l' Eulero, *di trarre dal circolo le quantità trascendenti che allo stesso appartengono; e dimostrazione d' un Teorema analitico.*
Del Sig. FRANCESCO PEZZI.
Presentata dal Sig. LEONARDO SALIMBENI . . . 417

Saggio di un nuovo Corso di Elementi di Statica.
Del Sig. LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari 426

Lettera dissertatoria relativa a due Rose prolifiche.
Del Sig. Ab. PAOLO SPADONI.
Presentata dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI. 488

SEZIONE QUINTA.

Della velocità dell' acqua per un foro nel fondo di un vaso che abbia uno o più diaframmi: e della velocità pure dell' acqua per un tubo verticale cilindrico o divergente annesso a un foro nel fondo di un vaso semplice: e del soffio che si proccura nelle fornaci di alcune ferriere col mezzo dell' acqua.
Del Sig. TEODORO BONATI Professore d' Idrostatica nell' Università Pontificia di Ferrara, ed Inspettore dei fiumi del Ferrarese 501

Osservazioni sopra varj effetti della pressione dei fluidi.
Del Sig. SIMONE CONTE STRATICO Professore di Matematica, e di Fisica Sperimentale nell' Università di Padova. 525

Della maniera di far servire l' elettrometro atmosferico portatile all' uso di un Igrometro sensibilissimo, Memoria, in cui si rischiarano molte cose intorno al trascorrimento del fluido elettrico nei Conduttori imperfetti.
Del Sig. Don ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nella R. I. Università di Pavia . . . 551

Lettera al Sig. de Morveau.
Del Sig. FELICE FONTANA Cavaliere del Sacro Romano Impero, Direttore del Regio Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana 581

		Errori	Correzioni
pag. xi	l. 1	ramo	*Ramo*
11	l. 10	Quatt'	Quattr'
37	l. 20	truovi	trovi
83	l. 23	ritrocede	retrocede
167	l. 21	a nella Lapponia	e nella Lapponia
183	l. 28	ſcorere	ſcorrere
216	nota	*Da la Peirouſe*	*De la Peirouſe*
229	l. 32	fe	ſe
253	l. 24	agifce	agiſce
295	l. 11	$-g^n$	$-gr^n$
387	l. 6	fe ſteſſo	ſe ſteſſo
542	l. 31	ſopraddotta	ſopraddetta

Il preſente V. Volume contiene Fogli 77 ½, e Tavole 13 di varia grandezza, il cui prezzo, oltre le reſpettive ſpeſe di porto, è di lire venete 21 compreſa la provviſione del dieci per cento al Librajo venditore.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY